

УДК 330.33.015:336.77

С. Рибальченко, асист. (КНУ імені Тараса Шевченка)

ПЕРЕВАГИ СУБ'ЄКТИВНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ НЕОДНОРІДНОГО СТРАХОВОГО ПОРТФЕЛЮ

Розглянуто та проаналізовано складні та специфічні випадки структури страхового портфелю. Визначено функції розподілу, що характеризують дійсні значення показників діяльності страхової компанії та ризику найбільш точно. Розроблено рекомендації для апроксимації суб'єктивної функції розподілу. Аналіз проведено на основі реальних показників діяльності страхової компанії.

Ключеві слова: страховий портфель, функція розподілу, ймовірність, ризик у страхуванні, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес.

Рассмотрено и проанализировано сложные и специфические случаи структуры страхового портфеля. Определены функции распределения, которые характеризуют действительные значения показателей деятельности страховой компании и риска наиболее точно. Разработаны рекомендации для аппроксимации субъективной функции распределения. Анализ проведен на основе реальных показателей деятельности страховой компании.

Ключевые слова: страховой портфель, функция распределения, вероятность, риск в страховании, математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс.

It is considered and analysed sophisticated and special cases of insurance portfolio structure. Distribution functions which describe the actual values of insurance company performance and risk indicators most exactly are defined. Recommendations are developed for approximation of subjective distribution function. An analysis is conducted by using of the real performance of insurance company indicators.

Keywords: insurance portfolio, distribution function, probability, risk in insurance, mean, dispersion, asymmetry, excess.

Динамічність економічної системи загалом та сфери страхування зокрема обумовлюють необхідність у розробленні методологічної бази аналізу даного виду діяльності. На даному етапі провідні страхові компанії України для дослідження своєї діяльності користуються послугами європейських компаній, оскільки в нашій країні ще не розроблено дієвої методики актуарного аналізу всіх напрямів страхування, яка б могла на рівних конкурувати із західними аналогами. Та кожна система характеризується власною специфікою, тому варто зосередитись на аналізі та розробці релевантних методів аналізу страхового бізнесу України.

В умовах непередбачуваної динамічної економіки, що склалася в нашій країні, страхування несе надзвичайно велику суспільну функцію, а саме: робить нас менш безпорадними перед надзвичайними ситуаціями. У зв'язку з тим, що страхові компанії беруть на себе більшість як економічних так і природних ризиків, яким піддаються юридичні та фізичні особи, виникає необхідність постійної оцінки загального ризику діяльності страхової компанії, адже від успішності страхової компанії залежить кожен її клієнт.

Більшість знавців економіко-математичного моделювання зробили вагомий внесок у розвиток вітчизняних розробок в сфері актуарної математики. Серед них можна виділити Черняк О.І. (апроксимація ймовірності банкрутства компанії) [14], Вітлінський В.В. (вдосконалює методи міри ризиків у страхуванні) [4], Мішура Ю. (застосування стохастичного моделювання) [8], Карташов М. (аналіз процесів Маркова в страхуванні) [7].

Але переважна більшість вітчизняних робіт орієнтовані на апроксимацію праць зарубіжних вчених. Широкий спектр проблем страхування вже досліджено за кордоном, найбільша увага приділяється обґрунтуван-

ню вибору функції розподілу ймовірностей для моделювання страхової діяльності. Значний внесок у розвиток актуарної науки та моделювання загалом зробили Е. Слад [11], К. Бурнеці [3], Д. Гренделл [6], Т. Рольські [10], Н. Бауерс [2], Х. Гербер [5], І.Т. Балабанов [1], Г.І. Фалін [12] та інші.

Метою роботи є дослідження властивостей портфелю страхової компанії, що фокусується на двох і більше нішах ринку та вибір оптимальних розподілів для моделювання ризиків у страхуванні, вироблення методології апроксимації функції що забезпечує найбільшу точність при моделюванні ризиків страхової компанії.

Кожна фінансова страхова величина генерується по певному розподілу, і саме вибір адекватного розподілу є центральною проблемою будь-якої моделі страхової компанії.

Більшість іноземних дослідників в своїх роботах зупиняють свою увагу на наступні розподіли:

- Лог-Нормальний розподіл
- розподіл Паретто
- Гамма розподіл
- розподіл Кокса
- розподіл Вейбулла
- Розподіл Бурра

Переважна більшість дослідників використовує один з перелічених вище розподілів, хоча як показано їхнє застосування не завжди буде виправданим. Тому постає необхідність у виробленні методики побудови власного розподілу, для кожного окремо взятого випадку. Тобто, ми маємо загальні умови для функцій розподілу ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx = m, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \right)^2 = \sigma^2, \quad (1)$$

де m – математичне сподівання, σ^2 – дисперсія.

