

1. Anisimov V.V. and Artalejo J.R. Approximation of multiserver retrial queues by means of generalized truncated models. Top (2002), vol. 10, Num.1 (2002), pp. 51–66. 2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. – Springer, 2008, 318 p. 3. Artalejo J.R. and Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. Revista matemática Complutense (2002) vol. XV, num. 1, pp.101–129. 4. Falin G. I. and Templeton J. G. C. Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p. 5. Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08), Lijiang, China; October 31–November 3, 2008, pp. 237–247. 6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети. // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – № 2. – С. 25–31. 7. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами. // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1. – С. 25–30. 8. Лебедев С.О., Прищеп О.В. Стохастичні системи із повторними викликами та нетерплячими вимогами. Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки – Вип. 2, 2007. – С. 169–173. 9. Лебедев С.О., Прищеп О.В. Системи з повторними викликами, нетерплячими вимогами та керуванням вхідним потоком. // Журнал Обчислювальної та прикладної математики, Вип. 2(95), 2007. – С. 59–64. 10. Уолфранд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. – М.: Мир, 1993. – 336 с.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 517.929

Т. И. Шакоцько, инж., Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ ВОЛЬТЕРРА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрено математические модели динамики популяции, которые описаны двумя дифференциальными уравнениями с квадратичной правой частью. Вычислены точки спокойствия, определен их тип. Введено запаздывание. Показано, что стационарное состояние равновесия неустойчивое. Приведены результаты численного моделирования.

The mathematical models of the population dynamics are considered which are described by two differential equations with quadratic right side. Calculated stationary points and specified their type. We get the delay. The stationary state of equilibrium position is unstable as shown. The results of numerical modeling are shown.

Введение. Рассмотрим математическую модель популяции, предложенную В.Вольтерра [1–3]. Она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием с квадратичной правой частью. Построим фазовые портреты систем без запаздывания. Далее рассмотрим влияние запаздывания [4–6]. Учитывая специфику уравнений с последствием, построение фазового портрета системы с запаздыванием вызывает затруднение. Поэтому фазовый портрет системы с запаздыванием строится в предположении, что начальные условия для решений системы с запаздыванием представляют собой постоянные значения ("система с замороженными начальными условиями").

1. Построение фазового портрета системы. Построение фазового портрета нелинейной системы на плоскости будет проводиться следующим образом.

- Находятся особые точки.
- Строятся фазовые портреты каждой из особых точек в отдельности.
- Находятся периодические решения (циклы) и строятся их фазовые портреты.
- Производится "сшивание" отдельных фазовых портретов в фазовый портрет системы в целом.

Следует отметить, если для нахождения особых точек требуется решать системы нелинейных (квадратичных) уравнений, то конструктивные алгоритмы нахождения периодических траекторий отсутствуют. Фазовый портрет в окрестности особой точки $O_0(x_0, y_0)$ строится методом линеаризации. Пусть исходная нелинейная система имеет вид

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Нелинейные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в окрестности особой точки $O_0(x_0, y_0)$ раскладывают в ряд с точностью линейного приближения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + R_1(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Поскольку $O_0(x_0, y_0)$ особая точка, то $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$. Обозначив

$$\left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = a_0, \quad \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = b_0, \quad \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = c_0, \quad \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = d_0$$

и отбросив нелинейные члены, получаем систему, линейного приближения в точке $O_0(x_0, y_0)$

$$\dot{x} = a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0), \quad \dot{y} = c_0(x - x_0) + d_0(y - y_0), \quad (1.1)$$

или

$$\frac{d}{dt} z(t) = A_0 z(t), \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Если собственные числа линеаризованной системы имеют ненулевые действительные части, то в достаточно малой окрестности положения равновесия $O(x_0, y_0)$ фазовый портрет линеаризованной системы топологически эквивалентен фазовому портрету исходной нелинейной системы [7].

2. Модель Вольтера (простая) без запаздывания. Предварительно рассмотрим классическую модель "хищник-жертва" без учета запаздывания (времени полового созревания)

$$\dot{x}(t) = [a - cy(t)]x(t), \quad \dot{y}(t) = -[d - gx(t)]y(t). \quad (2.1)$$

Предполагается, что все параметры положительные, т.е.

$$a > 0, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad g > 0.$$

Точки покоя (стационарные точки) определяются из системы уравнений

$$[a - cy]x = 0, \quad [d - gx]y = 0 \quad (2.2)$$

и равны $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{d}{g}$, $y_2 = \frac{a}{c}$, т.е. система имеет две точки покоя.

2.1. Система (2.1), линеаризованная в точке $O_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1z(t), \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

Ее собственными числами будут

$$\lambda_1 = a > 0, \quad \lambda_2 = -d < 0.$$

Положение равновесия – седло. Сепаратрисами будут: $x = 0$ - устойчивая сепаратриса, $y = 0$ - неустойчивая сепаратриса.

