УДК 519.217

А.А. Вишенский, С.В. Сирик

О построении границы Мартина и исследовании финального поведения траекторий для одного вида случайных блужданий

Рассмотрен процесс одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам с возможностью обрыва в определенной точке. В явном виде вычислена функция Грина и построена граница Мартина, а также получено описание всех неотрицательных гармонических функций и исследовано финальное поведение траекторий данного процесса. Для модификации процесса с поглощающим экраном исследована алгебра финальных событий.

A process of the one-dimensional symmetrical random walk by whole numbers with the ability of termination in a definite point is considered. A Green function is obtained in an explicit form and a Martin boundary is constructed as well as the description of all nonnegative harmonic functions is obtained and the final paths behavior of the given process is researched. For the modification of the process with an obscuring screen the algebra of final events has been researched.

Розглянуто процес одновимірного симетричного випадкового блукання цілими числами з можливістю припинення в певній точці. В явному вигляді обчислено функцію Гріна та побудовано границю Мартіна, а також отримано опис всіх невід'ємних гармонічних функцій та досліджено фінальну поведінку траєкторій даного процесу. Для модифікації процесу з поглинаючим екраном досліджено алгебру фінальних подій.

Введение. При исследовании эволюции различных систем, поведение которых содержит элементы случайности, актуален практический вопрос изучения поведения систем при стремлении времени к бесконечности. Другой вопрос, имеющий непосредственное экономическое происхождение, – нахождение такого случайного момента времени, называемого моментом оптимальной остановки системы, при котором обеспечивается оптимальный экономический эффект от функционирования системы при выполнении условия, что ее эволюция в данный момент была прекращена. Эти задачи достаточно сложные, но для систем, поведение которых описывается цепями Маркова, они могут быть решены в терминах так называемой граничной теории марковских процессов.

В 1941 г. опубликована работа Мартина [1], с изложением нового метода описания множества всех положительных решений уравнения Лапласа в произвольной области евклидова пространства. Основной вывод теории Мартина состоит в том, что существует возможность построить интегральные представления для гармонических функций, в которых интегрирование ведется не по геометрической границе области, а по некоторой естественной, которую сейчас принято называть границей Мартина. Вероятностная интерпретация теории Мартина предложена в работе Дуба [2], с ее результатами и связывается возникновение новой и активно развивающейся до сих пор области стохастического анализа – граничной теории марковских процессов или теории границ Мартина.

Граничная теория позволяет изучать «финальное» поведение траекторий марковских процессов, т.е. поведение при стремлении времени к бесконечности (или к моменту обрыва процесса). Другое важное применение граничной теории – описание всех связанных с марковским процессом положительных гармонических и супергармонических (эксцессивных) функций [3, 4]. Указанные функции играют значительную роль при исследовании моментов оптимальной остановки марковских цепей [3], а также при изучении аддитивных функционалов от однородных марковских процессов [4]. Пример аддитивного функционала (от броуновского движения) – стохастический интеграл Ито [4].

Явное построение границы Мартина даже в случае счетных марковских цепей очень затруднено в связи с тем, что для ее нахождения необходимо знать функцию Грина [3–7] рассматриваемой цепи. Функция Грина в свою очередь выражается в общем виде через элементы целых степеней матрицы переходных вероятностей, вычисление которых также – серьезная проблема, так как фазовое пространство в данном случае – счетное. Лишь с помощью различных приемов и ухищрений удается отыскать функцию Грина [6, 7].

В данной статье рассматривается процесс одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам 0, 1, 2, … с вероятностью перехода в одно из соседних состояний, равной 0,5, и возможностью обрыва процесса в точке нуль с вероятностью 0,5. Видно, что это частный случай счетной однородной марковской цепи, который может быть полезен в изучении таких практических вопросов, как например, эволюция систем массового обслуживания или математическое описание экономических и игровых ситуаций. Используя полученные в работе [8] выражения для произвольных натуральных степеней матрицы переходных вероятностей, в явном виде вычислена функция Грина и осуществлено построение границы Мартина для рассматриваемой цепи. Также получено описание всех (неотрицательных) гармонических функций и исследовано финальное поведение траекторий цепи.

