

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ УПРАВЛІННЯ

УДК 004:519.2

О.Ю. Берзлев

Аспірант кафедри управління проектами

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород

**МЕТОДИКА ПЕРЕДПРОГНОЗНОГО ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ
ЧАСОВИХ РЯДІВ**

Запропоновано методику передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, яка базується на послідовному R/S-аналізі. На основі цієї методики можна визначати рівень персистентності, розраховувати середню величину неперіодичного циклу часових рядів, а також встановлювати інвестиційну якість (дохідність) активів, які представляються фінансовими часовими рядами. В рамках цієї методики запропоновано критерій визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів, на основі згладжування V-статистики за допомогою звичайних плинних середніх та адаптивної плинної Кауфмана.

Ключові слова: *послідовний R/S-аналіз, показник Херста, часовий ряд, середня довжина неперіодичного циклу, інвестиційна якість фінансових активів*

Предложена методика передпрогнозного фрактального анализа временных рядов, основанная на последовательном R/S-анализе. На основе этой методики можно определять уровень персистентности, рассчитывать среднюю длину неперіодического цикла временных рядов, а также определять инвестиционное качество (доходность) активов, которые задаются финансовыми временными рядами. В рамках этой методики предложен критерий определения средней длины периодического и неперіодического циклов на основе сглаживания V-статистики с помощью обычных скользящих средних и адаптивной средней Кауфмана.

Ключевые слова: *последовательный R/S-анализ, показатель Херста, временной ряд, средняя длина неперіодического цикла, инвестиционное качество финансовых активов*

The method of pre-forecasting fractal time series analysis, based on the sequential R/S- analysis is offered. Based on this technique it is possible to determine to the level of persistence, to calculate the average length of non- time series periodic cycle, and to establish investment quality (yield) of assets which are represented by financial time series. Under this method the criterion for the average length of periodic and non-periodic cycles determining, based on smoothing the V- statistics using simple moving average and Kaufman adaptive moving average is proposed.

Keywords: *sequential R/S-analysis, Hurst index, time series, average length of non-time series periodic cycle, investment quality of assets*

Постановка проблеми

Більшість економічних, фізичних, технічних і природних процесів є нестійкими і нестационарними. Часові ряди, які представляють дані процеси, являють собою комплекс різнотипних складових: складова функції тренду, циклічні компоненти з різними періодами повторення, флуктуації тощо. Прогнозування таких рядів пов'язане з певними труднощами. Тому особливо актуальним є використання методів їх передпрогнозного оцінювання, що може бути реалізоване на базі

фрактального аналізу. Метод фрактального аналізу часових рядів – це один із напрямків аналізу фінансового ринку, який був запропонований Б. Мандельбротом і Р. Хадсоном [1; 2] та розвинутий Е. Петерсом та Е. Федером [3; 4] і, як складова частина методів дискретної нелінійної динаміки, призначений для дослідження нелінійностей в динаміці часових рядів, в тому числі фінансових.

Автором запропонована методика передпрогнозного фрактального аналізу фінансових часових рядів, яка може бути використана

інвесторами та аналітиками на фінансових ринках для ідентифікації в часовому ряді довготривалої пам'яті, визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів (квазіциклів), а також для встановлення інвестиційної якості фінансового часового ряду. Описаний метод може бути також успішно впроваджений в інформаційні системи обробки даних та прогнозування або системи підтримки прийняття рішень на фінансовому ринку, зокрема в якості допоміжного інструменту при побудові торгових стратегій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Основою запропонованої в даній роботі методики є алгоритм фрактального R/S-аналізу для визначення показника Херста. Детально різні підходи до розрахунку показника Херста на основі процедури R/S-аналізу описані в ряді робіт як закордонних авторів [3; 4], так і вітчизняних [5; 6]. В роботі [7] наводиться порівняння різних методик проведення фрактального аналізу для розрахунку показника Херста. Емпіричні правила та вказівки для R/S-аналізу, а також особливості візуального аналізу V-статистики для визначення середньої довжини неперіодичного циклу описані в роботі [3]. Про ефект довготривалої пам'яті в часових рядах описано в роботах [1; 3; 8].