Беремо певну функція, що відповідає умовам форми розподілу, наприклад:

$$f(x) = x^2 e^{-x}. \quad (2)$$

Тепер вводимо у функцію параметри, та підбираємо їх таким чином, щоб виконувались всі умови та сума квадратів похибок між значеннями отриманими з-за

допомогою даного розподілу і дійсними даними були найменшими. Розв'язавши систему рівнянь отримаємо виведену суб'єктивну функцію розподілу релевантну саме для портфелю нашої компанії.

Але це ж звичайно не межа точності. Розглянемо наступну ілюстрацію:

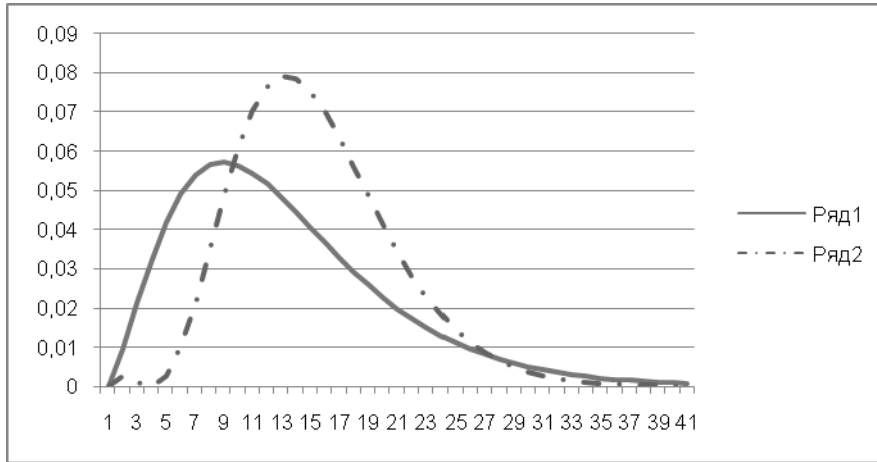


Рис. 1. Співвідношення двох щільностей функцій розподілу

Отже, наведено наступні дві щільності функцій розподілу:

$$\text{Ряд 1} - f(x) = x * (x + a) * e^{-\frac{x}{\delta}}, \quad (3)$$

$$\text{Ряд 2} - f(x) = x * \ln(x + \alpha)^2 * (x - \beta)^2 * e^{-\frac{x * \gamma}{\delta}}, \quad (4)$$

де a, b, α, β, γ, δ – параметри.

Дані функції характеризуються однаковими математичними сподіваннями та дисперсіями, тобто задовольняють раніше висунуті умови. Опираючись на це можна зробити висновок, що обидві функції чудово підходять для моделювання страхової діяльності. В той ж час, очевидно, що одна з двох зазначених функцій розподілу забезпечить меншу похибку при моделюванні окремо взятої страхової компанії. Даний факт спричинений різним характером форми "хвостів" розподілів. В результаті моделювання, наприклад, страхових премій обома функціями по черзі ми отримаємо відносно однакові загальні суми премій але абсолютно різні частки премій величиною до 1000 грн. і премій більших за 100000 грн.

Тоді, орієнтирами при виборі більш відповідної функції розподілу можуть бути наступні способи:

- орієнтація на показники асиметрії та ексцесу,
- мінімізація відхилень ймовірностей по стратам

Перший спосіб являє собою фактичне додавання до умови (1) двох умов рівності показників асиметрії та ексцесу нового розподілу ймовірностей раніше розра-

хованим аналогічним показником для історичних даних компанії. Це дозволяє зробити більш усвідомлений та оптимальний вибір функції розподілу ймовірностей в більшості випадків, але не завжди.

Розглянемо більш детально рис. 1. Бачимо, що функція, проілюстрована рядом 2 має два локальні екстремуми. Таких екстремумів може бути декілька. Яка їхня практична природа? Компанія може зосереджувати свої зусилля на декількох основних стратах споживачів. Це призводить до виникнення таких піків. Наприклад, компанія концентрується на найбільш широкій страті споживачів – середній, а також на преміум класі. Виникне пік розподілу у "хвості" з права. Це, звичайно ж, також потрібно змодельовувати, в іншому разі можливе виникнення катастрофічних похибок, бо саме непередбачені страхові випадки в межах преміум-класу можуть стати катастрофічними для компанії.