Помимо описанной выше цепи, рассматривается ее модификация следующего вида: к фазовому пространству $E \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ добавляется точка –1, в которой находится поглощающий экран. Выходя из точки нуль с вероятностью 0,5, цепь попадает в точку –1, где остается навсегда. Видно, что указанная модификация формально не имеет обрывающихся траекторий; для нее также решена задача описания всех неотрицательных гармонических функций и исследовано строение финальной σ-алгебры.

Некоторые аспекты теории потенциала для счетных марковских цепей

Приведем краткое связное изложение некоторых известных фактов о граничной теории марковских процессов, необходимых для понимания основных аспектов и результатов.

Пусть дана некоторая марковская цепь со счетным фазовым пространством состояний E и дискретным временем. Также пусть задана матрица переходных вероятностей $P \equiv \{P_{x,y}\} \equiv \equiv \{p(x, y)\}$ и на множестве E определена некоторая функция $f(x)$. Определим функцию $Pf(x)$ для всех $x \in E$ следующим образом:

$$Pf(x) \equiv \sum_{y \in E} P_{x,y} f(y).$$

Очевидно, в нашем случае действие оператора P сводится к умножению матрицы переходных вероятностей P на вектор–столбец f, представляющий функцию, заданную на множестве состояний.

Функцию $f(x)$ назовем *гармонической (P-гармонической)*, если $Pf = f$ в каждой точке из E, и *супергармонической*, если $Pf \le f$. Неотрицательную супергармоническую функцию называют *эксцессивной* [3]. Примером гармонической функции может служить функция $\overline{\pi}_B(x)$, выражающая вероятность, выходя из x, побывать бесконечно много раз в множестве B. Для теории марковских процессов важны именно неотрицательные гармонические функции [3].

Центральную роль в теории дискретного потенциала играет *потенциальный оператор,* определяемый как $G \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P^n$. Содержательный смысл матричных элементов потенциального оператора G следующий [3–7]: $g(x,y) \equiv G(x,y) \equiv \equiv G_{xy}$ выражает среднее время пребывания цепи в состоянии y при условии, что цепь вышла из состояния x. Выражение $g(x,y)$ принято называть также *функцией Грина*. Действие оператора G на некоторую функцию $\varphi(x)$ называется потенциалом данной функции и обозначается как $G\varphi(x)$. Ясно, что $G\varphi(x) = \sum_{y \in E} g(x, y)\varphi(y)$.

Для эксцессивных функций справедлива теорема Рисса о разложении [3, 8]: любая эксцессивная функция равна сумме неотрицательной гармонической функции и потенциала неотрицательной функции, т.е. $f = G\varphi + hf$. Этот результат является аналогом известной теоремы Рисса в дифференциальных уравнениях.

Задача описания всех неотрицательных гармонических функций для цепи – суть нахождение ее *границы Мартина*. Опишем кратко процесс построения границы Мартина (более детально см. в [3]). Можно доказать [3], что любая эксцессивная функция *f(x)* является пределом неубывающей последовательности потенциалов, т.е. $f(x) = \lim_{n \to \infty} G\varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{y \in E} g(x, y)\varphi_n(y)$, или вводя *ядро Мартина* [3, 5] $k(x,y) \equiv \dfrac{g(x,y)}{g(0,y)}$, получаем $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in E} k(x,y)\mu_n(y)$, где $\mu_n = g(0,y)\varphi_n(y)$ – последовательность мер на E. Причем предполагается, что $g(x,y) < \infty$ и $g(0,y) > 0$. Можно показать [3], что функции $k_y(x) \equiv k(x,y)$ при $y \in E$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $y \in E$, и корректно определено замыкание множества $\{k_y(x)\}$, исходя из покоординатной сходимости, а полученное (пополненное) множество функций K будет компактом. Пусть $\{k_{y\in E}(x)\} \equiv \{k_y(x) \mid y \in E\}$. Отожествляя $E \ni y \leftrightarrow k_{y\in E}(x)$, определим множество $B \equiv K \setminus E$ и назовем его *границей Мартина*. Можно сказать, что в некотором смысле множество B является предельным для фазового пространства E. Используя теорему Хелли [3], можно вывести равенство $f(x) = \int_K k(x,y)\mu(dy)$, где μ – некоторая конечная мера на K, зависящая от f, и наоборот, функция, представимая в виде такого интеграла, эксцессивна.

