УДК 519.1

Агаи Аг Гамиш Якуб, Донец Г.А.

О некоторых аспектах классической задачи Штейнера

Рассмотрена классическая задача Штейнера на плоскости. Для определения оптимальной точки, минимизирующей сумму расстояний к заданным точкам многоугольника, необходимо решить специальную систему тригонометрических уравнений. Приведены решения системы для треугольника и четырехугольника.

The classic Steiner problem on the plane is discussed here. To find a point, the sum of the distances from which to given points of a polygon is minimal, it is necessary to solve specific system of trigonometric equations. The system solutions in the case of triangle and quadrangle are given.

Розглянуто класичну задачу Штейнера на площині. Для визначення оптимальної точки, що мінімізує суму відстаней до заданих точок багатокутника, необхідно розв'язати спеціальну систему тригонометричних рівнянь. Наведено розв'язання системи для трикутників та чотирикутників.

Введение. Современная постановка задачи Штейнера, как известно, отличается от постановки, решаемой немецким геометром Я. Штейнером. Его постановка, как общая проблема Ферма, формулируется следующим образом.

На плоскости заданы n точек $P_1, P_2, \dots, P_n$. Необходимо найти такую точку O, чтобы сумма расстояний $|P_1,O| + |P_2,O| + |P_3,O| + \ldots + |PO_n|$ была минимальной.

Эту задачу для трех точек сформулировал П. Ферма в начале XVII в., и до Штейнера она была уже решена. В постановке Штейнера для $n > 4$ она не решена в аналитическом виде до сих пор. В общем случае, когда точки расположены произвольно, задача настолько сложна, что до сих пор кроме тривиальных случаев, о ней почти не было публикаций.

Постановка классической задачи Штейнера

В работе [1] найдена общая система тригонометрических уравнений, которой должна удовлетворять искомая точка, если заданные точки образуют выпуклый многоугольник (рис. 1).

Пусть $O(x, y)$ – искомая точка. Покажем, что она не может находиться вне многоугольника $P_1, P_2, \dots, P_n$. Соединим ее с вершинами многоугольника и проведем отрезки P_1K и P_2L параллельно оси абсцисс. Обозначим углы наклона отрезков P_iO ($i = 1, 2, \dots, n$) к оси абсцисс β_i, а углы P_iOP_{i+1} – α_i (для индексов $n + 1 \equiv 1$). По построению $\beta_2 = \beta_1 + \alpha_1$, и в общем случае $\beta_i = \beta_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k$ ($i > 2$). По условию задачи точка O дает минимум функции двух переменных

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2} . \qquad (1)$$

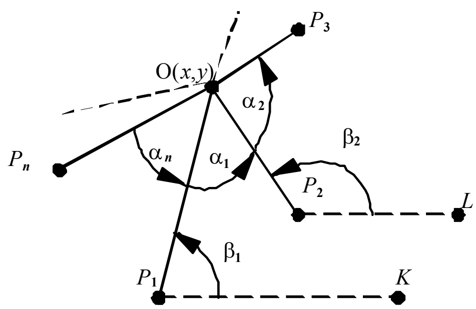

Рис. 1.

Найдем необходимые условия экстремума функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{|P_iO|} = 0 ,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y - y_i}{|P_iO|} = 0 . \qquad (2)$$

Учитывая обозначения, можно записать равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \cos \beta_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sin \beta_i = 0 \qquad (3)$$

или

$$\cos\beta_1+\cos(\beta_1+\alpha_1)+\cos(\beta_1+\alpha_1+\alpha_2)+...$$
$$...+\cos(\beta_1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i)=0,$$
$$\sin\beta_1+\sin(\beta_1+\alpha_1)+\sin(\beta_1+\alpha_1+\alpha_2)+... \quad (4)$$
$$...+\sin(\beta_1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i)=0.$$

Раскрыв каждое сложное выражение, получим

$$\cos\beta_1+(\cos\beta_1\cos\alpha_1-\sin\beta_1\sin\alpha_1)+...$$
$$\ldots+\left[\cos\beta_1\cos\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)-\sin\beta_1\sin\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\right]=0,$$
$$\sin\beta_1+(\sin\beta_1\cos\alpha_1-\cos\beta_1\sin\alpha_1)+...$$
$$\ldots+\left[\sin\beta_1\cos\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)-\cos\beta_1\sin\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\right]=0.$$

