

В.И. Скурихин, Л.С. Житецкий, К.Ю. Соловчук

Управление многосвязными объектами с вырожденными и плохо обусловленными передаточными матрицами на основе метода псевдообратного оператора

Решена задача управления линейными дискретными многосвязными объектами с вырожденными или плохо обусловленными передаточными матрицами. Изучены динамические свойства систем управления, содержащих псевдообратные модели этих объектов. Приведены числовые примеры.

The problem of controlling the interconnected linear discrete-time plants whose transfer matrices are singular or ill-conditioned is stated and solved. The dynamical properties of the control systems containing the pseudo-inverse models of these plants are studied. To support the theoretical results, several numerical examples are given.

Розв'язано задачу управління лінійними дискретними багатозв'язними об'єктами з виродженими або погано обумовленими передаточними матрицями. Вивчено динамічні властивості систем управління, що містять псевдообернені моделі цих об'єктів. Подано числові приклади.

Введение. При решении ряда прикладных задач автоматизации управления часто возникает потребность в поддержании нескольких взаимосвязанных переменных на заданных программой работы системы уровнях, приводящая к построению многосвязных систем управления. Требования к показателям качества функционирования таких систем непрерывно возрастают.

Одно из перспективных направлений в области построения эффективно функционирующих систем управления многосвязными объектами открывает подход, основу которого составляет метод обратного оператора [1]. Такой подход ориентирован, как известно, на решение достаточно широкого класса так называемых обратных задач динамики. В идейном плане он восходит к пионерным работам [1, 2]. Дальнейшее существенное развитие этот подход получил в [3, 4]. Независимо от появления публикаций [1, 2] и позднее идея построения итерационных алгоритмов, реализующих метод обратного оператора в простейших случаях, когда число каналов передачи управляющих воздействий и соответствующее число выходных величин объекта не превышает двух, была выдвинута в [5, гл. 7]. Оказалось, что эти алгоритмы формально дают решение оптимизационной задачи управления многосвязным нелинейным

объектом с невырожденной матрицей линеаризованных статических характеристик [6, с. 88].

Согласно методу обратного оператора управляющую подсистему (устройство управления) следует строить на базе обратной (инверсной) модели объекта [1–4]. Такая модель осуществляет функциональное преобразование сигналов, обратное тому, которое происходит с соответствующими сигналами в самом объекте. Последние результаты, полученные в области построения систем управления многосвязными объектами с использованием обратных моделей, последовательно представлены в работах [7–9].

К сожалению, метод обратного оператора приводит к заметному ухудшению качественных показателей функционирования системы управления многосвязными объектами по мере ухудшения степени обусловленности передаточных матриц таких объектов. В предельном случае, когда эти передаточные матрицы вырождаются, метод обратного оператора становится вообще неприменимым. В этой связи возникают естественные вопросы:

- что произойдет при вырождении с течением времени передаточной матрицы реального объекта, если передаточная матрица расчетной (опорной [6]) модели, по которой строится алгоритм управления, невырождена (хотя, быть может, и плохо обусловлена)?

• как в принципе можно управлять много-связным объектом, имеющим вырожденную передаточную матрицу ?

Ответ на эти вопросы частично дает работа [10], в которой, судя по доступным литературным источникам, впервые получено решение задачи оптимизации систем управления много-связными статическими объектами с вырожденными передаточными матрицами, опирающееся на использование математического аппарата псевдообращения матриц [11]. Предложенный там подход обобщается далее на более широкий класс многосвязных систем управления объектами, включающий в себя статические объекты, передаточные матрицы которых становятся не только вырожденными, но и плохо обусловленными.

Постановка задачи

Рассматривается линейный многосвязный статический объект, функционирующий в дискретном времени $n = 0, 1, 2, \dots$ и описываемый разностным уравнением

$$y_n = Bu_{n-1}. \quad (1)$$

В этом уравнении y_n – N -мерный вектор выходных переменных $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(N)}$, доступных для измерения в каждый n -й дискретный момент времени; u_n – N -мерный вектор управляющих воздействий $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(N)}$;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \quad (2)$$

– матрица размера $N \times N$ с рангом $1 \leq \text{rank } B \leq N$.