Обозначим через V множество всех эксцессивных функций $f(x)$ с условием $f(0) = 1$ и через $H \subset V$ множество гармонических функций. Любая эксцессивная функция, кроме тождественно равной нулю, записывается в виде $c \cdot f(x)$, где $c > 0, f \in V$. Видно, что и V и H – выпуклые множества. Можно доказать, что все крайние точки множества V содержатся среди функций $k_y(x)\,(y \in K)$ и при $y \in E$ функция $k_y(x)$ является крайней точкой [3] множества V, а также, что все крайние точки множества H содержатся среди функций $k_y(x) \quad (y \in B)$. Теперь обозначим через B_E множество тех точек границы B, которым отвечают крайние функции из H. Опираясь на теоремы Шоке [3, 9], можно $\forall h \in H$ записать

$$h(x) = \int_{B_E} k(x,y)\nu(dy), \qquad (1)$$

где ν – конечная мера на B_E, причем такое представление единственно. Представление (1) называется *представлением Мартина*. Теперь для произвольной эксцессивной функции $f(x)$, использовав разложение Рисса, получим: $f(x) = \int_{E\cup B_E} k(x,y)\nu(dy)$, и такое представление единственно. Таким образом, мы сократили область интегрирования из множества B до подмножества $B_E \subset B$.

Роль границы Мартина не только в том, что она дает описание гармонических функций. Можно доказать, что траектория процесса с вероятностью единица входит в определенную (случайную) точку границы Мартина (если траектории цепи не обрываются), и через эту точку описывается всякое событие, зависящее от предельного поведения траектории [4, 5]. Таким образом, граница Мартина может быть полезной при изучении финального поведения цепи. При построении представления Мартина (1) нигде не использовалась стохастичность матрицы переходных вероятностей, поэтому возможен случай $\sum_{y\in E} p(x,y) < 1$, причем величину $1 - \sum_{y\in E} p(x,y)$ следует понимать как вероятность обрыва процесса. Тогда можно утверждать, что процесс с вероятностью единица либо войдет в некоторую точку границы Мартина, либо оборвется (см. теорему 4 в работе [5]).

Отметим, что существует много способов построения границы Мартина, которые приводят к различным результатам (следуя построению, описанному в [3]).

Так, например, в работе [5] в качестве ядер Мартина выбираются функции $k(x,y) \equiv \dfrac{g(x,y)}{\eta(y)}$, где $\eta(y) \equiv \sum_x \gamma(x) g(x,y)$, $\gamma(x)$ – некоторая конечная «эталонная» мера на фазовом пространстве E при условии $\eta(y) > 0 \quad \forall y \in E$. При таком определении ядра в терминах границы Мартина будут описаны только γ-интегрируемые эксцессивные функции. Очевидно, наше построение –

частный случай указанного, если в качестве меры $\gamma(x)$ взять меру Дирака, т.е. вероятностную меру $\delta(x)$, сосредоточенную в точке нуль. Соответственно, мы получим эксцессивные функции, интегрируемые относительно меры $\delta(x)$.

При построении границы Мартина также важны вопросы топологического характера, так как различные способы пополнения фазового пространства приводят к границам с неодинаковыми свойствами (и наборами точек) и различным характером сходимости процесса к точкам границы при стремлении времени к бесконечности [5, 10].

Финальные события

Предполагается, что матрица переходных вероятностей для цепи Маркова – стохастическая матрица, следовательно, формально процесс не имеет обрывающихся траекторий.

Финальными событиями [5, 11] назовем события, определяющиеся траекторией процесса, но такие, что не зависят от поведения этой траектории до любого конечного момента времени (например, событие «траектория, начиная с некоторого момента, содержится в множестве $A \subset E$» или событие «траектория ограничена»). Финальные события образуют некоторую σ-алгебру, называемую *финальной σ-алгеброй*.

Пусть $\{P_x\}$, $x \in E$ – стандартный набор вероятностных мер [4] для рассматриваемого марковского процесса, здесь индекс x указывает на то, что движение начинается в точке x. Рассмотрим случайную величину ξ, измеримую относительно финальной σ-алгебры (*финальную случайную величину*). Определяя функцию $f(x) \equiv M_x\xi$ (интеграл от функции ξ по вероятностной мере P_x) и используя марковское свойство, легко доказать [5, 11], что $f(x)$ является гармонической функцией. Рассмотрим теперь финальное событие A, имеющее вероятность, отличную от нуля, и финальную случайную величину χ_A – индикатор события A. Тогда гармоническая функция $f(x) = M_x\chi_A = P_x(A)$ очевидно ограничена, и из этого следует, что неограниченная гармоническая функция не может соответствовать какому-либо финальному событию, имеющему ненулевую вероятность.

Рассмотрим некоторое подмножество A фазового пространства E. Пусть $F(A)$ – событие, состоящее в том, что траектория процесса в какой-то момент войдет в A и больше из него не выйдет. Если вероятность события $F(A)$ ненулевая, то A называется устойчивым (возвратным) классом [8]. Существует теорема Блэкуэлла [11], утверждающая, что все финальные события с точностью до событий вероятности нуль описываются финальными событиями вида $F(A)$.

Переходные вероятности и вычисление функции Грина

Рассмотрим одномерное симметричное случайное блуждание по множеству целых чисел $E \equiv \{0, 1, 2, 3, ...\}$ с возможностью обрыва в точке нуль. Очевидно, это частный случай однородной счетной цепи Маркова с фазовым пространством E и матрицей переходных вероятностей $\widetilde{P} \equiv \{\widetilde{P}_{ij}\}$ (при $i, j \in \{0,1,2,...\}$) следующего вида:

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Будем называть ее в дальнейшем *цепью* 1.

Используя теорию спектральных разложений самосопряженных разностных операторов по обобщенным собственным векторам [12], в работе [8] дано интегральное представление элементов произвольной натуральной степени матрицы $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P}_{ij}^n = \widetilde{P}_{ij}^{(n)} = \int_{-1}^{1} \lambda^n U_i(\lambda) U_j(\lambda) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda^2} d\lambda,$$

где $U_i(\cos\theta) = \dfrac{\sin(i+1)\theta}{\sin\theta}$ – полином Чебышева второго рода. Проводя замену $\lambda = \cos\theta$, получаем выражение для $\widetilde{P}_{ij}^n$ в более удобной форме:

$$\widetilde{P}_{ij}^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^n\theta \cdot \sin((i+1)\theta) \sin((j+1)\theta) d\theta, \qquad (2)$$

причем $\widetilde{P}_{ij}^n = 0$, если $n + i + j$ нечетно.

Вычислим потенциальный оператор $\widetilde{G}$ этой цепи. По определению $\widetilde{G} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}^n$. Тогда рассматривая отдельно случаи для четного и нечетного $i+j$, после несложных, но достаточно громоздких выкладок, используя формулу (2), получаем выражения для матричных элементов потенциального оператора:

$$\tilde{g}(i,j) \equiv \tilde{G}(i,j) = \begin{Bmatrix} 2(j+1), \text{при } j-i \le 0 \\ 2(i+1), \text{при } j-i \ge 1 \end{Bmatrix}, \qquad (3)$$

$$i \ge 0, j \ge 0.$$

Вычисление границы Мартина

Вычислим границу Мартина для цепи с фазовым пространством $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\widetilde{P}$. Введем ядро Мартина

$$k_y(x) \equiv k(x,y) = \frac{\tilde{g}(x,y)}{\tilde{g}(0,y)} = \begin{Bmatrix} y+1, \; y \le x \\ x+1, \; y \ge x+1 \end{Bmatrix}.$$

