УДК 535.8523

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

В.Н. Чинков, *доктор технических наук, профессор Харьковского университета Воздушных Сил им. И. Кожедуба*

Предложена обобщенная математическая модель оценок спектральной плотности мощности эргодических случайных сигналов, измеряемых различными методами, которая основана на критерии максимального правдоподобия. С ее применением проведен сравнительный анализ известных методов аппаратурного спектрального анализа и даны рекомендации по их выбору.

There was proposed the generalized mathematical model of estimations of spectral density of power of ergodic casual signals, measured by means of different methods, which is based on the criterion of maximal verisimilitude. With the application of this model there was made the comparative analysis of the known methods of instrumental spectral analysis and there was given the recommendation how to choose method.

Спектральный анализ, который сводится к измерению оценки спектральной плотности мощности (СПМ) случайных сигналов в заданном частотном интервале, относится к одной из наиболее распространных и развивающихся областей электрорадиоизмерений – измерению характеристик случайных сигналов.

Известные методы аппаратурного спектрального анализа эргодических случайных сигналов можно классифицировать следующим образом [1–4]:

- измерение дисперсии реализации случайного сигнала, получаемой на выходе узкополосного фильтра (метод непосредственной фильтрации, или метод возведения в квадрат);
- усеченное преобразование Фурье оценки корреляционной функции;
- усреднение квадратов коэффициентов Фурье реализации исследуемого сигнала в интервале частот;
- усреднение квадратов коэффициентов Фурье исследуемого сигнала во времени;
- измерение взаимной корреляционной функции исследуемого и отфильтрованного сигналов (метод перемножения).

Разнообразие методов спектрального анализа ставит перед разработчиками довольно сложную задачу выбора такого метода измерения оценки СПМ, который обладает наивысшей потенциальной точностью, то есть позволяет за заданное время измерения (анализа) T получить оценку СПМ с наименьшей дисперсией.

В настоящее время отсутствуют сравнительные оценки известных методов спектрального анализа по указанному критерию и практические рекомендации по их применению. Цель данной статьи – в определенной мере восполнить этот пробел.

Для решения поставленной задачи, прежде всего, необходимо иметь обобщенную математическую модель оптимальной оценки СПМ, которая охватывала бы, по возможности, большинство методов спектрального анализа и позволяла провести их сравнение по точности измерения оценки СПМ по единому критерию.

Известно, что состоятельная локальная оценка СПМ не может быть получена известными методами. Возникает естественный вопрос: является ли это обстоятельство недостатком известных методов или оно присуще любому, в том числе оптимальному, методу. С другой стороны, известно, что интегральная (усредненная тем или иным способом) оценка СПМ является состоятельной. В этом случае также требует разрешения следующая задача: какой из используемых методов позволяет получить интегральную оценку СПМ с наименьшей дисперсией погрешности, то есть является в указанном смысле оптимальным. Если же среди известных методов нет оптимального, то желательно такой найти.

Получим вначале общий вид для любой оценки СПМ. Очевидно, что располагая реализацией эргодического случайного сигнала $x(t)$ длительностью T, можно определить оценку корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ (тем или иным известным способом) только для времени $-\tau<T<\tau$. Так как $\hat{R}(\tau)$ – четная функция τ, то достаточно рассмотреть лишь $\tau>0$. Любая оценка СПМ $\hat{G}$ (локальная или интегральная) сигнала $x(t)$ представляет в общем случае линейное преобразование от оценки корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ этого сигнала. Поэтому общий вид оценки СПМ представим в виде

$$\hat{G}(\omega_0,\ \Delta\omega) = \hat{G} = \int_0^T L(\tau)\hat{R}(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где $L(\tau)$ – преобразующая функция, зависящая для локальной оценки СПМ от частоты анализа ω_0, а для интегральной оценки – от частоты анализа ω_0 и полосы усреднения $\Delta\omega$.

Вид (форма) преобразующей функции $L(\tau)$ определяет математическое ожидание и дисперсию оценки СПМ $\hat{G}$, а при фиксированной функции $L(\tau)$ дисперсия оценки СПМ $\hat{G}$ будет зависеть от используемой оценки корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$.