Мета статті

Метою статті є розробка і описання методики передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, формулювання в рамках цієї методики критеріїв оцінювання середньої довжини неперіодичних і періодичних циклів, інвестиційної якості фінансових часових рядів, ідентифікація рядів з довготривалою пам'яттю, шляхом розрахунку показника Херста, на основі реалізації процедури послідовного R/S-аналізу.

Фрактальний R/S-аналіз

Фрактальний аналіз, як новий напрямок в аналізі динаміки фінансових показників, сформувався на базі теорії фрактальних ринків, яка на відміну від теорії ефективних ринків, що з'явилася ще на початку ХХ-го століття, стверджує, що розвиток ринкових процесів у майбутньому, як і майбутні значення часових рядів, які відображають ці процеси, залежать від ретроспективних змін. Вважається, що процес ціноутворення загалом глобально детермінований і залежить від початкових умов, локально ж він випадковий. Згідно з принципами фрактального аналізу, часові ряди мають фрактальну розмірність $1 < D < 2$, наділені властивостями масштабної інваріантності (самоподібності) і пам'яттю про свої початкові

умови. Вважається, що часові ряди, які відображають розвиток економічних процесів, мають фрактальну структуру. Фрактальна розмірність вказує на ступінь «зазубреності» часового ряду. Наприклад, пряма лінія має фрактальну розмірність $D = 1$, якщо $D = 1.5$, то часовий ряд являє собою гауссів випадковий процес.

На практиці фрактальну розмірність замінюють показником Херста H , на основі якого визначається ступінь згладженості часового ряду [3; 9]. Показник H визначається на основі фрактальної розмірності за формулою $H = 2 - D$, де $0 \leq H \leq 1$. Якщо розбити часовий ряд на ν ділянок однакової довжини, то показник Херста може бути визначений таким чином: $\left(\frac{R}{S}\right)_\nu \approx \alpha \nu^H$,

де $\left(\frac{R}{S}\right)_\nu$ – нормований розмах від накопиченого середнього; ν – число часових відліків або кількість спостережень; $\alpha = \text{const}$, незалежна від ν .

Іншими словами, показник Херста являє собою число $H \in [0, 1]$, яке характеризує відношення складової функції тренда до білого шуму і може використовуватись для класифікації часових рядів: встановлення невідповідних часових рядів зі стійким трендом та випадкових рядів (в тому числі негауссових). Розрахунок показника Херста може проводитися на основі процедури R/S-аналізу, який було запропоновано Б. Мандельбротом. В роботі [10] він обґрунтував його застосовність для дослідження фінансово-економічних процесів.

Залежно від значення показника Херста часового ряду виокремлюють такі класифікації:

- якщо показник H часового ряду близький до 0.5, то це свідчить про його випадковість. У цьому випадку не буде жодної кореляції між ретроспективними даними і прогнозними;

- чим ближче показник H до 1 ($H > 0.5$), тим більш персистентним або трендостійким є ряд. Припускається, що події не випадкові, і якщо виникає чітка тенденція часового ряду до зростання або падіння, то вона з великою ймовірністю збережеться і надалі;

- чим ближче показник H до 0 ($H < 0.5$), тим більш антиперсистентним є ряд.

У даній роботі для розрахунку показника Херста будемо застосовувати методику, яка запропонована в роботі [5].

Нехай задано часовий ряд з n спостережень $Z = \{z_i\}_{i=1}^n$. Для кожного з початкових відрізків даного часового ряду $\{z_i\}_{i=1}^\tau$ довжини $\tau = 3, 4, \dots, n$ обчислимо середні значення за формулою

$$\bar{z}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} z_i, \text{ накопичені відхилення знайдемо}$$

за формулою $x_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{\tau} (z_i - \bar{z}_i)$, $\tau = 3, 4, \dots, n$, розмах

$R_{\tau} = \max_{1 \leq t \leq \tau} x_{\tau,t} - \min_{1 \leq t \leq \tau} x_{\tau,t}$. Тоді середньоквадратичне

відхилення для кожного з відрізків визначається за

формулою $S_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (z_i - \bar{z}_i)^2}$, $\tau = 3, 4, \dots, n$.