Обозначим $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=s_k$. Группируя определенные слагаемые, придем к виду

$$\cos\beta_1\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\cos s_i\right)-\sin\beta_1\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sin s_i\right)=0,$$
$$\sin\beta_1\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\cos s_i\right)+\cos\beta_1\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sin s_i\right)=0.$$

Поскольку определитель этой системы относительно переменных, представленных в скобках, равен $\cos^2\beta_1+\sin^2\beta_1=1$, а правые части уравнений равны нулю, это может быть только при одновременном выполнении условий:

$$\begin{aligned}&1+\cos\alpha_1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)+...\\&\ldots+\cos(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0,\\&\sin\alpha_1+\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\ldots\\&\ldots+\sin(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0.\end{aligned} \quad (5)$$

Назовем эту систему основной тригонометрической системой. Из нее можно вывести несколько вспомогательных равенств. Если перенести единицу первого уравнения в правую часть и выделить в разложении формул аргумент α_1, то получим соотношения:

$$\cos\alpha_1[1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1})]-$$
$$-\sin\alpha_1[\sin\alpha_2+\ldots+\sin(\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})]=-1,$$
$$\sin\alpha_1[1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1})]+$$
$$+\cos\alpha_1[\sin\alpha_2+\ldots+\sin(\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})]=0.$$

Решая эту систему относительно выражений в квадратных скобках (а определитель системы так же, как и раньше, равен единице), получим

$$1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos(\alpha_2+\alpha_3)+\ldots$$
$$\ldots+\cos(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1})=0,$$
$$-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin(\alpha_2+\alpha_3)+\ldots$$
$$\ldots+\sin(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1})=0.$$

Если перенести в правую часть первого уравнения $1+\cos\alpha_1$, а $-\sin\alpha_1$ – в правую часть второго уравнения, то можно применить тот же прием и для аргумента α_2. В результате получим две системы относительно $\cos\alpha_1$ и $\sin\alpha_1$ как следствие основной тригонометрической системы (5). Назовем их первой вспомогательной системой (относительно косинусов) и второй вспомогательной системой (относительно синусов).

$$\left.\begin{aligned}&1+\cos\alpha_1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)+...\\&\ldots+\cos(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0,\\&1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos(\alpha_2+\alpha_3)+...\\&\ldots+\cos(\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0,\\&1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+...\\&\ldots+\cos(\alpha_3+...+\alpha_{n-1})=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&1+\cos(\alpha_1+...+\alpha_{n-1})+\cos(\alpha_2+...+\alpha_{n-1})+\\&+\cos(\alpha_3+...+\alpha_{n-1})+...+\cos\alpha_{n-1}=0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin\alpha_1+\sin(\alpha_1+\alpha_2)+...\\&\ldots+\sin(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0,\\&-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin(\alpha_2+\alpha_3)+...\\&\ldots+\sin(\alpha_2+...+\alpha_{n-1})=0,\\&-\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+...\\&\ldots+\sin(\alpha_3+...+\alpha_{n-1})=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&-\sin(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1})-\\&-\sin(\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{n-1})-...-\sin\alpha_{n-1}=0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Для случая $n = 3$ получается решение, которое было получено геометрическим путем. Действительно система (6) примет вид

$$\begin{aligned}
&1+\cos\alpha_1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)=0,\\
&1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2 \qquad\quad =0,\\
&1+\cos\alpha_2+\cos(\alpha_1+\alpha_2)=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}$, что дает $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120°$. Очевидно, что это решение возможно только для треугольника, у которого углы меньше 120°, иначе точка решения не может быть внутри треугольника, что противоречит начальному условию.