Основополагающим предположением относительно матрицы (2) есть то, что она – плохо обусловленная или даже вырожденная, т.е.

$$\det B \approx 0 \quad (3)$$

или

$$\det B = 0, \quad (4)$$

где $\det B$ обозначает определитель матрицы B

Предполагается, что элементы b_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) этой матрицы априори точно известны конструктору системы (идеальный случай). Известно также, что найдется хотя бы одна пара чисел i, j ($i \neq j$) таких, что

$$b_{ij} \neq 0, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}; \quad (5)$$

при этом вполне допускается, что все ее диагональные элементы равны нулю:

$$b_{ii} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Предположение (5) означает, по существу, что объект (1) с передаточной матрицей вида (2) действительно многосвязный. Примечательно, что даже если условие (6) выполняется для всех $i = 1, \dots, N$, то в рамках предположения (3) и (4) в принципе возможна плохая обусловленность или даже вырожденность передаточной матрицы B

Пусть $y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(N)}$ обозначают заданные программой работы системы значения выходных величин $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(N)}$ соответственно. Будем исходить далее из предположения [10], что, по крайней мере, одно из этих заданных значений отлично от нуля. Математически это предположение выражается в форме

$$|y_n^{0(1)}| + \dots + |y_n^{0(N)}| \neq 0 \quad (7)$$

для любого целого $n \in [1, \infty)$ Дополнительные (не очень ограничивающие) предположения состоят в том, что

$$\left. \begin{aligned} \sup_n \|y_n^0\| < \infty, \quad (a) \\ y_n^0 \notin \text{im } B \quad \forall n, \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $y_n^0 = [y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(N)}]^T$ – вектор заданных значений выходных величин, а $\text{im } B$ обозначает так называемый образ матрицы [12, п. 6.24] (здесь и в дальнейшем T – знак транспонирования).

Качество функционирования системы будем оценивать какой-либо нормой вектора

$$e_n = y_n^0 - y_n \quad (9)$$

отклонений $e_n^{(1)} = y_n^{0(1)} - y_n^{(1)}, \dots, e_n^{(N)} = y_n^{0(N)} - y_n^{(N)}$ выходных величин от заданных значений, а также нормой вектора управляющих воздействий u_n

Задача состоит в том, чтобы в условиях (5)–(8) построить управляющую подсистему, позволяющую минимизировать норму $\|u_n\|$ вектора u_n (для случая (3)) и нормы $\|e_n\|$ и $\|u_n\|$ векторов e_n и u_n (для случая (4)). В такой по-

становке ее можно интерпретировать как оптимизационную задачу управления.

Предварительные результаты

Известно [3, 4], что если $\det B \neq 0$ то эффективное решение задачи минимизации нормы $\|e_n\|$ дает метод обратного оператора, приводящий к построению алгоритма управления

$$u_n = u_{n-1} + Ae_n, \quad (10)$$

В этом алгоритме

$$A = B^{-1}, \quad (11)$$

где

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{N1} & \dots & \beta_{NN} \end{pmatrix} \quad (12)$$

обозначает матрицу, обратную матрице B

Реализация алгоритма (10), (11) предусматривает использование обратной модели объекта и дискретного интегратора (сумматора накапливающего типа). Действительно этот алгоритм можно записать так:

$$u_n = \sum_{k=1}^n B^{-1} e_k. \quad (13)$$

Структурная схема системы управления многосвязным объектом по алгоритму (13) изображена на рис. 1.