Розмах накопиченого відхилення нормалізується шляхом ділення на середньоквадратичне відхилення для кожного відрізка τ і будується графік залежності

$\lg\left(\frac{R_{\tau}}{S_{\tau}}\right)$ від $\lg(\tau)$ (так звана, R/S-траєкторія). Далі на

основі методу найменших квадратів будується рівняння лінійної регресії, коефіцієнт при незалежній змінній якого буде показником Херста. Рівняння буде

мати вигляд $\lg\left(\frac{R_{\tau}}{S_{\tau}}\right) = \lg(\alpha) + H \cdot \lg(\tau)$, де $\alpha = \text{const}$.

Показник Херста можна також розглядати як функцію від τ [3]:

$$H(\tau) = \frac{\lg\left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right)}{\lg\left(\frac{\tau}{2}\right)}$$

Поведінка побудованих на основі цієї функції H-траєкторії або залежності функції $H(\tau)$ від

$\lg\left(\frac{\tau}{2}\right)$, а також R/S-траєкторії, можуть бути

використані для виявлення таких властивостей часового ряду, як: інтервали довготривалої і короткотривалої залежності (ідентифікація у часовому ряді довготривалої пам'яті);

- наявність циклічних складових і середньої довжини неперіодичного циклу.

Квазіциклом часового ряду можна назвати локально найбільшу ділянку часового ряду, яку можна умовно поділити на дві частини, причому в першій частині спостерігається послідовність додатних (від'ємних) приростів членів ряду, а в другій частині – навпаки послідовність від'ємних (додатних) приростів. Якщо точки початку і закінчення квазіциклу знаходяться на одному рівні, то такий квазіцикл називається циклом. Під довжиною циклу (квазіциклу) будемо розуміти кількість точок часового ряду, які утворюють цикл (квазіцикл). З теорії хаосу відомо, що під час руху будь-якої нелінійної системи завжди знаходиться точка, в якій втрачається пам'ять про початкові умови. Середньою довжиною циклу можна вважати цілочислову величину, яка характеризує стійку пам'ять для періодів, менших за цю величину.

Для знаходження довжини циклу (квазіциклу), як правило, застосовується візуальний аналіз

тенденцій кривої V-статистики. Він полягає у виявленні точок зміни тенденцій, що може сигналізувати про закінчення циклу, а також інтервалів зростання, стабілізації і спадання кривої, що при збільшенні числа спостережень визначає тяжіння процесу до персистентного або випадкового. Зростання V-статистики при збільшенні числа спостережень вказує на персистентність поточної ділянки ряду, а стабілізація – на переважання білого шуму. V-статистика розраховується за формулою:

$$V_{\tau} = \frac{R_{\tau}}{\sqrt{\tau} S_{\tau}}, \quad (1)$$

де R_{τ} – розмах; S_{τ} – середньоквадратичне відхилення, $\tau = 3, 4, \dots, n$.

У роботі [3] вказано, що момент зміни тенденції графіка V-статистики, що виражається залежністю V_{τ} від $\lg(\tau)$ вказує на довжину як періодичного, так і неперіодичного циклу.

Методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів

Методика передпрогнозного аналізу складається з таких алгоритмів:

- розрахунку показника Херста на основі послідовного R/S-аналізу часового ряду;
- визначення середньої довжини неперіодичного циклу й ідентифікація «довгої пам'яті» в часовому ряді;
- відбору активів для торгівлі на основі розрахованих за R/S-аналізом показників.

Наведемо описання вказаних алгоритмів, ілюструючи розрахунки для конкретної задачі. Нехай задано часовий ряд цін на бензин (NYMEX) за період з 03.09.2007 по 05.03.2010 р., щоденні дані по цінах закриття, довжина ряду становить 775. Позначимо його через $\bar{Z} = \{z_i\}_{i=1}^{n+1}$. Необхідно провести передпрогнозний аналіз цього ряду.

Крок 1. Візуалізуємо заданий часовий ряд, тобто побудуємо ціновий графік (рис. 1).