Для нахождения обобщенной математической модели оптимальной оценки СПМ случайного процесса $x(t)$ воспользуемся статистической теорией принятия решений [5].

Обозначим совместную многомерную функцию распределения величин $x(t)$ и $\hat{R}(\tau)$ через $w[\{x(t)\};\{\hat{R}(\tau)\}]$. С точки зрения статистической теории принятия решений функция $\hat{R}(\tau)$ не известна и является случайной величиной, априорная дисперсия которой велика. Причем априорная функция распределения $w[\{\hat{R}(\tau)\}]$ имеет большую дисперсию. В результате измерения величин $\{x(t)\}$ функция распределения величины $\hat{R}(\tau)$ редуцируется и превращается в условную функцию распределения:

$$w\left[\frac{\{\hat{R}(\tau)\}}{\{x(t)\}}\right] = \frac{w\left[\dfrac{\{x(t)\}}{\{\hat{R}(\tau)\}}\right] w\left[\{\hat{R}(\tau)\}\right]}{w\left[\{x(t)\}\right]}. \qquad (2)$$

Ширина условной (апостериорной) функции распределения у́же, чем априорной, и чем она у́же, тем точнее на основании опыта, то есть измерения последовательности $\{x(t)\}$, можно определить оценку корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$. Различные апостериорные оценки $\hat{R}(\tau)$, а значит, и оценки СПМ $\hat{G}$ имеют при данной последовательности $\{x(t)\}$ различные вероятность и дисперсию. Согласно статистической теории принятия решений, оптимальной является та оценка СПМ $\hat{G}$ (и корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$), которая имеет наибольшую вероятность или наименьшую дисперсию.

Если условная функция распределения $w[\{\hat{R}(\tau)\}/\{x(t)\}]$ достаточно узка (это необходимо для того, чтобы измерение было достаточно точным), то оценки по максимуму вероятности (оценка Байеса) и по минимуму дисперсии совпадают. При этом оценка по максимуму вероятности совпадает с оценкой по максимуму правдоподобия. В то же время оценка по минимуму дисперсии оказывается более громоздкой, а следовательно, и более трудоемкой.

Таким образом, следуя статистической теории принятия решений, оптимальной будет та оценка корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ (а значит, и определенная по ней из выражения (1) оценка СПМ $\hat{G}$), которая обеспечивает максимум функции правдоподобия $w[\{x(t)\}/\{\hat{R}(\tau)\}]$ по формуле (2).

Найдем эту оценку в предположении, что исследуемый случайный сигнал относится к классу гауссовых, что справедливо для большинства реальных случайных сигналов. Обозначим для упрощения записей $x(t_i) \equiv x_i$; $\hat{R}(t_i - t_j) \equiv \hat{R}_{ij}$.

Тогда функция правдоподобия

$$w\left[\frac{x_i}{\hat{R}_{ij}}\right] = (2\pi)^{-N/2}\,\mathrm{Det}\left\|\hat{R}_{ij}^{-1}\right\|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\hat{R}_{ij}^{-1}x_i x_j\right), \qquad (3)$$

где $\hat{R}_{ij}^{-1}$ – элементы матрицы, обратной корреляционной матрице $\left\|\hat{R}_{ij}^{-1}\right\|$; N – объем выборки, по которой определяется оценка корреляционной функции;

$$\mathrm{Det}\left\|\hat{R}_{ij}^{-1}\right\| = \begin{vmatrix} \hat{R}^{-1}(0) & \hat{R}^{-1}(1) & \hat{R}^{-1}(2) & \dots \\ \hat{R}^{-1}(1) & \hat{R}^{-1}(0) & \hat{R}^{-1}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}^{-1}(N-1) & \hat{R}^{-1}(N-2) & \dots & \hat{R}^{-1}(0) \end{vmatrix}.$$