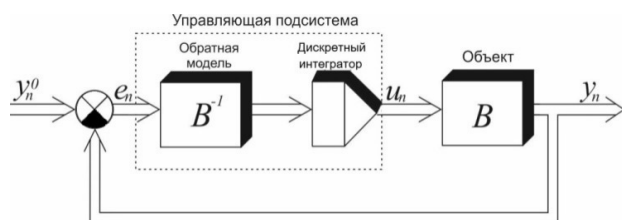


Рис. 1. Структурная схема системы управления, построенной по методу обратного оператора

Динамические свойства системы управления (1), (9), (10), характерны тем, что каждая i -я выходная величина в точности повторяет ее заданное значение с запаздыванием на один такт:

$$y_n^{(i)} = y_{n-1}^{0(i)} \quad (i = 1, \dots, N); \quad (14)$$

при этом вектор управляющих воздействий u_n в силу уравнения (1) объекта и свойства (14) определяется как

$$u_n = B^{-1} y_n^0. \quad (15)$$

На основании (15) получаем оценку сверху нормы вектора управляющих воздействий

$$\sup_n \|u_n\| \leq \|B^{-1}\| \sup_n \|y_n^0\| < \infty, \quad (16)$$

а с учетом выражения (12) и определения вектора y_n^0 – еще и оценки сверху по модулю составляющих этого вектора

$$\sup_n |u_n^{(i)}| \leq \sum_{j=1}^N |\beta_{ij}| \sup_n |y_n^{0(j)}|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Модельный эксперимент 1. Для иллюстрации поведения системы управления многосвязным объектом по методу обратного оператора в условиях, когда $|\det B| \gg 0$, проводилось ее моделирование при

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 6 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае $N = 3$, $\det B = -20$, а

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,9 & -0,4 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,35 & -0,1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\|B^{-1}\|_2 \approx 1,5. \quad (18)$$

В этом соотношении $\|\cdot\|_2$ – так называемая спектральная норма матрицы [см. 12, п. 14.48], обладающая тем свойством, что $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_E$, где $\|\cdot\|_E$ обозначает евклидову норму матрицы [см. 12, п. 14.49].

Программа работы системы управления была задана как произвольным образом выбранная последовательность векторов $\{y_n^0\} = y_0^0, \dots, y_{10}^0$ на интервале $0 \leq n \leq 10$. При таком выборе $\{y_n^0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{n \in [0,10]} |y_n^{0(1)}| &= 8, & \sup_{n \in [0,10]} |y_n^{0(2)}| &= 15, \\ \sup_{n \in [0,10]} |y_n^{0(3)}| &= 20, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sup_{n \in [0,10]} \|y_n^0\| \approx 26,2. \quad (20)$$

Результаты модельного эксперимента представлены на рис. 2, где каждая i -я выходная