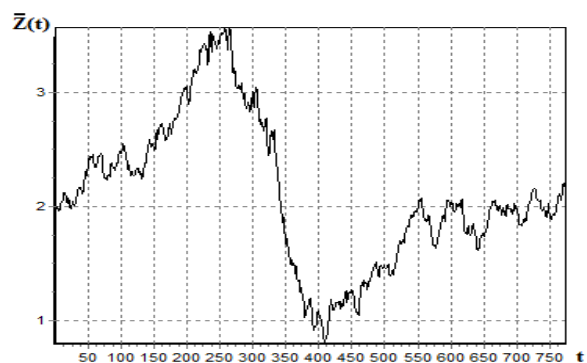


Рис. 1. Часовий ряд цін на бензин (NYMEX)

Крок 2. Реалізуємо процедуру послідовного R/S-аналізу. Розрахуємо показник Херста.

Для знаходження показника Херста будемо розглядати часовий ряд, який є результатом логарифмування вхідного ряду \bar{Z} . Ця вимога, що описана в роботі [3], не є обов'язковою. Позначимо новий часовий ряд через $Z = \{z_i\}_{i=1}^n$,

де $z_i = \frac{\lg(\bar{z}_i)}{\lg(\bar{z}_{i-1})}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 2).

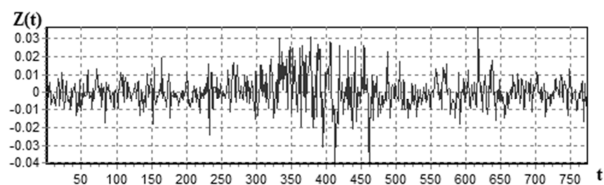


Рис. 2. Часовий ряд цін на бензин після перетворення

Наступним етапом є розрахунок розмаху R_τ і середньоквадратичного відхилення S_τ для кожного з відрізків $\{z_i\}_{i=1}^\tau$ довжини $\tau = 3, 4, \dots, n$. Введемо позначення $X = (x_3, x_4, \dots, x_n)$, де $x_\tau = \lg(R_\tau)$ і $Y = (y_3, y_4, \dots, y_n)$, де $y_\tau = \lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$, $\tau = 3, 4, \dots, n$ і припустимо, що між факторами X та Y існує лінійна залежність, тобто $Y = a + bX$. Ідентифікуємо значення коефіцієнтів a і b з умови

мінімізації функції $\sum_{\tau=3}^n (y_\tau - (a + bx_\tau))^2 \rightarrow \min$ за

методом найменших квадратів (деталі методу див. [11]). В результаті для часового ряду Z отримали такі оцінки: $a = -0.549$, $b = 0.783$. Оцінка коефіцієнта b буде показником Херста часового ряду Z , тобто $H = 0.783$. Коефіцієнт детермінації становить $R^2 = 0.9198$.

Для ряду Z побудуємо на одному графіку R/S- і H-траєкторії та лінію регресії $Y = -0.549 + 0.783 \cdot X$ (рис. 3).

Крок 3. Перевірка гіпотези про значущість показника Херста для ряду Z .

Особливістю розрахованої статистики є те, що для невеликого τ вона характеризується незначним відхиленням. Для перевірки значущості показника Херста з врахуванням відхилень статистики скористаємось підходом, запропонованим в роботі [12]. Розрахуємо значення

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\tau-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)} \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau-i}{i}}, \quad (2)$$

що відповідає істинності основної гіпотези про випадковість часового ряду Z . Оскільки для великих значень τ значення гамма-функції $\Gamma(\circ)$

швидко зростає, в роботі [3] для $\tau > 300$ пропонується використовувати функцію Стірлінга:

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi(\tau-1)}} \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau-i}{i}}. \quad (3)$$

Для ряду Z , який розглядається, теоретичний показник $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$ (2); (3) становить 0.5452.

Отже, оскільки показник Херста для даного ряду $H = 0.783$, то гіпотеза про його випадковість відкидається. Значення показника Херста H вказує на те, що вхідний часовий ряд Z персистентний, а процес, що описується даним часовим рядом характеризується наявністю довготривалої пам'яті та має трендостійкий характер.