В формуле (3) используется обратная матрица $\left\|\hat{R}_{ij}^{-1}\right\|$, а не матрица $\left\|\hat{R}_{ij}\right\|$, так как матрица $\left\|\hat{R}_{ij}^{-1}\right\|$ проще для расчетов. Поскольку элементы прямой $\hat{R}_{ij}$ и обратной $\hat{R}_{ij}^{-1}$ корреляционных матриц зависят от разности индексов i, j, то обозначим $\hat{R}_{i,\,i+k} \equiv \hat{R}(k)$ и $\hat{R}_{i,k}^{-1} \equiv \hat{R}^{-1}(k)$. Тогда значения коэффициентов матрицы $\hat{R}^{-1}(k)$, обеспечивающие максимум функции правдоподобия (3), могут быть определены из условия

$$\frac{\partial w\left[\dfrac{x_i}{\hat{R}_{ij}}\right]}{\partial \hat{R}^{-1}(k)} = 0.$$

Запишем сумму в выражении (3) следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{N}\hat{R}^{-1}\left(|i-j|\right)x_i x_j = 2\sum_{k=1}^{N-1}\hat{R}^{-1}\sum_{j=1}^{N-k}x_i x_{j+k} + \sum_{i=1}^{N}\hat{R}^{-1}(0)\,x_i^2,$$

$$i - j = k.$$

Вычислим частные производные от детерминанта $\Delta = \mathrm{Det}\left\|R_{ij}^{-1}\right\|$ по $\hat{R}_0^{-1}$, находим

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_0^{-1}} = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \dots + \Delta_{NN},$$

где Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элементов обратной матрицы $\hat{R}_{ij}^{-1}$.

Так как

$$\hat{R}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \ \text{ и } \ \hat{R}_{11} = \hat{R}_{22} = \dots = \hat{R}_{NN} = \hat{R}(0),$$

то

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_0^{-1}} = \Delta(\hat{R}_{11} + \hat{R}_{22} + \dots + \hat{R}_{NN}) = N\Delta\hat{R}(0).$$

При вычислении остальных частных производных нужно учесть, что элемент $\hat{R}_k^{-1}$ встречается в $2k$ строках (k сверху и k снизу) матрицы по одному разу и в $(N-2k)$ строках по два раза (при $k \le N/2$). Тогда

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\hat{R}_k^{-1}} = \Delta\left[2k + 2(N-2k)\right]\hat{R}(k) = 2(N-k)\Delta\hat{R}_k.$$

При $k>N/2$ элемент $\Delta\hat{R}_k$ встречается только в $2(N-k)$ строках матрицы по одному разу, поэтому для него также годится полученное соотношение.

С учетом вышесказанного, продифференцируем выражение (3) по $\hat{R}_k^{-1}$ и запишем условие

$$\frac{\partial w\left[\dfrac{x_i}{\hat{R}_{ij}}\right]}{\partial\hat{R}_k^{-1}} = (2\pi)^{-N/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\hat{R}_{ij}^{-1}x_i x_j\right)\times$$

$$\times\left[(N-k)\hat{R}_k - \sum_{j=1}^{N-k}x_j x_{j+k}\right]\Delta^{1/2} = 0.$$

Отсюда находим оптимальную оценку

$$\hat{R}_{опт}(k) = \hat{R}_{k_{опт}} = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}x_j x_{j+k}, \tag{4}$$

где $N=T/\tau_a$; $k=\tau/\tau_a$; τ_a – интервал дискретизации случайного сигнала $x(t)$.

Переходя к пределу в формуле (4) при $\tau_a\to 0$, имеем

$$\hat{R}_{опт}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{5}$$

Эта оценка корреляционной функции оптимальна в том смысле, что она обеспечивает наименьшую, по сравнению с другими оценками, дисперсию, вследствие максимально полного использования информации об исследуемом процессе, содержащейся в последовательности $\{x(t)\}$. Ее использование позволяет получить из выражения (1) оптимальную оценку СПМ $\hat{G}_{опт}$, имеющую, по сравнению с другими оценками, наименьшую дисперсию, то есть потенциально она обеспечивает наибольшую точность измерений.