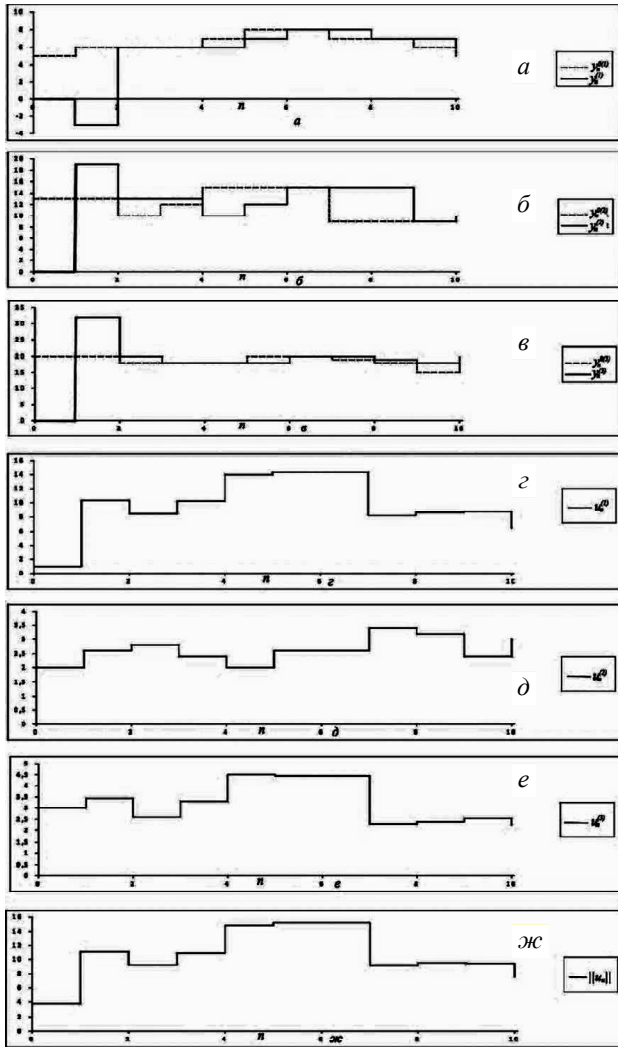


Рис. 2. Динамические процессы в системе (1), (9), (10) в условиях модельного эксперимента 1: а – сигналы $y_n^{(1)}$ и $y_n^{0(1)}$; б – сигналы $y_n^{(2)}$ и $y_n^{0(2)}$; в – сигналы $y_n^{(3)}$ и $y_n^{0(3)}$; з – управляющее воздействие $u_n^{(1)}$; д – управляющее воздействие $u_n^{(2)}$; е – управляющее воздействие $u_n^{(3)}$; ж – норма вектора управляющих воздействий $\|u_n\|$

величина $y_n^{(i)}$ повторяет ее заданное значение $y_{n-1}^{0(i)}$ с запаздыванием на один такт, как и должно быть согласно соотношению (14). При этом оказалось, что

$\sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(1)}| = 14,3$, $\sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(2)}| = 3,4$,
 $\sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(3)}| = 4,45$, (см. рис. 2, з–е), а
 $\sup_{n \in [0,10]} \|u_n\| \approx 15,2$ (см. рис. 2, ж), тогда как соответствующие оценки сверху этих величин, найденных по формулам (16), (17) с учетом (18)–(20), определяются как

$$\sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(1)}| \leq 30,3, \quad \sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(2)}| \leq 8,6,$$

$$\sup_{n \in [0,10]} |u_n^{(3)}| \leq 8,45, \quad \sup_{n \in [0,10]} \|u_n\| \leq 32,7.$$

Итак, в случае вырожденности матрицы B когда $\det B = 0$ метод обратного оператора неприменим. Более того, если в качестве матрицы A , фигурирующей в уравнении (10), взять любую невырожденную матрицу, то система управления (1), (9), (10) становится неустойчивой по состоянию, определяемому парой (u_n, y_n) .

Модельный эксперимент 2. Установленный факт наглядно подтверждается результатами моделирования, проведенного при

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix},$$

когда $\det B = 0$ а $A = \text{diag}(0,02; 0,05; 0,03)$ – диагональная матрица. При проведении этого эксперимента было принято

$$y_n^{0(1)} \equiv 5, y_n^{0(2)} \equiv 12, y_n^{0(3)} \equiv 17;$$

$$u_0^{(1)} = 1, u_0^{(2)} = 2, u_0^{(3)} = 3.$$

Результаты моделирования графически представлены на рис. 3. Оно показало, что после завершения переходного процесса, хотя вектор выходных величин y_n стабилизировался (рис. 3,а), эта стабилизация достигалась ценой неограниченного роста по норме вектора управляющих воздействий y_n (рис. 3,б).