Рассмотрим теперь случай $n = 4$. Система (6) примет вид

$$\begin{aligned}
&1+\cos\alpha_1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0,\\
&1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos(\alpha_2+\alpha_3) \qquad\quad =0,\\
&1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3 \qquad\quad =0,\\
&1+\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\cos(\alpha_2+\alpha_3)+\cos\alpha_3=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если из суммы первых двух уравнений вычесть остальные, то получим $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_3$. Так как $\alpha_1 \le \pi$ (иначе точка O будет находиться вне четырехугольника), то это может быть при $\alpha_1 = \alpha_3$. Складывая первое и четвертое уравнения и, вычитая второе и третье уравнения, получим новый результат $\cos\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_3)$, что может быть только при условии $\alpha_2 = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_4$. Таким образом, оптимальная точка находится на пересечении диагоналей P_1P_3 и P_2P_4. Это решение можно найти и путем геометрических построений (рис. 2).

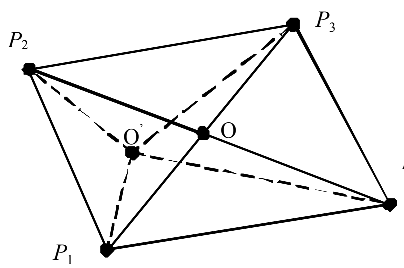

Рис. 2

Если в качестве решения выбрать иную точку O', то, по правилу треугольника,

$|P_1,O'| + |P_3,O'| \ge |P_1,P_3|$ и $|P_1,O'| + |P_4,O'| \ge |P_2,P_4|$. Это означает, что $|P_1,P_3| + |P_2,P_4|$ образуют наименьшую сумму расстояний.

Расчет параметров дерева Штейнера для трех точек

Рассмотрим детальнее процесс определения оптимальной точки для заданных трех точек, или треугольника ABC, в котором все углы меньше 120° (рис. 3). Для обозначения новых вершин и отрезков воспользуемся так называемой нотацией Кокейна [2].

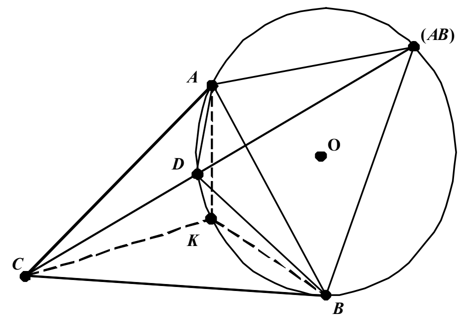

Рис. 3

Построим на любой стороне ΔABC (например, на AB) равносторонний треугольник с третьей вершиной (AB) так, чтобы вершины A, B и (AB) следовали против часовой стрелки. Опишем вокруг этого треугольника окружность с центром в точке O**.** Так как искомая точка образует с вершинами A и B угол в 120°, то она должна находиться на дуге окружности AB. Пусть это будет точка K**.** По теореме Птолемея $|AB|\cdot|(AB)K| = |BK|\cdot|A(AB)| + |AK|\cdot|B(AB)|$. Поскольку $\Delta AB(AB)$ **–** равносторонний, то это выражение можно сократить и тогда

$$|K(AB)| = |AK| + |KB|. \tag{10}$$

Так, где бы ни располагалась точка K на дуге AB, отрезок $K(AB)$ – эквивалентен отрезкам AK и KB. Соединив точку K с точкой С, получим ломаную из двух отрезков CK и $K(AB)$, которые вместе дают искомую сумму расстояний. Минимальное значение эта сумма примет, если эти две ломаные будут представлять прямую. Таким образом, оптимальная точка D находится на пересечении окружности и отрезка $C(AB)$. Этот отрезок называется сегментом, или осью Симпсона [3]. Если сделать аналогичное построение на стороне AC, то получим ось Симпсона $B(CA)$; аналогично строится и третья ось Симпсона $A(BC)$. Очевидно, что все они имеют одинаковую длину, так как точка D – единственная. Это означает, что если на трех сторонах ΔABC построить равносторонние треугольники и описать ось вокруг их окружности, то все они пересекутся в единственной точке D.

Если соединить вершины треугольника без использования дополнительной точки D по сторонам треугольника, то общая длина отрезков будет больше. Это видно на рис. 3, где $\left|C(AB)\right| < \left|AC\right| + \left|A(AB)\right| = \left|AC\right| + \left|AB\right|$, или $\left|C(AB)\right| < \left|BC\right| + \left|B(AB)\right| = \left|BC\right| + \left|AB\right|$. Так как все три оси Симпсона одинаковы по длине, то аналогично $\left|A(BC)\right| = \left|C(AB)\right| < \left|AC\right| + \left|BC\right|$.

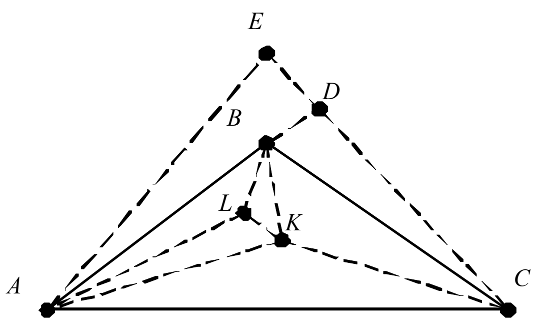

Рис. 4

Теперь рассмотрим случай, когда один из углов треугольника равен или больше 120°. На рис. 4 это угол при вершине B.

В этом случае точка, минимизирующая сумму расстояний ко всем вершинам ΔABC, не может лежать внутри треугольника (например, точка K). Покажем, что можно построить соединение, меньшее по длине, чем $\left|AK\right| + \left|BK\right| + \left|CK\right|$. В данном случае $\angle AKC \geq \angle ABC \geq 120°$. Тогда один из углов AKB или BKC меньше 120° (например, $\angle AKB$), и в ΔAKB все углы меньше 120°. Как было показано, внутри этого треугольника найдется точка L, для которой $\left|AL\right| + \left|LK\right| + \left|BL\right| < \left|\mathrm{AK}\right| + \left|\mathrm{BK}\right|$.

Аналогично, минимизирующая точка не может лежать вне ΔABC (например, точка E), поскольку $|AE| + |ED| \geq |AD| + |DC| \geq |AB| + |BC|$. Поэтому эта точка – единственная вершина B.

Если применить построения Штейнера для стороны AC, то вершина B окажется внутри окружности (рис. 5,*а*). В этом случае точка Штейнера уже не решает задачу минимизации суммы расстояний к вершинам треугольника, как было показано ранее. Курант и Роббинс [4] предположили, что она минимизирует выражение $R = |AD| + |CD| - |BD|$.

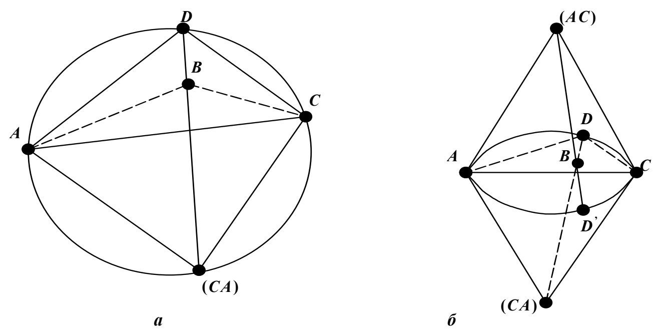

Рис. 5

Как показано в [3], это не так. Если построить симметрическую точку (AC) и провести через вершину B отрезок $(AC)D'$, то увидим, что $|(AC)B| < (CA)B$ (рис. 5,*б*). Но $|(CA)B| = |AD| + |DC| - |BD|$. Так, последнее построение дает меньшее значение для R. Однако и оно не есть решением. Наименьшее значение R получается, когда точка D совпадает с одной из вершин A (если $|BC| > |AC|$) или C (если $|AC| > |BC|$). Действительно, для построения на рис. 5,*б* справедливо $|AD'| + |CD'| - |BD'| = |(AC)B| \geq |AC| - |AB|$, так как $|AC| = |A(AC)|$ и это следует из правила треугольника $|AB| + |B(AC)| \geq |A(AC)|$.