В практике аппаратурного спектрального анализа часто используют упрощенную оценку СПМ, в которой для всех значений τ время интегрирования принимается постоянным [6]:

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T}x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{6}$$

Из этого соотношения видно, что для получения оценки $\hat{R}(\tau)$ необходимо знать значения сигнала $x(t)$ при $t>T$. Так, если интересуются значениями корреляционной функции при $0<\tau<\tau_1$, то нужно знать $x(t)$ при $0<t<T+\tau_1$. Но если сигнал $x(t)$ известен на интервале $0\le t\le T+\tau_1$ то оптимальная на этом интервале оценка (5) принимает вид

$$\hat{R}_{опт}(\tau) = \frac{1}{T+\tau_1-\tau}\int_0^{T+\tau_1-\tau}x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{7}$$

Она также имеет минимальную дисперсию. Различие между оценками (6) и (7), в смысле оптимальности, будет незначительным при $\tau_1<<T$.

Предложенная обобщенная математическая модель оптимальной оценки СПМ (1) позволяет сравнить известные методы оценки СПМ с единых позиций и найти среди них наилучший по минимуму дисперсии оценки. Однако предварительно покажем, что все указанные методы аппаратурного спектрального анализа эргодических случайных сигналов могут быть приведены к обобщенной математической модели оптимальной оценки СПМ.

Оценка спектральной плотности мощности, измеренной методом, основанным на временном усреднении квадрата фильтрованной реализации случайного сигнала (или методом возведения в квадрат, или методом непосредственной фильтрации). Суть данного метода измерения состоит в следующем [1, 2].

Исследуемый случайный сигнал $x(t)$ пропускают через узкополосный фильтр (УПФ) с центральной частотой f (или $\omega=2\pi f$) и полосой пропускания Δf (или $\Delta\omega=2\pi\Delta f$).

Известно, что при любом входном сигнале $x(t)$ фильтра, как линейной системы с постоянными параметрами, сигнал на его выходе определяется интегралом свертки [1]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(t)\,d\tau, \tag{8}$$

где $h(t)$ – импульсная переходная характеристика УПФ, или весовая функция, которая представляет собой реакцию фильтра в некоторый момент времени t на единичный импульсный сигнал, поданный на вход фильтра в момент времени $(t-\tau)$.

Для реальных УПФ, работающих в анализаторах спектра, равенство (8) принимает вид

$$y(t) = \int_0^{T}h(t)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{T}h(t-\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Выходной сигнал УПФ $y(t)$ возводят в квадрат и результат усредняют за время анализа T. При этом для точечной оценки СПМ справедливо выражение

$$\hat{G}(f,\,\Delta f) = \hat{G} = \frac{1}{T\Delta f}\int_0^{T}y^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (10), имеем

$$\hat{G}(f) = \hat{G}_1 = \int_0^{T}dt\int_0^{t}d\tau\int_0^{t}d\tau'\,h(\tau)\,h(\tau')x(t-\tau)\,x(t-\tau'). \tag{11}$$

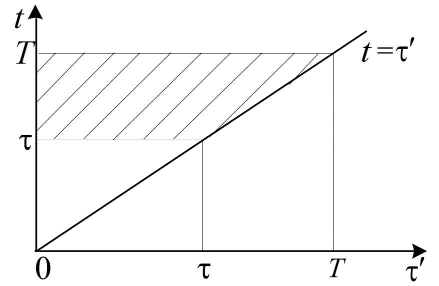
Преобразуем данное выражение к виду (1). Для этого поменяем в нем порядок интегрирования, используя рисунок, следующим образом:

$$\int_0^{T}dt\int_0^{t}d\tau\int_0^{t}d\tau' = \int_0^{T}d\tau\left(\int_0^{\tau}d\tau'\int_{\tau}^{T}dt + \int_{\tau}^{T}d\tau'\int_{\tau'}^{T}dt\right) = \int_0^{T}d\tau\int_0^{T}d\tau'\int_{\max(\tau,\tau')}^{T}dt.$$