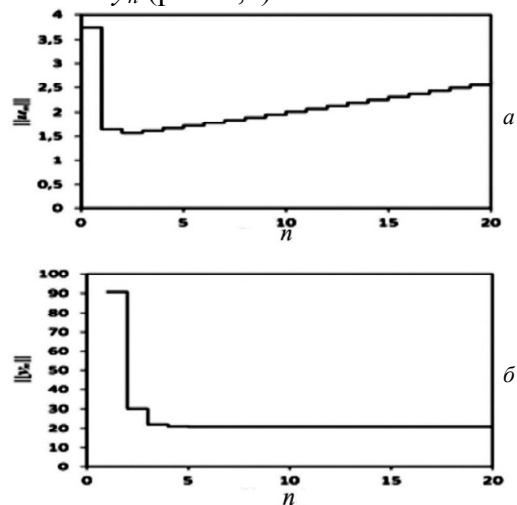


Рис. 3. Динамические процессы в системе (1), (9), (20) в условиях модельного эксперимента 2: а – норма вектора выходных величин $\|y_n\|$; б – норма вектора управляющих воздействий $\|u_n\|$

Таким образом, для обеспечения устойчивости системы (1), (9), (20) требуется, чтобы

$$\det A = 0, \quad (21)$$

т.е. чтобы матрица A в выражении (10) непременно была вырожденной.

Управление многосвязным объектом с вырожденной передаточной матрицей

Предположим, что матрица B в уравнении (1) удовлетворяет условию вырожденности (4). Для управления рассматриваемым объектом в этих условиях предлагается в качестве матрицы A выбрать матрицу в виде

$$A = B^+, \quad (22)$$

где

$$B^+ := \lim_{\delta \rightarrow 0} (B^T B + \delta^2 I)^{-1} B^T \quad (23)$$

– так называемая матрица, псевдообратная матрице B [11, теорема 3.4].

Подстановка (22) в (10) как раз и приводит к алгоритму управления

$$u_n = u_{n-1} + B^+ e_n, \quad (24)$$

реализующему метод псевдообратного оператора.

Приведем уравнение (24) к «суммарной» форме

$$u_n = \sum_{k=1}^n B^+ e_k, \quad (25)$$

подобной (13). Тогда структурную схему системы управления (1), (9), (24) можно представить, как показано на рис. 4.

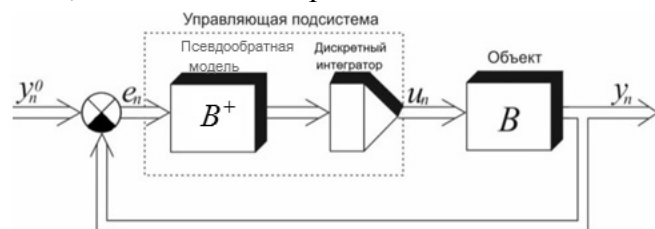


Рис. 4. Структурная схема системы управления, построенной по методу псевдообратного оператора

Исследуем теперь динамические свойства системы управления (1), (9), (24). С этой целью сначала запишем соотношение

$$u_n = u_{n-1} - B^+ y_n + B^+ y_n^0, \quad (26)$$

полученное простой подстановкой выражения (9) в (24). Учитывая далее уравнение (1), приведем (26) к виду

$$u_n = (I - B^+ B) u_{n-1} + B^+ y_n^0, \quad (27)$$

где I – единичная матрица.

В силу известных из [12, п. 6.50] уравнений Пенроуза

$$BB^+ B = B, \quad B^+ BB^+ = B^+ \quad (28)$$

и того факта, что $Q := I - B^+ B$ – идемпотентная матрица [11, п. 3.7.6; 13, с. 208], т.е. $Q^2 = Q$ последовательное использование соотношения (27) окончательно дает

$$u_n = (I - B^+ B) u_0 + B^+ y_n^0. \quad (29)$$

На основании (29) с учетом условия (а), фигурирующего в (8), получаем оценку сверху евклидовой нормы вектора u_n управляющих воздействий в виде

$$\|u_n\| \leq \|I - B^+ B\|_E \|u_0\| + \|B^+\|_E \|y_n^0\| < \infty. \quad (30)$$