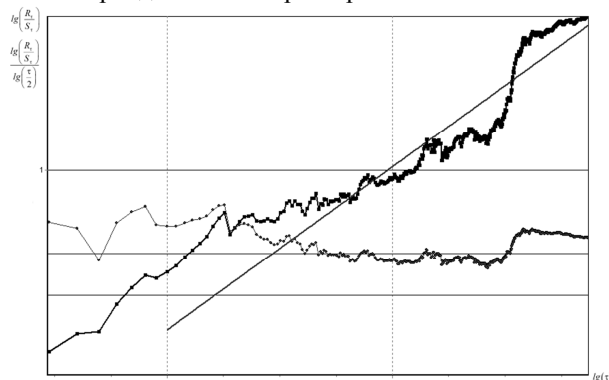


Рис. 3. R/S- (чорним кольором) та H- (сірим) траєкторії для часового ряду Z

Крок 4. Розрахунок середньої довжини неперіодичного циклу.

Критерій визначення довжини неперіодичного циклу на основі V-статистики

Критерій базується на згладжуванні кривої V-статистики та ідентифікації моментів зміни початкової тенденції кривої з врахуванням згладжених значень. Згладимо ряд V_τ , $\tau = 3, 4, \dots, n$ за допомогою звичайної плинної середньої з періодом p за формулою:

$$s_{\tau+p} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} V_{\tau+p-j}, \quad \tau = 3, 4, \dots, n-p \quad (4)$$

та адаптивної плинної середньої Кауфмана за формулою:

$$a_t = c_t V_t + (1 - c_t) a_{t-1}, \quad (5)$$

де $c_t = (E_t(f-s) + s)^2$, $E_t = \frac{V_t - V_{t-r}}{\sum_{i=0}^{r-1} |V_{t-i} - V_{t-i-1}|}$ –

коефіцієнт ефективності як відношення загального руху ціни до суми абсолютних значень шумового руху ринку за період r , $t = \tau + r, n$, f , S – відповідно швидкий і повільний коефіцієнти згладжування:

$$f = \frac{2}{p_1 + 1}, \quad s = \frac{2}{p_2 + 1}, \quad p_1 < p_2.$$

Довжина неперіодичного циклу дорівнює k , якщо в момент k виконуються умови:

1. Починаючи з моменту k , фіксується падіння індексу Кауфмана принаймні протягом двох наступних точок, тобто $a_k > a_{k+1} > a_{k+2}$. Зазначимо, що до k -ї точки індекс Кауфмана повинен монотонно зростати, що пояснюється поведінкою V -статистики.

2. Звичайна плинна середня в цей момент не перевищує значення індексу Кауфмана, тобто $s_k < a_k, s_{k+1} < a_{k+1}$.

3. Фіксується різка зміна тенденції V -статистики зі зростання на падіння: $V_{k-1} < V_k, V_k > V_{k+1}$. При цьому значення V -статистики в k -й точці досягає локального максимуму, перевищуючи значення простої плинної середньої та індексу Кауфмана: $V_k > a_k > s_k$.

Вибір в якості фільтра плинної Кауфмана пояснюється адаптивним характером її коефіцієнтів. Таким чином, система за умови використання даного критерію може розраховувати величину неперіодичного циклу без втручання людини, тобто в автоматичному режимі.

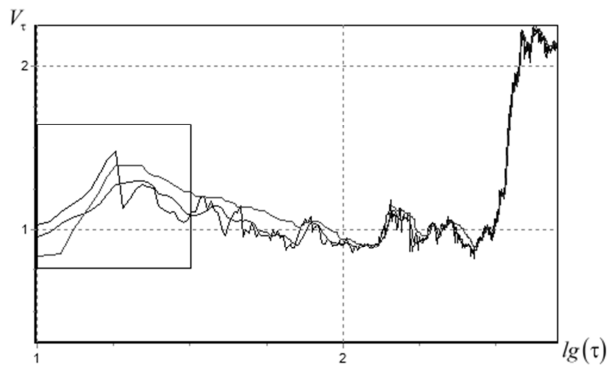


Рис. 4. Графік V -статистики та плинних середніх:
 $p = 7, r = 4, p_1 = 3, p_2 = 10$

Необхідно зазначити, що вісь абсцис для графіка, на якому будуються V -статистика і плинні середні являє собою прологарифмовані значення τ , тобто після отримання моменту, для якого виконуються вказані умови: точку з осі абсцис x_k , необхідно скористатися формулою $k = 10^{\lg(x_k)}$.