Надо замкнуть множество функций $\{k_{y \in E}(x)\}$ исходя из поточечной сходимости. Запишем критерий сходимости Коши для последовательности функций $\{k_{y_n}(x)\}$:

$$\forall x \ge 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(x, \varepsilon) \; \forall n \ge$$

$$\ge N \; \forall p \ge 0 \; \left| k_{y_{n+p}}(x) - k_{y_n}(x) \right| < \varepsilon.$$

Последнее выражение, используя явную формулу для $k_y(x)$, приводится к следующему:

$$\begin{Bmatrix} \left| y_{n+p} - y_n \right| < \varepsilon, \text{ при } y_{n+p}, y_n \le x \\ 0 < \varepsilon, \quad \text{при } y_{n+p}, y_n \ge x+1 \end{Bmatrix}.$$

Пусть имеется сходящаяся последовательность $\{k_{y_n}(x)\}$. Фиксируем некоторое $\varepsilon < 1$ и $x \in E$. Если последовательность чисел $\{y_n \in E\}$ ограничена, то, взяв достаточно большое x, получим, что $\exists N \; \forall n \ge N \; \forall p \ge 0 \; \left| y_{n+p} - y_n \right| = 0$, т.е. последовательность, начиная с некоторого члена, стационарна и, следовательно, имеет место сходимость последовательности $\{k_{y_n}(x)\}$ к функции $k_y(x)$, где $y \in E$. Но для построения границы Мартина нас не интересуют последовательности функций, что сходятся к функции из $\{k_{y \in E}(x)\}$. Значит, последовательность $\{y_n\}$ неограниченна. Для такого случая предельная функция – это $h(x) = x+1$. Действительно, если $\{k_{y_n}\} \xrightarrow[n \to \infty]{} h$, то это эквивалентно

$$\forall x \ge 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \;\; \forall n \ge N \; \left| k_{y_n}(x) - h(x) \right| < \varepsilon.$$

Последнее выражение приводится к виду $\begin{Bmatrix} \left| y_n + 1 - h(x) \right| < \varepsilon, \; y_n \le x \\ \left| x+1-h(x) \right| < \varepsilon, \; y_n \ge x+1 \end{Bmatrix}$, из которого и видно, что $h(x) = x+1$. Функция $k_y(x) = h(x) = x+1$ не принадлежит множеству функций $\{k_{y \in E}(x)\}$, она получается лишь тогда, когда к множеству состояний E формально присоединить бесконечно удаленную точку. Видно, что $h(x)$ является $\widetilde{P}$-гармонической и $h(0) = 1$, т.е. множество H гармонических функций, равных единице в точке нуль, непусто.

Итак, установили, что граница Мартина B состоит из единственной точки $h(x) = x+1$. Непустое, выпуклое и компактное множество гармонических функций H имеет хотя бы одну крайнюю точку [3], которая обязана содержаться среди функций $k_y(x)$ $(y \in B)$, но множество B одноточечное и, следовательно, тогда $B_E = B$. Причем в силу представления (1) любая неотрицательная $\widetilde{P}$-гармоническая функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \text{const} \cdot h(x), \text{ где } h(x) = x+1, \; x \ge 0. \qquad (4)$$