Подставляя теперь выражение (29) в (1) и вновь используя уравнение Пенроуза (28), можно записать

$$y_n = BB^+ y_{n-1}^0, \quad (31)$$

откуда с учетом определения (9) вектора e_n находим

$$e_n = y_n^0 - BB^+ y_{n-1}^0. \quad (32)$$

Вводя обозначение $\Delta y_n^0 = y_n^0 - y_{n-1}^0$, преобразуем (32) к виду

$$e_n = (I - BB^+) y_{n-1}^0 + \Delta y_n^0. \quad (33)$$

Оценка сверху евклидовой нормы вектора e_n в силу (33), (8) имеет вид

$$\|e_n\| \leq \|I - BB^+\|_E \|y_{n-1}^0\| + \|\Delta y_n^0\| < \infty. \quad (34)$$

Из выражений (30), (34) следует, что система управления (1), (9), (24) устойчива по состоянию (u_n, y_n) при любой вырожденной матрице $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

Согласно одному результату из [13, с. 39] имеем

$$\|I - B^+ B\|_E = \min_{A \in \mathbb{R}^{N \times N}} \|I - AB\|_E. \quad (35)$$

На основании (34) с учетом замечательного свойства (35) заключаем, что выбор матрицы A именно в виде (22) позволяет минимизировать норму вектора отклонений выходных величин от заданных значений. Тем самым метод псевдообратного оператора, реализующий алгоритм (24), позволяет решить поставленную оптимизационную задачу.

Модельный эксперимент 3. Для проверки работоспособности и эффективности метода псевдообратного оператора проведена серия модельных экспериментов с системой (1), (9), (24). В частности, принято

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1/588 & 4/588 & 5/588 \\ 2/588 & 8/588 & 10/588 \\ 3/588 & 12/588 & 15/588 \end{pmatrix}.$$

Динамические процессы, показывающие, что построенная система работоспособна и довольно эффективна, иллюстрируют графики, приведенные на рис. 5.

Управление многосвязным объектом с плохо обусловленной передаточной матрицей

Пусть теперь матрица B удовлетворяет не условию (4), а условию (3), т.е. B – плохо обусловленная матрица. В этом случае

$$\text{cond } B \gg 1, \quad (36)$$

где $\text{cond } B := \|B\| \|B^{-1}\|$ – так называемое число обусловленности невырожденной матрицы B [см. 12, п. 16.4]. В этом случае управление по методу обратного оператора в принципе допустимо. Однако реализация этого метода в условиях (3) приводит к формированию вектора управляющих воздействий, норма которого может оказаться недопустимо большой. Действительно, на основании (15) имеем

$$\|u_n\| \leq \|B^{-1}\| \|y_n^0\|. \quad (37)$$

А это значит, что при плохой обусловленности матрицы B величина $\|u_n\|$ в силу (37) в принципе может принимать сколь угодно большое значение, зависящее в конечном счете от числа обусловленности $\text{cond } B$ матрицы B :

$$\sup \|u_n\| \rightarrow \infty \text{ при } \text{cond } B \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Для устранения недостатка, выраженного в форме (38), предложено строить алгоритм

$$u_n = u_{n-1} + \tilde{B}_*^+ e_n, \quad (39)$$

где

$$\tilde{B}_* = \arg \inf_{\tilde{B}: \det \tilde{B} = 0} \|B - \tilde{B}\| \quad (40)$$

– вырожденная матрица, «ближайшая» к матрице B .

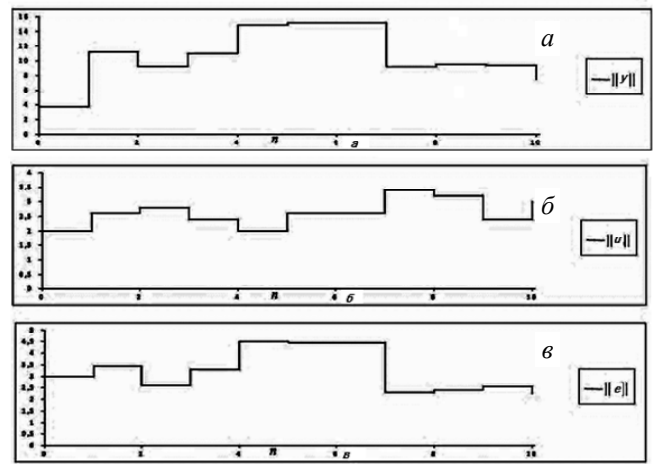


Рис. 5. Динамические процессы в системе (1), (9), (24) в условиях рассматриваемого эксперимента 3: a – норма вектора выходных величин $\|y_n\|$; b – норма вектора управляющих воздействий $\|u_n\|$; c – норма вектора $\|e_n\|$