Такі проблеми можна вирішити скориставшись наступним способом мінімізація відхилень ймовірностей по стратам. Весь спектр показника, що моделюється, наприклад, страхових премій розбивається на страти (проміжки). Найбільш загальною ознакою стратифікування є величина премій. Тоді будуюмо гістограму страхових премій, де отримаємо показник частоти даної премії, який можна інтерпретувати як ймовірність надходження середньої по даній страті премії.

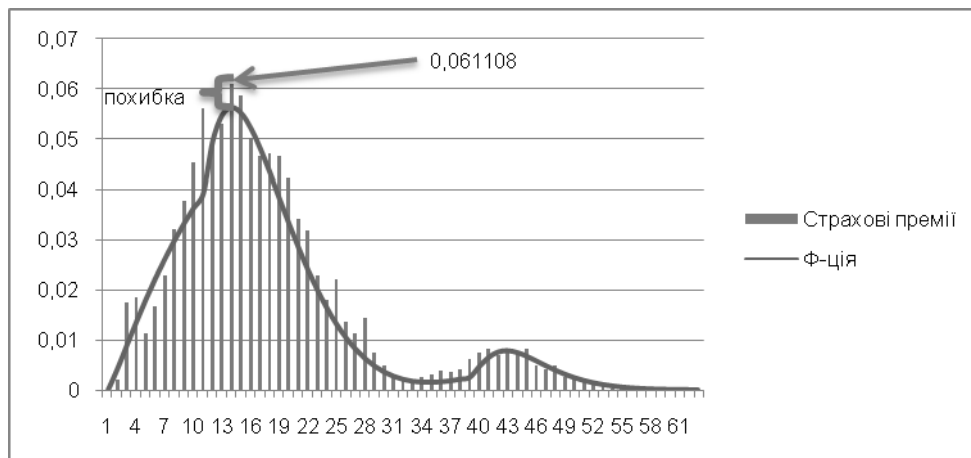


Рис. 2. Побудова щільності функції розподілу та гістограми для страхових премій

На рис. 2. зображено гістограму для дійсних даних страхових премій – ряд 1, та щільність функції розподілу, описаній співвідношенням (4) – ряд 2. Можемо по-

бачити, що для страхових премій даної компанії є характерним локальний екстремум з права.

Страта №14 має частоту рівну 6,1%, а відповідна ймовірність середньої премії по страті є рівною 5,64%. Отже, похибка для даної страти склала 0,46%. Можна поставити додаткові до (1) умови по кожній страті, що квадрат похибки є меншим ϵ ($\epsilon=0,0001$ як приклад). Але це значно збільшує розмірність такої системи умов і не завжди можна знайти розв'язок такої системи. Як показує практика таким чином можна поступати при існуванні двох-трьох найважливіших страт, для них і додаються такі умови. Якщо ж таких страт більше, то доцільно мінімізувати суму квадратів похибок по стратах.

Якщо на гістограмі показника локальний екстремум один, то перший та другий спосіб абсолютно не суперечать а доповнюють один одного. Тому можна користатись ними і одночасно для більшої достовірності інформації.

Альтернативним шляхом є розбиття портфелю при моделюванні на два окремих. Тобто, якщо розглядаємо авто страхування, то на звичайне страхування і страхування преміум-авто. Страхові випадки з авто елітного класу несуть в собі завищений ризик ліквідності, а тому контракти в преміум класі характеризуються вищим тарифом. Саме через зміну тарифів і виникає другий екстремум.

В результаті розбиття отримаємо:

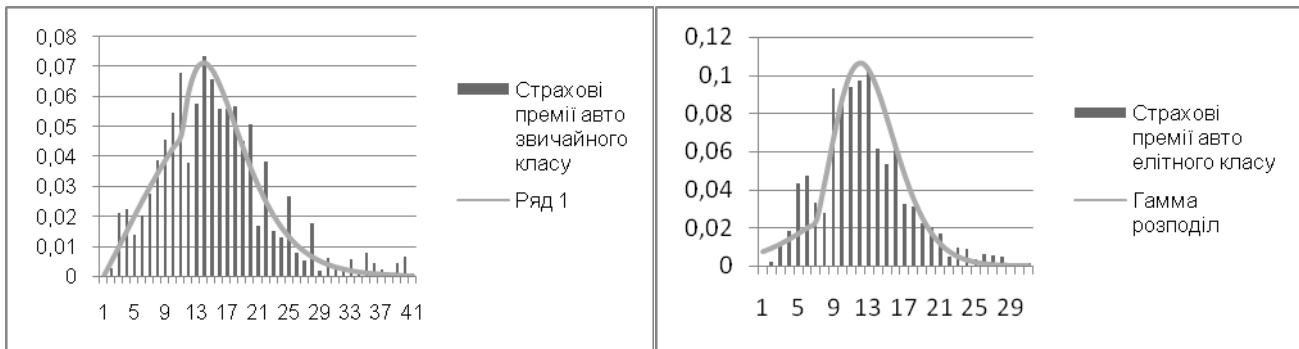


Рис. 3. Щільності функції розподілу та гістограми для страхових премій по авто звичайного (а) та елітного класу (б)