Отметим, что функция $h(x) = x+1$ является неограниченной, следовательно, она не может соответствовать какому-либо финальному событию (вероятность которого отлична от нуля). Причем любая неотрицательная $\widetilde{P}$-гармоническая функция, за исключением тождественно нулевой, неограниченна. Рассматривая финальное событие, заключающееся в том, что процесс выходит на бесконечно удаленную точку, которая, как уже доказано, является границей Мартина для рассматриваемой цепи, можно сказать, что его вероятность равна нулю (т.е. $\forall x \in E$ мера P_x множества траекторий, выходящих на бесконечность, равна нулю). *Таким образом, с какой бы точки* x $(x \geq 0)$ *не начинался процесс, почти наверное он оборвется.*

Исследование модификации исходной цепи

Рассмотрим случайное блуждание по множеству целых чисел $\{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ с матрицей переходных вероятностей $P \equiv \{P_{ij}\}$ (при $i, j \in \{-1,$ 0, 1, 2, 3, …}) следующего вида:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Назовем эту цепь *цепью* 2.

Цепь 2 можно рассматривать как необрывающуюся модификацию цепи с фазовым пространством {0, 1, 2, …} и матрицей переходных вероятностей $\widetilde{P}$ (т.е. цепи 1), для которой в предыдущем пункте была построена граница Мартина и найдено представление (4) всех неотрицательных $\widetilde{P}$-гармонических функций.

Опишем теперь все неотрицательные P-гармонические функции.

Если $Pf = f$, где $f \equiv (f_{-1}, f_0, f_1, ...)^T$ неотрицательная функция, то последовательность чисел $\{f_{-1}, f_0, f_1, ...\}$ будет неубывающей: действительно $\forall x \geq 0$ $\frac{1}{2} f(x-1) + \frac{1}{2} f(x+1) = f(x)$, т.е. $f(x)$ лежит в отрезке между $f(x-1)$ и $f(x+1)$. Данная последовательность не может быть убывающей, иначе найдется точка, в которой значение функции будет отрицательным числом. Значит, $\forall x \geq 0$ $f(-1) \leq f(x)$. Матрица P является стохастической матрицей, значит функция $g \equiv \text{const}$ будет P-гармонической. Но тогда функция

$$h \equiv (f_{-1}, f_0, f_1, ...)^T - (f_{-1}, f_{-1}, f_{-1}, ...)^T =$$
$$(0, f_0 - f_{-1}, f_1 - f_{-1}, ...)^T \equiv (0, h_0, h_1, ...)^T$$

будет неотрицательной P-гармонической функцией, т.е. $Ph(x) = h(x)$. Из этого следует, что функция $\widetilde{h} \equiv (h_0, h_1, h_2, ...)^T$ принадлежит множеству неотрицательных $\widetilde{P}$-гармонических функций, для которых справедливо представление (4). Тогда общий вид P-гармонической неотрицательной функции следующий:

$$f(x) = c_1 Id(x) + c_2 h(x), \tag{5}$$

где $Id(x) \equiv 1, h(x) = x + 1, x \geq -1, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$.

Таким образом, все неотрицательные гармонические функции, связанные с цепью 2, даются формулой (5).

Введем величину $\pi_y(x)$ – вероятность, выходя из точки x, когда-нибудь достичь точку y. Доказывается [3], что справедливо выражение $g(x, y) = \pi_y(x) g(y, y)$. Тогда при $x \geq 0, y \geq 0$, используя (3), получаем следующее выражение для $\pi_y(x)$:

$$\pi_y(x) = \frac{g(x,y)}{g(y,y)} = \frac{g(x,y)}{2(y+1)} = \begin{Bmatrix} 1, \ y \leq x \\ \dfrac{x+1}{y+1}, \ y \geq x+1 \end{Bmatrix}.$$

Ранее установлено, что цепь 1 обрывается с вероятностью, равной единице, что эквивалентно попаданию цепи 2 в состояние -1, т.е.

$$\forall x \geq -1 \quad \pi_{-1}(x) = 1. \tag{6}$$

Очевидно, что некоторое состояние цепи *возвратно*, если почти все траектории цепи бесконечно много раз проходят через данное состояние. В противном случае, состояние называется *невозвратным*.