Как и в случае вырожденности матрицы B , алгоритм (39), (40), получаемый прямой заменой $A = \tilde{B}_*^+$ в (10), также основан на методе псевдообратного оператора. Но он отличается от алгоритма (24) тем, что для его реализации управляющая подсистема должна содержать не псевдообратную модель, а другую, которую уместно назвать «квазипсевдообратной» (рис. 6).

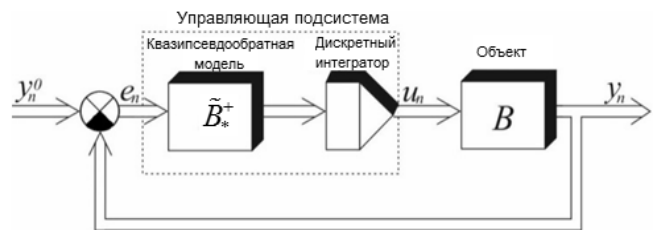


Рис. 6. Структурная схема системы управления, построенной по методу псевдообратного оператора

Используя аппарат теории псевдообращения матриц [11], после ряда математических преобразований заключаем, что оценка сверху нормы управляющих воздействий в системе управления (1), (9), (38) с учетом условия (а), фигурирующего в (8), будет определяться как

$$\|u_n\| \leq \|\tilde{Q}^n\| \|u_0\| +$$

$$+ \left(1 - \|\tilde{B}_*^+ \Delta\|\right)^{-1} \|\tilde{B}_*^+\| \sup_n \|y_n^0\| < \infty, \quad (41)$$

если только матрица B удовлетворяет требованию

$$\|\tilde{B}_*^+ \Delta\| < 1. \quad (42)$$

Здесь

$$\Delta := B - \tilde{B}_*, \quad (43)$$

а
$$\tilde{Q} := I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_* - \tilde{B}_*^+ \Delta.$$

Оценка (41) позволяет заключить, что требование (42), по существу вытекающее из (36), достаточно для обеспечения устойчивости по состоянию (u_n, y_n) рассматриваемой системы управления. А это с учетом (43) в конечном счете означает, что лишь близость матрицы B к матрице \tilde{B}_* , определяемой выражением (40), гарантирует такую устойчивость.

Величина $\|\Delta\|$ косвенно указывает на степень обусловленности матрицы B : ведь в силу (43) $\|\Delta\|$ тем меньше, чем «ближе» матрица B к вырожденной матрице \tilde{B}_* . Установленный факт означает, что оценка сверху нормы $\|u_n\|$ управляющих воздействий, определяемая выражением (41), остается ограниченной при $\|\Delta\| \rightarrow 0$ (в отличие от оценки сверху нормы вектора управляющих воздействий, которая определяется выражением (37)).

Модельные эксперименты 4 и 5. В эксперименте 4 в качестве матрицы A выбрана матрица из условия (11) как

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 49 & 0,5 & -10 \\ 4 & -1 & 0 \\ -25 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проведению модельного эксперимента 5 предшествовало определение вырожденной матрицы \tilde{B}_* из условия (40). При этом оказалось, что

$$\tilde{B}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 2,5 & 10 \end{pmatrix}$$