С учетом этого равенства для (11) имеем

$$\hat{G}_1 = 2\iint_{\tau>\tau'}^{T}d\tau\,d\tau'\,h(\tau)\,h(\tau')\int_{\tau}^{T}dt\,x(t-\tau)\,x(t-\tau'). \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\tau}^{T}x(t-\tau)x(t-\tau')dt$ при $\tau>\tau'$. Вводя замену переменных $t-\tau=u$, получим



К пояснению изменения порядка интегрирования в формуле (11)

$$\int_{\tau}^{T} x(t-\tau)x(t-\tau')dt = \int_{0}^{T-\tau} x(u)x(u+\tau-\tau')\,du.$$

Данное выражение представляет собой одну из возможных, но не оптимальных оценок корреляционной функции $\hat{R}_1(\tau-\tau')$:

$$\hat{R}_1(\tau-\tau') = \frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau} x(u)\,x(u+\tau-\tau')\,du,\ \ \tau > \tau'. \quad (13)$$

Оптимальная оценка корреляционной функции имеет вид

$$\hat{R}_{\text{опт}}(\tau-\tau') = \frac{1}{T-\tau+\tau'}\int_{0}^{T-\tau+\tau'} x(u)x(u+\tau-\tau')\,du,\ \ \tau > \tau'. \quad (14)$$

Математическое ожидание оценки (13), разумеется, такое же, как у оптимальной оценки (14), но ее дисперсия несколько больше за счет меньшего (на величину τ') интервала интегрирования.

Подставляя (13) в (12), имеем

$$\hat{G}_1 = 2\int_{0}^{T} d\tau\int_{0}^{\tau} d\tau' h(\tau)\,h(\tau')(T-\tau)\hat{R}_1(\tau-\tau').$$

Преобразуя данное выражение, находим

$$\hat{G}_1 = \int_{0}^{T} L_1(u)\hat{R}_1(u)du,$$

где

$$L_1(u) = 2\int_{u}^{T} h(\tau)h(\tau-u)(T-u)d\tau; \quad (15)$$

$$\hat{R}_1(u) = \frac{\int_{0}^{T-u} w(u,\ \tau)x(\tau)\,x(\tau+u)\,d\tau}{\int_{0}^{T-u} w(u,\ \tau)\,d\tau}; \quad (16)$$

$$w(u,\ \tau) = \int_{0}^{T-u-\tau} h(t)\,h(t+u)\,dt.$$

Из выражения (16) следует, что оценка $\hat{R}_1(u)$ не оптимальна, поскольку в нем выполняется взвешивание произведения $x(\tau)x(\tau+u)$ в интервале усреднения $T-u$ с весовой функцией $w(u,\ \tau)$. Только в области $\tau \ll T$ взвешивающая функция $w(u,\ \tau)$ не зависит от τ и в этом приближении оценка (16) совпадает с упрощенной оптимальной оценкой (6).

Анализ выражения (15) показывает, что возможности варьирования формы преобразующей функции сильно ограничены, поскольку интегральное уравнение (15) не для любой функции $L_1(\tau)$ имеет решение $h(\tau)$. Полученный результат можно уточнить следующим образом.

На самом деле оценка (13) зависит и от $\tau-\tau'=u$, и от τ, то есть

$$\hat{R}_1(u,\ \tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau} x(t)\,x(t+u)\,dt. \quad (17)$$

Тогда, используя равенства (15) и (17), оценку корреляционной функции можно представить так:

$$\hat{R}_1(u) = \frac{1}{L_1(u)}\int_{u}^{T} h(\tau)\,h(\tau-u)(T-\tau)\,\hat{R}_1(u,\ \tau)\,d\tau. \quad (18)$$

Если функция $\hat{R}_1(u,\ \tau)$ слабо зависит от τ, то $\hat{R}_1(u,\ \tau) \approx \hat{R}_1(u)$. Это имеет место в том случае, если в подинтегральном выражении (18) существенна лишь область интегрирования $\tau \sim u \ll T$, то есть когда функция $h(\tau)$ значительно отличается от нуля лишь при малых значениях τ. Если же функция $h(\tau)$ имеет узкий максимум при $\tau=t_0$, то

$$\hat{R}_1(u) \approx \hat{R}_1(u,\ t_0) = \frac{1}{T-t_0}\int_{0}^{T-t_0} x(t)\,x(t+u)\,dt,\ \ u > t_0,$$