У випадку коли розглядається окремо портфель страхування авто звичайно класу (Рис. 3а), то для моделювання використовується функція (3). Для моделювання портфелю страхування преміум-авто (Рис. 3б) використано Гамма-розподіл.

Розрахуємо суму квадратів похибок для кожного випадку (моделювання неоднорідного загального портфелю і розділених портфелів).

Таблиця 1. Похибки моделювання страхових портфелів

Портфель	Сума квадратів похибок
Неоднорідний загальний	0,001101
Звичайне авто	0,002806
Елітне авто	0,004646

Як бачимо розбиття портфелю абсолютно не знизило похибку моделювання, а навпаки сума похибок моделювання окремих портфелів значно перевищує похибку моделювання загального неоднорідного портфелю.

Враховуючи і вищу складність аналізу та моделювання окремих портфелів отримаємо обґрунтований результат переваги моделювання загального неоднорідного портфелю введеною суб'єктивною функцією розподілу ймовірностей.

Результати роботи несуть в собі значну практичну та наукову новизну. Наукова полягає в отриманні нових моделей аналізу страхового бізнесу. А практична у отриманих результатах, що можуть прямо використовуватись при розробленні управлінських рішень.

1. Балабанов І.Т. Ризик-менеджмент [Текст] / І.Т. Балабанов – М: Фінанси і статистика, 1996. – 192с. 2. N. Bowers Actuarial Mathematics Society of Actuaries [Текст] / N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones C. Nesbitt| Itasca – 1986. – №3 – р. 31-38. 3. Krzysztof Burnecki1 An Introduction to Simulation of Risk Processes [Текст] / K. Burnecki1, W. Hurdle, R. Weron – Hugo Steinhaus Center, Wrocław University of Technology, 2001 – 95р. 4. Вітлінський В.В. Ризикологія в економіці та підприємстві [Текст] [Монографія] / В.В. Вітлінський – К.: КНЕУ, 2004.

– 480 с. 5. Gerber. H. Life Insurance Mathematics [Текст] / Gerber. H. // Springer-Verlag – New York, 1997. – №3. – р. 84-89. 6. J. Grandell Calculation of Ruin Probabilities when the Premium Depends on Current Reserve [Текст] / J. Grandell, R. Norberg, H. Ramlau-Hansen // Scandinavian Actuarial Journal. – 1989. – № 3. – р. 147 – 159. 7. Карташов М.В. Процеси Маркова в актуарній математиці [Текст] / М.В. Карташов – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 110 с. 8. Мішура Ю.С. Наближене розв'язування нескінченно-вимірних стохастичних диференціальних рівнянь [Текст] / Ю.С. Мішура, Г.М. Шевченко – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 320 с. 9. Рибальченко С.А. Функції розподілу параметрів діяльності страховиків [Текст] / С.А. Рибальченко//Культура народів Причорномор'я. – 2010. – №178 – ст.176–181. 10. T. Rolski Stochastic Processes for Insurance and Finance [Текст] / T. Rolski, H. Schmidl, V. Schmidt, J.L. Teugels – Wiley, Chichester, 1999. – 550 p. 11. Eric V. Slud Statistics Program [Текст] / Eric V. Slud – Mathematics Department University of Maryland, College Park, MD 20742, 2001. – 80 p. 12. Фалин Г.И. Введение в актуарную математику [Текст] / Г.И. Фалин, А.И. Фалин – М., МГУ, 1994. – 130с. 13. P. Cizek Statistical Tools for Finance and Insurance [Текст] / P. Cizek, W. Hardle, R. Weron – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 527 p. 14. Черняк О.І Оцінка ймовірності банкрутства страхових компаній методом послідовних наближень в марківському середовищі [Текст] / О.І. Черняк, В.В. Шпирко, Д.О. Щур // Вісник Львівської державної фінансової академії. – 2006. – №10. – С.358-365.

Надійшла до редколегії 22.12.11