За графіком V -статистики і плинних середніх для ряду, який досліджується, можна побачити, що вказані умови виконуються для $x_k = 1.255$, тобто величина неперіодичного циклу для даного ряду $10^{\lg(1.255)} \approx 18$ (рис. 4). Слід зазначити, що перевірка умов повинна здійснюватись починаючи з точки $k = 10, x_k = 1$, так як і побудова лінії регресії для визначення показника Херста. Це емпіричне правило сформульоване в роботі [3].

Критерій визначення середньої довжини неперіодичного циклу на основі поведінки H -та R/S -траєкторій

Відомо, що момент перелому або різкої зміни початкової тенденції H -траєкторії, як правило, з такої, що зростає, на таку, що спадає, за умови, що R/S -траєкторія попередньо змінила свою початкову тенденцію, вказує на довжину циклу.

Позначимо через $F(Z)$ сімейство рядів фіксованої довжини m , кожен з яких будується з вхідного часового ряду Z методом плинного вікна, тобто ряди $\{z_i\}_{i=1}^m, \{z_i\}_{i=2}^{m+1}, \dots, \{z_i\}_{i=n-m+1}^n$. Для кожного з цих рядів застосуємо процедуру послідовного R/S -аналізу, побудуємо відповідні H - та R/S -траєкторії і визначимо довжину циклів $k_j, j = \overline{1, n-m+1}$ з умови: точка k_j буде відповідати довжині циклу для часових рядів $\{z_i\}_{i=j}^{m+j-1}$, якщо H -траєкторія в точці k_j+1 або k_j+2 перетинає R/S -траєкторію. При цьому обидві траєкторії змінюють попередню тенденцію на спадання починаючи з точки k_j , тобто $H_{k_j+1} < H_{k_j}$ і $(R/S)_{k_j+1} < (R/S)_{k_j}, (R/S)_{k_j+2} > (R/S)_{k_j+1}$ і R/S -траєкторія не знаходиться в зоні антиперсистентності, тобто $(R/S)_{k_j} > 0.5$.

Далі побудуємо гистограму розподілу довжин циклів k_j для сімейства часових рядів $\{z_i\}_{i=j}^{m+j-1}, j = \overline{1, n-m+1}$. На основі гистограми можна оцінити середню довжину циклу. Для вхідного ряду медіана становить 18, а середнє значення – 18.81, тобто середня довжина циклу становить 18 робочих днів.

Кожен з описаних критеріїв показує високу ефективність встановлення величини циклів під час роботи в автоматичному режимі.

Крок 5. Дослідження поведінки показника Херста в динаміці.

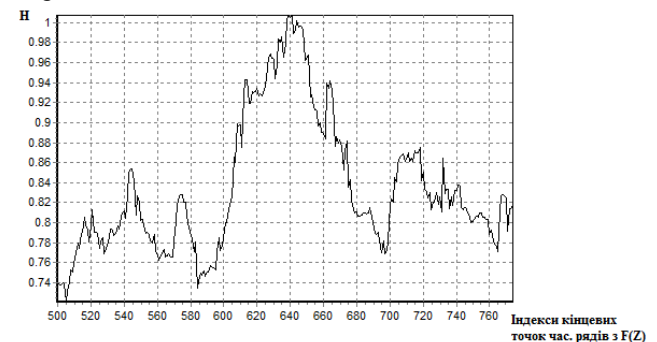


Рис. 5. Графік поведінки пок. Херста в динаміці

З метою більш детального аналізу часового ряду пропонується досліджувати поведінку показника Херста в динаміці. Результати цього дослідження можуть використовуватись для

розбиття ряду на ділянки за рівнем їх персистентності. Це дозволяє прослідкувати поточний розвиток процесу і спрогнозувати його на майбутнє. Плинний показник являє собою функцію, яка будується за показниками Герста для сімейства рядів $F(Z)$, які утворюються з досліджуваного часового ряду Z методом плинного вікна. Для часового ряду, який досліджується, графік зміни показника Херста (рис. 5) демонструє те, що часовий ряд персистентний як загалом, так і на локальних відрізках ($m = 500$).