а если $u<t_0$, то

$$\hat{R}_1(u,\ \tau) \approx \hat{R}_1(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau} x(t)\,x(t+\tau)dt.$$

Очевидно, что в этом случае оценка $\hat{R}_1(u)$ может заметно отличаться от оптимальной оценки $\hat{R}_{\text{опт}}(u)$.

Оценка спектральной плотности мощности, измеренной косвенным методом, основанным на усеченном преобразовании Фурье оценки корреляционной функции. Этот метод основан на формуле прямого преобразования Фурье (или теоремы Винера-Хинчина) корреляционной функции стационарного эргодинамического случайного сигнала с конечной мощностью [1]:

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau.$$

Обобщенная оценка СПМ, соответствующая этому выражению, имеет вид [2]

$$\hat{G}_2(f) = \hat{G}_2 = \int_{0}^{T} k(\tau)\hat{R}_2(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \quad (19)$$

где $k(\tau)$ – усекающая функция.

Очевидно, что выражение (19) совпадает с (1), если в нем принять

$$L_2(\tau) = k(\tau)\cos\omega\tau. \quad (20)$$

Если в качестве $\hat{R}_2(\tau)$ взята оптимальная оценка (5), то и оценка СПМ $\hat{G}_2$ будет оптимальной. Однако обычно в качестве $\hat{R}_2$ берут упрощенную оценку корреляционной функции

$$\hat{R}_2(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \quad (21)$$

Если усекающая функция $k(\tau)$ отлична от нуля только при малых значениях τ, различие между оценками $\hat{R}_2$ и $\hat{R}$ несущественно.

Следовательно, характеристики оценки СПМ $\hat{G}_2$, полученные при измерении приближенной оценки корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ согласно равенству (21), будут близки к оптимальным. В этом случае, как и при использовании оптимальной оценки $\hat{R}_2(\tau)$, выбором функции $k(\tau)$ можно изменять в требуемом направлении форму преобразующей функции $L_2(\tau)$, определяемой формулой (20).

Оценка спектральной плотности мощности, измеренной методом, основанным на усреднении квадратов коэффициентов Фурье случайного сигнала по частотам (или периодограммным методом). Оценка СПМ, измеряемая данным методом и называемая периодограммой, описывается выражением

$$\hat{G}_3(f) = \hat{G}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) A^2(\omega) d\omega, \tag{22}$$

где

$$A^2(\omega) = |A(j\omega)|^2 = \left| \int_0^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \tag{23}$$

– квадрат модуля комплексного коэффициента Фурье;

$$A(j\omega) = \int_0^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

– преобразование (коэффициент) Фурье сигнала $x(t)$; $F(\omega)$ – выделяющая функция, отличная от нуля в узком частотном диапазоне вблизи частоты ω.

Подставляя (23) в (22) и выполняя замену переменных $t-t'=u$, после преобразований получим

$$\hat{G}_3 = \int_0^{T} L_3(u) \hat{R}_3(u) du, \tag{24}$$

где

$$\hat{R}_3(u) = \frac{1}{T-u} \int_u^{T} x(t) x(t-u) dt; \tag{25}$$

$$L_3(u) = 2(T-u) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos \omega u d\omega. \tag{26}$$

Из сравнения полученной оценки корреляционной функции (25) и оценки (5) следует, что в данном методе используется оптимальная оценка корреляционной функции.

Поскольку обычно преобразующая функция $L_3(u)$ отлична от нуля лишь в области $u<<T$, то справедливо следующее приближенное равенство:

$$L_3(u) \approx 2T \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos \omega u du.$$

Если усреднение производится суммированием, а не интегрированием, то из (26) для преобразующей функции имеем

$$L_3(u) = 2(T-u) \sum_{i=-\infty}^{\infty} F_i \cos \omega_i u,$$

где принято $F(\omega_i) \equiv F_i$.

Оценка спектральной плотности мощности, измеренной косвенным методом, основанным на временном усреднении коэффициентов Фурье случайного сигнала. Этот метод измерения оценки СПМ описывается следующими выражением [2]:

$$\hat{G}_4(f) = \hat{G}_4 = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \left| A_q(j\omega) \right|^2, \tag{27}$$

где

$$A_q(j\omega) = \int_{(q-1)T'}^{qT'} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{28}$$

– комплексный коэффициент Фурье, вычисленный по сигналу $x(t)$ длительностью T'.

Полное время измерения оценки СПМ $\hat{G}_4(j)$ равно $T=nT'$, где n – количество реализации, которое укладывается в интервал усреднения T.

Подставляя (28) в (27), имеем

$$\hat{G}_4 = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \int_{(q-1)T'}^{qT'} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \int_0^{T'} x[t+(q-1)T'] e^{-j\omega t} dt \right|^2 =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{q=1}^{n} \int_0^{T'} dt' \int_{t'}^{T'} dt\, x[t+(q-1)T'] x[t'+(q-1)T'] \omega(t-t').$$

Используя замену переменных $t-t'=u$, проведем дальнейшие преобразования и окончательно оценку СПМ $\hat{G}_4$ представим в виде

$$\hat{G}_4 = \int_0^{T'} (T'-u) \cos \omega u\, \hat{R}_4(u) du,$$

где

$$\hat{R}_4(u) = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} \hat{R}_q(u); \tag{29}$$

$$R_q(u) = \frac{1}{T'-u} \int_0^{T'-u} x[t+(q-1)T'] x[t+(q-1)T'+u] dt.$$

Оценка $\hat{R}_4(u)$, определяемая выражением (29), может быть записана так:

$$\hat{R}_4(u) = \frac{1}{n(T'-u)} \int_0^{nT'} f(t, u) x(t) x(t+u) dt, \tag{30}$$

где функция

$$f(t, u) = \begin{cases} 1, \ 0 \text{ при } qT' \le t \le qT'+u; \\ 0 \text{ при остальных } t. \end{cases}$$

Очевидно, что оценка корреляционной функции $\hat{R}_4(u)$ не является оптимальной, так как для ее построения используется не весь интервал измерения $nT'=T$, а лишь его часть, равная $n(T'-u)=T-nu$.

Преобразующая функция $L_4(\tau)$ определяется формулой

$$L_4(\tau) = \begin{cases} (T'-\tau) \cos \omega\tau \text{ при } \tau \le T'; \\ 0 \text{ при } T' < \tau \le T. \end{cases} \tag{31}$$

Она фактически является усекающей функцией Бартлетта (треугольное усечение).

Итак, и для данного метода измерения оценки СПМ получаем тот же вид обобщенной формулы (1).

Оценка спектральной плотности мощности, измеренной корреляционно-фильтровым методом. Данный метод измерения оценки СПМ основан на временном усреднении произведения исходной $x(t)$ и отфильтрованной $y(t)$ реализаций исследуемого случайного сигнала [4]. Эта оценка определяется выражением

$$\hat{G}_5(f,\ \Delta f) = \int_0^T x(t)\, y(t)\, dt. \qquad (32)$$

Функция $y(t)$ описывает выходной сигнал УПФ с переходной характеристикой $h(\tau)$, на вход которого поступает сигнал $x(t)$. Она определяется выражением (9).

Подставляя (9) в (32), имеем

$$\hat{G}_5 = \int_0^T dt \int_0^t d\tau h(\tau) x(t) x(t-\tau) = \int_0^T d\tau \int_\tau^T dt h(\tau) x(t) x(t-\tau),$$

или

$$\hat{G}_5 = \int_0^T L_5(\tau) \hat{R}_5(\tau) d\tau, \qquad (33)$$

где

$$L_5(\tau) = (T-\tau) h(\tau); \qquad (34)$$

$$\hat{R}_5 = \frac{1}{T-\tau} \int_\tau^T x(t) x(t-\tau)\, dt = R_{\text{опт}}(\tau). \qquad (35)$$

Сравнивая полученную оценку корреляционной функции (35) с оптимальной оценкой (5), видим, что она является оптимальной. Из (34) следует, что выбором импульсной характеристики узкополосного фильтра $h(\tau)$ может быть обеспечена любая форма преобразующей функции $L_5(\tau)$ корреляционно-фильтрового метода измерения оценки СПМ.