($\det \tilde{B}_* = 0$). Отсюда найдена матрица

$$A = (1/220,5) \tilde{B}_*^T.$$

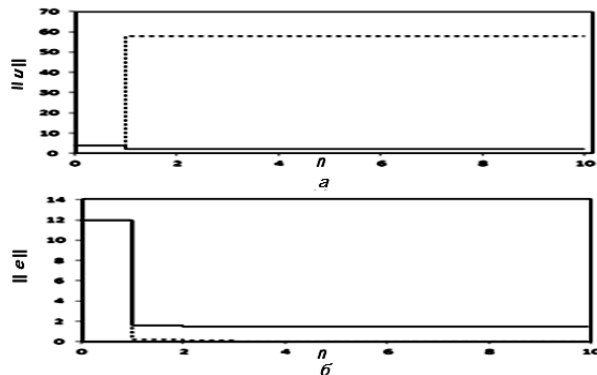


Рис. 7. Процессы управления в модельных экспериментах 4 (пунктирная линия) и 5 (сплошная линия)

Результаты моделирования системы (1), (9), (10) при выборе матрицы A по методам обратного и псевдообратного операторов представлены на рис. 7. Они показывают, что в эксперименте 4 норма вектора управляющих воздействий $\|u_n\|$ заметно меньше в сравнении с экспериментом 5; впрочем такое уменьшение $\|u_n\|$ достигается путем определенного увеличения нормы $\|e_n\|$ вектора отклонений выходных величин от заданных значений.

Заключение. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что в рамках предложенного достаточно общего метода псевдообратного оператора удастся получить эффективное решение задачи управления в дискретном времени линейными многосвязными статическими объектами, имеющими плохо обусловленные и даже вырожденные передаточные матрицы. В практическом плане этот факт позволяет существенно расширить область автоматизации управления техническими системами.

1. Жук К.Д., Пятенко Т.Г., Скурихин В.И. Вопросы синтеза управляющих моделей в многосвязных автоматических системах // Тр. сем. «Методы мат. моделирования и теория электр. цепей». – 1964. – С. 3–17.
2. Пухов Г.Е., Жук К.Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. – Киев: Наук. думка, 1966. – 218 с.
3. Скурихин В.И., Житецкий Л.С., Проценко Н.М. Итеративно-табличные автоматы. – Киев: Наук. думка, 1977. – 165 с.
4. Об оценке допустимой неадекватности модели объекта при построении системы управления технологическим процессом по методу обратного оператора / В.И. Скурихин, Н.М. Проценко, Л.С. Житецкий и др. // Электронное моделирование. – 1982. – № 6. – С. 11–16.

Окончание на стр. 29

5. Ли Т.Г., Адамс Г.Э., Гейнз У.М. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация. – М.: Сов. радио, 1972. – 312 с.
6. Катковник В.Я. Градиентные законы управления в задачах стабилизации многомерных систем управления // Теория и методы построения систем многосвязного регулирования. – М.: Наука, 1973. – С. 84–93.
7. Lyubchik L.M., Kostenko Yu.T. The output control of multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances: the inverse model approach // Proc. 2nd Europ. Control Conf. – 1993. – 2. – P. 1160–1165.
8. Костенко Ю.Т., Любчик Л.М. Системы управления с динамическими моделями. – Харьков: Основа, 1996. – 212 с.
9. Lyubchik L.M. Disturbance rejection in linear discrete multivariable systems: inverse model approach // Prep. 18th IFAC World Congr. (Milano, Italy, Aug. 28 – Sept. 2, 2011). – Milano, 2011. – P. 7921–7926.
10. Скурихин В.И., Житецкий Л.С., Соловчук К.Ю. Метод псевдообратного оператора в задаче оптимального управления многосвязным объектом с вырожденной передаточной матрицей // Матеріали ХІХ міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика–2012», (м. Київ, 26–28 вер. 2012 р.). – К.: НУХТ, 2012. – С. 63–64.
11. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
12. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 578 с.

Поступила 06.03.2013

Тел. для справок: +38 044 526-1154 (Киев)

© В.И. Скурихин, Л.С. Житецкий, К.Ю. Соловчук, 2013