Таким образом, любое состояние из множества {0, 1, 2, …} в цепях 1 и 2 является невозвратным. Состояние {–1} – единственно возвратное состояние цепи 2, и в силу (6) с вероятностью единица все траектории входят в это состояние (обозначим соответствующее финальное событие как $F(-1)$). Но тогда в силу теоремы Блэкуэлла финальным событием $F(-1)$ определяется любое финальное событие (с точностью до событий вероятности нуль), связанное с цепью 2. Кроме того, вероятность наступления события $F(-1)$ равна единице, т.е. оно отличается лишь на множество вероятности нуль от события Ω, представляющего собой все пространство траекторий цепи 2. Тогда финальная σ-алгебра, связанная с цепью 2, тривиальна, т.е. каждое финальное событие отличается лишь на множество с вероятностью нуль от всего пространства Ω или от пустого множества. Это позволяет сделать следующий вывод: вероятность любого финального события для цепи 2 равна нулю или единице, что является аналогом известного закона нуль или единица, установленного Колмогоровым для последовательности одинаково распределенных независимых случайных величин [12].

Заключение. В данной работе рассмотрен процесс одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам 0, 1, 2, … с вероятностью перехода в одно из соседних состояний, равной 0,5, и возможностью обрыва процесса в точке нуль с вероятностью 0,5. Видно, что это частный случай счетной однородной марковской цепи, который может быть полезен в изучении таких практических вопросов, как например эволюция систем массового обслуживания или математическое описание экономических и игровых ситуаций. Для явного построения функции Грина использованы полученные в работе [8] выражения для произвольных натуральных степеней матрицы переходных вероятностей. Показано, что функция Грина в данном случае определяется выражением (3), используя которое в явном виде вычислена граница Мартина. Доказано, что функция $h(x) = x + 1$ – единственный элемент границы Мартина и может быть получена лишь при формальном добавлении к фазовому пространству цепи бесконечно удаленной точки. Любая неотрицательная гармоническая функция для данной цепи представляется в виде (4).

Используя границу Мартина, исследован существенный для практики вопрос финального поведения траекторий и доказано, что с вероятностью, равной единице, любая траектория обрывается независимо от того, из какой точки начиналась эволюция цепи.

Помимо указанной выше цепи, в работе рассматривается ее модификация следующего вида: к фазовому пространству состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ добавляется точка -1, в которой находится поглощающий экран. Выходя из точки нуль, с вероятностью 0,5, цепь попадает в точку -1, где остается навсегда. Данная цепь не имеет обрывающихся траекторий. Показано, что любая неотрицательная гармоническая функция, связанная с этой цепью, представляется в виде (5). Также исследована финальная σ-алгебра и показано, что она тривиальна, т.е. каждое финальное событие отличается лишь на множество с вероятностью нуль от всего пространства траекторий или от пустого множества, и что вероятность любого финального события равна нулю или единице.

1. *Martin R.S.* Minimal positive harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **49**, № 1. – P. 137–172.
2. *Doob J.L.* Discrete potential theory and boundaries // J. Math. and Mech. – 1959. – **8**, № 3. – P. 433–458.
3. *Дынкин Е.Б.*, *Юшкевич А.А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
4. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
5. *Дынкин Е.Б.* Граничная теория марковских процессов (дискретный случай) // УМН. – 1969. – Т. 24, № 2 (146). – С. 3–42.
6. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.
7. *Кемени Дж.*, *Снелл Дж.*, *Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
8. *Вишенский А.А.*, *Сирик С.В.* О спектральном подходе к исследованию цепей Маркова // УСиМ. – 2009. – № 3. – С. 15–20.
9. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968. – 112 с.
10. *Hunt G.A.* Markoff chains and Martin boundaries // Illinois J. Math. – 1960. – **4**, № 3. – P. 313–340.
11. *Дынкин Е.Б.* Границы Мартина // Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Ротапринт ин-та математики АН УССР, 1964. – 263 с.
12. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

Поступила 10.12.2009

Тел. для справок: 095-631-3766 (Киев)

●