Сравнительный анализ полученных результатов (оценок СПМ) показывает, что наиболее распространенные методы спектрального анализа, такие, как метод возведения в квадрат и метод усреднения квадратов коэффициентов во времени, не являются оптимальными, поскольку используемые в них оценки $\hat{R}_1(\tau)$ (16) и $\hat{R}_4(\tau)$ (30) не совпадают по минимуму дисперсии с оценкой корреляционной функции (6). В то же время оценки корреляционных функций $\hat{R}_3(\tau)$ (5) и $\hat{R}_5(\tau)$ (32) обладают минимальной дисперсией, а следовательно, обеспечивают получение оптимальных оценок СПМ $\hat{G}_3$(24) и $\hat{G}_5$(33) методом усреднения квадратов коэффициентов Фурье в интервале частот и корреляционно-фильтровым методом. В методе усеченного преобразования Фурье оценки корреляционной функции ограничения на выбор оценки $\hat{R}_2(\tau)$ связи отсутствуют, в связи с чем при использовании в качестве нее оценки (6) или даже упрощенной оценки (21) измеряемая оценка СПМ $\hat{G}_2$(19) также будет обладать минимальной дисперсией.

Отметим также, что статистические характеристики оценок СПМ зависят от формы преобразующей функции, поэтому практический интерес представляет анализ возможности варьирования форм преобразующей функции, рассмотренных в методах спектрального анализа. Полученные результаты показывают, что возможности изменения формы преобразующих функций $L_1(\tau)$ (15) и $L_4(\tau)$ (31) ограничены, а в ряде случаев вообще отсутствуют. Требуемые статистические характеристики оценок СПМ $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ и $\hat{G}_5$ могут быть получены путем рационального выбора параметров соответствующих преобразующих функций, а именно: усекающей функции $k(\tau)$ – для функции $L_2(\tau)$ (20), выделяющей функции $F(\omega)$ – для функции $L_3(\tau)$ (26) и импульсной характеристики УПФ $h(\tau)$ – для функции $L_5(\tau)$ (32).

Таким образом, сравнительный анализ известных методов аппаратурного спектрального анализа эргодических случайных сигналов, проведенный на основе предложенной обобщенной математической модели оценки СПМ, показывает, что при создании аппаратуры спектрального анализа (анализаторов спектра) предпочтительными для обеспечения максимальной точности измерений являются корреляционно-фильтровый метод, метод усеченного преобразования Фурье корреляционной функции и метод усреднения квадратов коэффициентов Фурье в интервале частот. При окончательном выборе метода спектрального анализа при проектировании анализаторов спектра следует также учитывать возможные инструментальные погрешности и сложность аппаратурной реализации.

Список литературы

1. *Бендат Дж.* Измерение и анализ случайных процессов / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
2. *Грибанов Ю.И.* Спектральный анализ случайных процессов / Ю.И. Грибанов, В.Л. Мальков. – М.: Энергия, 1974. – 240 с.
3. *Куликов Е.И.* Методы измерения случайных процессов / Е.И. Куликов. – М.: Радио и связь, 1986. – 272 с.
4. *Чинков В.Н.* Корреляционно-фильтровый метод и его место среди других аппаратных методов измерения оценки спектральной плотности мощности случайных сигналов / В.Н. Чинков, В.А. Тищенко // Український метрологічний журнал. – 1999. – Вип. 3 – С. 46–50.
5. *Де Грот М.* Оптимальные статистические решения / М. Де Грот. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
6. *Брандт З.* Статистические методы анализа наблюдений / З. Брандт. – М.: Мир, 1975. – 320 с.