Крок 6. Визначення інвестиційної якості активу, який представляється фінансовим часовим рядом.

Задача формулювання на основі R/S-аналізу критерію відбору активів, що представляються часовими рядами для торгівлі, також може ставитися з точки зору оцінки ризику фінансового інвестування у дані активи. Ця задача може бути використана для побудови критеріїв відбору активів до інвестиційного портфелю. Задача, яка ставиться перед суб'єктом ризику, в даному випадку інвестором, полягає у виборі з множини можливих активів таких, інвестування фінансових ресурсів в які забезпечило б максимальний економічний ефект відповідно до вимог суб'єкта з врахуванням фінансових ризиків.

Нехай кожному активу ставиться у відповідність ретроспективна інформація у вигляді часового ряду цін на даний актив. Актив називається інвестиційно-якісним, якщо:

- фінансовий часовий ряд є рядом з довготривалою пам'яттю;
- поведінка показника Херста в динаміці демонструє стійку персистентність на ділянці ряду, яка передує входу інвестора на ринок;
- при високих значеннях показника Херста та за умови наявності коротких циклів можна стверджувати, що ринок зростає, і навпаки, якщо значення показника Херста низькі, то у випадку наявності довгих циклів, можна стверджувати, що ринок спадає.

Висновки

У роботі запропоновано методику передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, сформульовані критерії для визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів та інших фрактальних характеристик. Результати аналізу можуть бути застосовані інвесторами та аналітиками для відбору найбільш інвестиційно-якісних, активів, які представляються фінансовими часовими рядами.

На основі проведених досліджень за допомогою комп'ютерного моделювання було підтверджено, що більшість часових рядів, які характеризують розвиток економічних процесів є більш або менш персистентними і наділені

довготривалою пам'яттю про свої початкові умови. Також слід зазначити, що якщо H-траєкторія для малих значень τ деякого часового ряду демонструє різку зміну тенденції на спадання, причому значення H_τ опиняються нижче рівня $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$,

це може свідчити про те, що ряд не належить до часових рядів з довгою пам'яттю. Але остаточний висновок можна зробити, врахувавши показник Херста, який в цьому випадку буде близьким або меншим за теоретичний показник $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$.

Список літератури

1. Mandelbrot B. *Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis// Annals of Economic and Social Measurement.* – 1972. – N 1. – P. 259-290.
2. Mandelbrot B.B., Hudson R. L. *The (mis)behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward.* – New York, N.Y.: Basic Books, 2004. – 328 p.
3. Peters E. E. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics.* – John Wiley & Sons, Inc, 1994. – 336 p.
4. Федер Е. *Фракталы: пер. с англ./ Е. Федер.* – М.: Мир, 1991. – 254 с.
5. Максишко Н.К. *Анализ и прогнозирование эволюции экономических систем/ Н.К. Максишко, В.А. Перепелица, Запорожский нац. ун-тет.* – Запорожье: Полиграф, 2006. – 236 с.
6. Кириченко Л.О. *Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа/ Л. О. Кириченко, Ж. В. Дейнеко // Радиоелектр. і комп. системи.* – 2009. – № 4 (38). – С. 99–105.
7. Даниленко В.А. *Альтернативні методики проведення фрактального аналізу / В.А. Даниленко // Економіка промисловості.* — 2010. — № 2. — С. 8-12.
8. Parzen E. *Long memory of statistical time series modeling // Texas A&M University, NBER/NSF Time Series Conference, 2004.* – 10 p.
9. Hurst, H.E. *Long-Term Storage Capacity of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers.* – 116. – 1951. – P. 770-799.
10. Mandelbrot B.B. *When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale // Models Review of Economics and Statistics.* – 53, 3. – 1971. – P. 225-236.
11. Снитюк В.Є. *Прогнозування. Моделі. Методи. Алгоритми: Навч. пос. К.: «Маклаут», 2008.* – 364 с.
12. Anis A., Lloyd E. *The expected value of the adjusted rescaled Hurst Range of independent normal summands// Biometrika.* – 1976. – Vol. 63. – P. 111-116.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Й.Г. Головач, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород.