УДК 519.24.001.57

А.А. Свинаренко, *к.ф.-м.н.,* **Д.Е. Сухарев**, *к.ф.-м.н.*
Одесский государственный экологический университет

МНОГОФАКТОРНЫЙ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЧНОГО СТОКА

На основе мультифрактального формализма с использованием алгоритма Грассбергера-Прокаччиа проведено моделирование характеристик речного стока на примере р. Дунай и оценены величины фрактальных размерностей.
Ключевые слова*: метод мультифрактального моделирования, речной сток, фрактальная размерность.*

Введение. В последнее десятилетие в различных областях геофизики, в том числе, и в гидрологии, активно применяются методы моделирования характеристик речного стока, базирующиеся на фрактальных и мультифрактальных моделях (см., напр., [1-16]). Искомые модели в отличие от классических гидродинамических или вероятностно-стохастических методов в приложении к гидрологическим задачам обладают целым рядом достоинств, в том числе, достаточно высокой степенью корректности и прогнозируемости. Хотя, разумеется, вопросы точности и корректности использования мультифрактальных моделей по-прежнему остаются в центре многочисленных исследований во многом из-за сложности проблематики прогноза эволюции динамических систем с внутренними взаимодействиями стохастического типа.

Разумеется, понятие динамической системы в математическом смысле слова является основной задачей моделирования, а значит, и предсказания эволюции состояния во времени. Задача предсказания будущего по известному настоящему является основной задачей науки вообще и нелинейной динамики в частности. Одним из замечательных свойств нелинейных систем является смена режимов их функционирования при изменении управляющих параметров. Уместно напомнить, что динамические системы могут демонстрировать бифуркации и катастрофы. Один режим теряет устойчивость, гибнет, ему на смену приходит другой и т.д. На языке математики описание этих свойств динамических систем дается теорией устойчивости и бифуркаций. В нелинейных динамических системах, как было установлено сравнительно недавно, возможны режимы колебаний, близкие по характеристикам к случайным процессам, включая явление детерминированного хаоса. Далее, естественно водится понятие аттрактора нелинейной диссипативной динамической системы как математического образа установившегося режима ее функционирования. Если периодическим автоколебаниям в классической теории отвечает математический образ в виде предельного цикла Пуанкаре, то общее понятие аттрактора служит образом любого режима установившихся колебаний. Если динамическая система является нелинейной, применение стандартного преобразования Фурье не даст, скорее всего, какого-либо удовлетворительного результата, как в случае линейной системы. Связано это с тем, что процессы (примеры гидрологических процессов относятся к весьма ярким примерам), приводящие к хаотическому режиму, являются фундаментально многомерными. Поэтому необходимо восстанавливать фазовое пространство системы, как можно лучше используя информацию, содержащуюся в характеристике системы, описываемой величиной, скажем, $s(n)$. Этот процесс реконструкции приведет некоему набору d-мерных векторов $\mathbf{y}(n)$, которые заменят наблюденные скалярные данные, и заключается в сочетании динамических концепций о нелинейных системах, как о генераторах информации, и геометрических представлений о том, как обнаружить аттрактор при помощи координат, определенных на основе их информационно-теоретического содержания.

Цель настоящей работы – долгосрочное моделирование характеристик речного стока на примере р. Дунай на основе мультифрактального формализма [13-16] и оценка величин фрактальных размерностей для годового, максимального и минимального расходов (данные для р. Дунай (станция Девин-Братислава) в период с 1 по 2001гг.).

Мультифрактальный подход. Поскольку искомый подход детально излагался в ряде известных публикаций (см., напр.[1-6]), здесь мы ограничимся лишь изложением основных блоков нашего метода моделирования, основывающегося на работах [4,13-16] (пакет “Geomath”).

Для выявления фрактальных особенностей во временных рядах флуктуаций речного стока ранее обычно используется классическая версия мультифрактального формализма [1]. Фундаментальной характеристикой является мультифрактальный спектр. Для однородных фракталов скейлинг описывается одной фрактальной размерностью. Неоднородные объекты обычно характеризуются спектром $D(q)$ фрактальных размерностей (фрактальная размерность равна $D(0)$, а функция $D(q)$, собственно говоря, и трактуется как мультифрактальный спектр). С математической точки зрения, ключевая задача мультифрактального формализма (вычисления мультифрактального спектра) сводится к нахождению сингулярного спектра $f(\alpha)$ меры μ.. Последний ассоциирует хаусдорфову размерность с сингулярным показателем α, что позволяет вычислить степень сингулярности $N_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)}$, где $N_\alpha(\varepsilon)$ есть число гиперкубов, необходимых для того, чтобы охватить меру и ε-размер каждого гиперкуба. Функция распределения Z извлекается из этого спектра

$$Z(q,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\mu_i^q(\varepsilon)\approx\varepsilon^{\tau(q)} \quad \text{for} \quad \varepsilon\to 0. \tag{1}$$

Здесь $\tau(q)$ есть спектр, который может быть получен путем преобразованием Лежандра сингулярного спектра $f(\alpha)$.

Далее элементарно из спектра $\tau(q)$ может быть получен спектр обобщенных фрактальных размерностей

$$D_q=\frac{\tau(q)}{(q-1)}. \tag{2}$$

Более детально численные аспекты определения спектра на основе классического фрактального формализма изложены, например, в [1-4].

Более эффективным, на наш взгляд, прежде всего, в вычислительном отношении оказывается метод Грассбергера-Прокаччиа [6], называемый также методом корреляционной размерности. В последние годы в ряде работ этот подход с успехом был использован при решении целого ряда задач гидрометеорологии, геофизики, квантовой геометрии и т.д. [1-8,15-20]. Заметим, что этот подход оказывается крайне удобным при решении задачи прогнозирования эволюции динамической системы, на одном из этапров решения окторой возникает задача восстановления фазового пространства. Задача определения размерности вложения предполагает восстановление настолько большого Евклидова пространства R^d, чтобы весь ряд точек размерности d_A мог быть развернут без какой-либо неопределенности. Согласно положениям теоремы вложения важно иметь такую размерность d_E, чтобы она была больше d_A, тогда как выбор $d_E < d_A$ неприемлем в любом случае. Другими словами, не нужно искать размерность d_A, а можно взять какую-то заведомо большую размерность d_E. Например, в случае низкоразмерного хаоса можно априори задать размерность вложения 10 или даже 15, что с точки зрения математики будет вполне приемлемо. Однако при этом возникают две проблемы. Во-первых, большинство данных требуют перебора вариантов при компьютерных расчетах в пространстве R^d, и машинное время экспоненциально возрастает в зависимости от размерности вложения. Во-вторых, в присутствии шума или других высокочастотных компонентов во временных рядах, в «дополнительные» размерности, не обусловленные динамикой системы, попадают исключительно высокочастотные составляющие сигнала. Поэтому нужно отыскать именно размерность d_A. Хотя методик, позволяющих восстановить размерность аттрактора достаточно много (см., например, [2-4]), одной из наиболее широко используемых при исследовании наличия хаоса во временных рядах является именно метод Грассбергера-Прокаччиа [6]. Этот метод использует корреляционный интеграл функции $C(r)$ для того, чтобы найти различия между хаотическими и стохастическими системами, и определяемый как

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N(n-1)} \sum_{\substack{i,j \\ (1\le i<j\le N)}} H\left(r - \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|\right), \qquad (3)$$

где H – ступенчатая функция Хевисайда, $H(u) = 1$ для $u > 0$ и $H(u) = 0$ для $u \le 0$;
r – радиус сферы с центром в $\mathbf{y}_i$ или $\mathbf{y}_j$;
N – длина временного ряда.

Если временной ряд характеризуется аттрактором, то корреляционный интеграл $C(r)$ соотносится с радиусом r посредством

$$d_2 = \lim_{\substack{r\to 0 \\ N\to\infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \qquad (4)$$

где d_2 – корреляционная размерность, которую можно определить как наклон линии в координатах $\log C(r)$ и $\log r$ посредством среднеквадратического подбора прямой линии в некотором диапазоне r, называемом диапазоном масштабирования.

Если корреляционная размерность достигает насыщения на некотором значении размерности вложения, то динамика системы в целом рассматривается как хаотическая. Значение корреляционной размерности, при котором она достигает насыщения, определяется как корреляционная размерность аттрактора (d_A). Ближайшее целое число большее, чем d_2, дает оптимальную (необходимую) размерность вложения d_E для реконструкции фазового пространства или количество переменных, необходимых для моделирования динамики системы. С другой стороны, если корреляционная размерность неограниченно увеличивается с ростом размерности вложения, динамика системы рассматривается как стохастическая. Фактически, искомый алгоритм позволяет непосредственно получить данные о фрактальных свойствах системы, а также крайне важную информацию о поведении динамических переменных системы. В настоящее время имеется целый ряд численных кодов для мультифрактального моделирования на PC (см., напр., [1-4]).

Результаты расчета и выводы. Нами выполнен мультифрактальный анализ данных по среднегодовому, максимальному и минимальному расходам (данные для р. Дунай (станция Девин-Братислава) в период с 1 по 2001гг.). Детальное описание искомого участка дано в работе [11]. Использован числовой ряд значений расходов, полученных на основе модели ARIMA (p,d,q)x(P,D,Q)$_L$ Института гидрологии Академии наук Словакии [12]. Соответствующие модельные данные по среднегодовому, максимальному и минимальному расходам для р. Дунай (станция Девин-Братислава) в период с 1 по 2001гг.) представлены на рис.1.

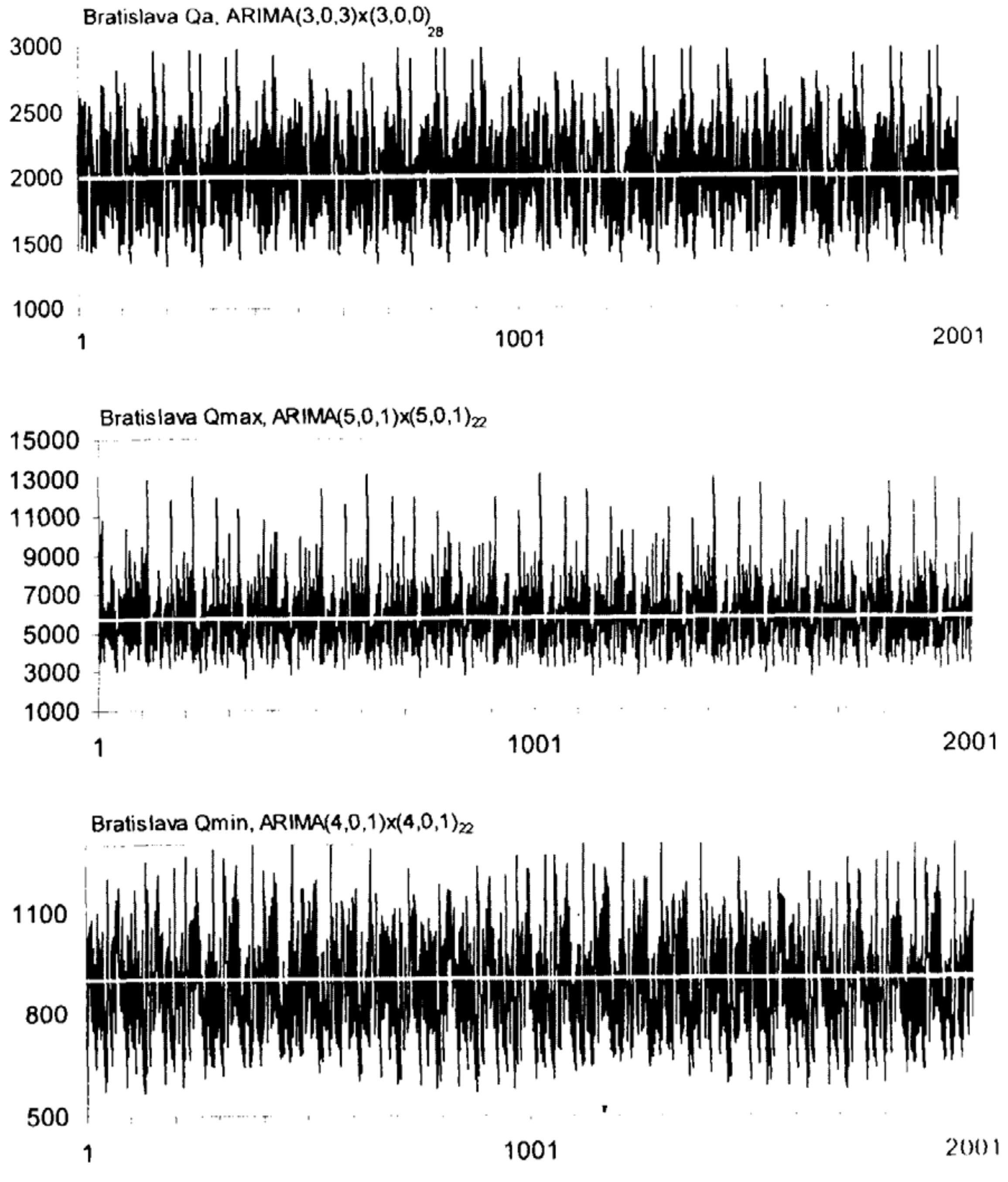

Рис. 1 – Модельные данные по среднегодовому, максимальному и минимальному расходам для р. Дунай (станция Девин-Братислава) в период с 1 по 2001гг.)

Наши компьютерные оценки показали, что поведение временного ряда значений среднегодовых расходов для р. Дунай удовлетворяет основным критериям феномена детерминистического хаоса. Соответствующие фрактальные размерности лежат в интервале [1.3-1.6]. Здесь уместно обратить внимание на, вероятно, универсальное явления генезиса фрактальных размерностей в родственных (диссипативных, фрустрированных) динамических системах, на которое было указано в работах [12,-14,19-22]. В частности, аналогичный факт был надежно установлен для такой достаточно сложной и экзотической системы как система “космическая плазма – галактические космические лучи- турбулентные пульсации в планетарной атмосферной системе” [19,20]. В любом случае, полученный в данной работе результат может быть использован как исходный для решения последующей задачи восстановления и прогнозирования расходов, речного стока в любом интересующем временном интервале. Естественно, далее потребуется более детальное восстановление спектра размерностей Ляпунова и на его основе также размерность Калана-Йорка и энтропии Колмогорова, которая обратно пропорциональна пределу предсказуемости. Наконец, следующий шаг - построение непосредственно прогностической модели.

Список литературы

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. .
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова В.Е.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.-М.:Наука, 2003.
4. *Глушков А.В., Бунякова Ю.Я.* Анализ и прогноз влияния антропогенных факторов на воздушный бассейн промышленного города.-Одесса: Экология, 2010.
5. *Islam M.N., Sivakumar B.* Characterization and prediction of runoff dynamics: a nonlinear dynamical view// Adv.Water Res.-2002.-V.25, № 2- P.179-190.
6. *Grassberger P, Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D.-1983.-Vol.9,№1-2.-P.189-208.
7. *Лобода Н.С.* Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности// Метеорология, климатология и гидрология.-2002.-№45.-С.140-146.
8. *Maftuoglu R.F.* New models for non-linear catchment’s analysis// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1984.-Vol.73.-P.335-357.
9. *Maftuoglu R.F.* Monthly runoff generation by non-linear models// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1991.-Vol.125.-P.277-291.
10. *Kothyari U., Arvanmuthan V., Singh V.* Monthly runoff generation using the linear perturbation model// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1993.-Vol.144.-P.371-379.
11. *Stewart M.D., Bates P.D., Anderson M.G., Price D.A., Burt T.P.* Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1999.-Vol.223.-P.85-106.

12. *Svoboda A., Pekarova P., Miklanek P.* Flood hydrology of Danube between Devin and Nagymaros in Slovakia.- Nat. Rep.2000 of the UNESKO.-Project 4.1.-Intern.Water Systems.-2000.-96P.
13. *Loboda N.S., Glushkov A.V., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of the annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-Southwest Ukraine region//Atmospheric Research (Elsevier; The Netherlands). -2005.-Vol.77.-P.100-113.
14. *Глушков А.В., Сербов Н.Г., Балан А.К. , Лукаш Т.В.* Многофакторный системный и мультифрактальный подходы в моделировании годового стока (р. Дунай) //Вісник Одеського державного екологічного ун-ту.-2009.-N7.-P.186-191.
15. *Глушков А.В., Лобода Н.С., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Свинаренко А.А., Бунякова Ю.Г.* Хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере: краткосрочный прогноз// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N5.-С.225-235.
16. *Сербов Н.Г., Сухарев Д.Е., Балан А.К. , Дудинов А.А.* Моделирование экстремально высоких паводков и временных флуктуаций концентраций загрязняющих веществ в речной воде// Вісник Одеського держ. екологічного ун-ту.-2011.-N11.-С.172-177.
17. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Serbov N.G., Zhurbenko K.* Signatures of low-dimensional chaos in hourly water level measurements at coastal site of Mariupol, Ukraine// Stoch. Environment Res. Risk Assess. (Springer).-2008.-Vol.22,N6.-P.777-788.
18. *Khokhlov V.N., Glushkov A.V., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya.* Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284–7292.
19. *Glushkov A.V., Rusov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Khokhlov V.N., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.* On possible genesis of fractal dimensions in the turbulent pulsations of cosmic plasma – galactic-origin rays – turbulent pulsation in planetary atmosphere system// Advances in Space Research (Elsevier).-2008.-Vol.42,N9.-P.1614-1617
20. *Rusov V.D., Glushkov A.V., Vaschenko V.N., Myhalus O.T., Bondartchuk Yu.A., Smolyar V.P., Linnik E.P., Mavrodiev S.C., Vachev B.I.* Galactic cosmic rays – clouds effect and bifurcation model of the earth global climate. Part 1. Theory// Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics (Elsevier).-2010.-Vol.72,N.-P.498-508.

Багатофакторний мультифрактальний підхід до моделювання характеристик річкового стоку.
Свинаренко А.А., Сухарев Д.Є.
На підставі мультифрактального формалізму з використанням алгоритма Грассбергера-Прокаччіа проведено моделювання характеристик річкового стоку на прикладі р. Дунай й визначені значення фрактальних розмірностей.
Ключові слова*: метод мультіфрактального моделювання, річковий стік, фрактальна розмірність*

A multi-factor multi-fractal approach to modelling of the river runoff characteristics.
Svinarenko A.A., Sukharev D.E.
It is carried out modelling river runoff characteristics for r. Danube within a multi-fractal formalism with using the Grassberger-Procaccia algorithm. It is calculated a spectrum of fractal dimensions.
Kew words*: multifractal modeling method, river runoff, fractal dimension*