Определим теперь координаты точек (AB) и D (см. рис. 3). Обозначим $\angle AB$ – угол наклона отрезка AB к оси абсцисс, аналогично $\angle A(AB)$ – угол наклона отрезка $A(AB)$. Тогда $\sin\angle A(AB) = \sin(\angle AB + 60°) = \sin\angle AB \cdot \cos 60° + \cos\angle AB \cdot \sin 60°$, или $\dfrac{y_{(AB)} - y_A}{\left|A(AB)\right|} = \dfrac{y_B - y_A}{\left|AB\right|} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_B - x_A}{\left|AB\right|} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Составив аналогичное выражение для $\cos\angle A(AB)$, получим соотношение, в котором содержится координата $x_{(AB)}$. В результате получим окончательные формулы:

$$x_{(AB)} = \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_A - y_B),$$
$$y_{(AB)} = \frac{y_A + y_B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_B - x_A). \quad (11)$$

Теперь найдем координаты центра окружности, описанной вокруг $\Delta AB(AB)$. Заметим, что радиус окружности $r = \frac{|AB|}{\sqrt{3}}$. Тогда $\sin\angle AO =$ $=\sin(\angle AB + 30°) = \sin\angle AB \cdot \cos 30° + \cos\angle AB \cdot \sin 30°$. Подставив соответствующие значения, получим

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}(y_A - y_B),$$
$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x_B - x_A). \quad (12)$$

Чтобы найти координаты оптимальной точки D, представим их в виде

$$x_D = x_{(AB)} + \lambda(x_C - x_{(AB)}),$$
$$y_D = y_{(AB)} + \lambda(y_C - y_{(AB)}), \quad (13)$$

где $\lambda = |(AB)D|/|(AB)C|$. Этот коэффициент можно найти из соотношения $\lambda = \left(\overrightarrow{O(AB)} \cdot \overrightarrow{C(AB)}\right)/$ $/\left|(AB)C\right|^2$. Подставив соответствующие значения в знаменатель и произведя необходимые, довольно громоздкие, преобразования, получим выражение

$$\left|(AB)C\right|^2 = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2}{2} - \sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}.$$

Отметим, что указанный детерминант равен удвоенной площади ΔABC с обратным знаком, или $-2S$.

В результате всех преобразований выражения (13) примут окончательный вид:

$$x_D = \frac{|AB|^2\left(\sqrt{3}x_C + y_B - y_A\right) + |BC|^2\left(\sqrt{3}x_A + y_C - y_B\right)}{\sqrt{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right) + 12S} +$$
$$+ \frac{|AC|^2\left(\sqrt{3}x_B + y_A - y_C\right) + 4\left(x_A + x_B + x_C\right)S}{\sqrt{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right) + 12S},$$
$$y_D = \frac{|AB|^2\left(\sqrt{3}y_C + x_B - x_A\right) + |BC|^2\left(\sqrt{3}y_A + x_C - x_B\right)}{\sqrt{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right) + 12S} +$$
$$+ \frac{|AC|^2\left(\sqrt{3}y_B + x_A - x_C\right) + 4\left(y_A + y_B + y_C\right)S}{\sqrt{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right) + 12S}. \quad (14)$$

Заметим, что в знаменателе выражение равно $2\sqrt{3}\left|C(AB)\right|^2$.

Заключение. Теперь можно конкретизировать постановку классической задачи Штейнера. На плоскости задано множество точек $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$. Необходимо соединить их кратчайшим деревом, используя дополнительные точки $S = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ $(0 \le k \le n-2)$, в которых сходятся три отрезка и углы между которыми равны 120°.

1. *Maculan N*. The Steiner problem in graphs // Surv. comb.Optimiz. – Amsterdam e.a., 1987. – P. 185–212. Место хранения ГПНТБ СССР.
2. *Cockayne E.J*. On the Steiner problem: Doct.diss: – Univ.Brit.Columbia. – 1967.
3. *White K*., *M. Farber M*., *Pulleyblank W*. Steiner trees, connected domination and strongly chordal graphs // Networks. – 1985. – № 15. – P. 109–124.
4. *Курант Р*., *Роббинс Г*. Что такое математика? – М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. – 665 с.

Поступила 25.01.2013

Тел. для справок: +38 044 526-2188 (Киев)
E-mail: *j_donets@mail.ru*