2.2. Система, линеаризованная в точке $O_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [a - cy_2](x(t) - x_2) - cx_2(y(t) - y_2), \\ \dot{y}(t) &= gy_2(x(t) - x_2) - [d - gx_2](y(t) - y_2). \end{aligned}$$

После подстановки значений точки $O_2(x_2, y_2)$, получаем

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_2(z(t) - z_2), \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c\frac{d}{g} \\ g\frac{a}{c} & 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{g} \\ \frac{a}{c} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа будут чисто мнимыми

$$\lambda_1 = i\sqrt{ad}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{ad}.$$

Положением равновесия (критический случай) могут быть либо центр, либо фокус (устойчивый или неустойчивый). Многочисленными исследованиями (например, [1]) показано, что положением равновесия является центр.

Пример 2.1. Рассмотрим систему уравнений с параметрами $a = 2$, $c = 2$, $d = 2$, $g = 2$. Фазовый портрет системы в целом, соответствующий этим параметрам, изображен на рис 2.1.

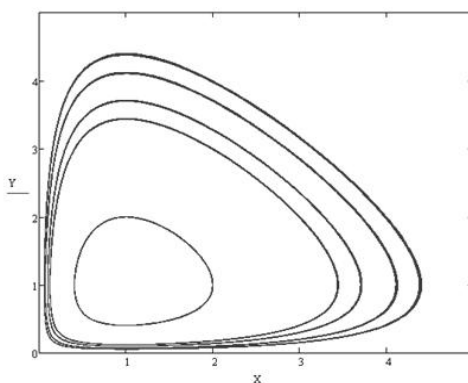


Рис. 2.1 Динамика системы Вольтера без запаздывания

3. Модель Вольтера (простая) с запаздыванием. Далее рассмотрим модель "хищник-жертва", учитывающую время полового созревания, т.е. модель с запаздыванием. Она имеет вид

$$\dot{x}(t) = [a - cy(t - \tau)]x(t), \quad \dot{y}(t) = -[d - gx(t - \tau)]y(t). \quad (3.1)$$

Как и в предыдущем случае, все параметры положительные, т.е. $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $g > 0$.

Точки покоя (стационарные точки) определяются из системы уравнений (2.2)

Они равны $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{d}{g}$, $y_2 = \frac{a}{c}$.

3.1. Система (3.1), линеаризованная в точке $O_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t), \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

и является системой без запаздывания. Как и в предыдущем случае, положением равновесия является седло с сепаратрисами, являющимися осями координат.

3.2. Система, линеаризованная во второй точке $O_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = B_2(z(t-\tau) - z_2), \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c \frac{d}{g} \\ g \frac{a}{c} & 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{g} \\ \frac{a}{c} \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическим уравнением является

$$\det\{A - \lambda E\} = \begin{vmatrix} -\lambda & -c \frac{d}{g} e^{-\lambda\tau} \\ g \frac{a}{c} e^{-\lambda\tau} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 e^{-2\lambda\tau} = 0, \quad \omega = \sqrt{ad}.$$

Исследуем расположение корней полученного характеристического квазиполинома

$$\lambda^2 + \omega^2 e^{-2\lambda\tau} = 0. \quad (3.2)$$

Представим полученное характеристическое (3.2) уравнение в виде

$$(\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau})(\lambda - i\omega e^{-\lambda\tau}) = 0.$$

Уравнение распадается на два

$$\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau} = 0, \quad \lambda - i\omega e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что если λ_0 является решением одного из уравнений, то $\bar{\lambda}_0$ будет решением другого. Поэтому будем рассматривать только второе из уравнений. Его решение ищем в виде $\lambda = u + iv$. Подставив в уравнение, получаем

$$u + iv = i\omega e^{-u\tau} (\cos v\tau - i \sin v\tau).$$

Разделив действительную и мнимую части, запишем систему двух уравнений относительно переменных u, v .

$$ue^{u\tau} = \omega \sin v\tau, \quad ve^{v\tau} = \omega \cos v\tau = 0. \quad (3.4)$$

После замены $x = u\tau, y = v\tau, \omega_1 = \omega\tau$ получаем

$$xe^x = \omega_1 \sin y, \quad ye^y = \omega_1 \cos y. \quad (3.5)$$

Покажем, что система (3.5) имеет хотя бы одно решение (x_0, y_0) , у которого $x_0 > 0$.

Рассмотрим промежуток $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$. На этом промежутке $\cos y \neq 0$. Разделим первое уравнение на второе. Получаем систему

$$x = y \operatorname{tg} y, \quad ye^{y \operatorname{tg} y} = \omega_1 \cos y. \quad (3.6)$$

На промежутке $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ функция $f_1(y) = ye^{y \operatorname{tg} y}$ удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(y) > 0, \quad f_1(y) \rightarrow +\infty \text{ при } y \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0.$$

Функция $f_2(y) = \omega_1 \cos y$ удовлетворяет следующим условиям

$$f_2(0) = \omega_1, \quad f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_2(y) > 0.$$

Графики функций представлены на рис. 3.1.

Поэтому всегда найдется пересечение графиков кривых, т.е. точка $y_0 : 0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, которая удовлетворяет ус-

ловию $f_1(y_0) = f_2(y_0)$, т.е. является решением второго из уравнений (3.6). Поскольку $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, то

$$x_0 = y_0 \operatorname{tg} y_0 > 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (3.2) при любых $\omega > 0$ и $\tau > 0$ будет иметь хотя бы один корень λ_0 с положительной действительной частью.

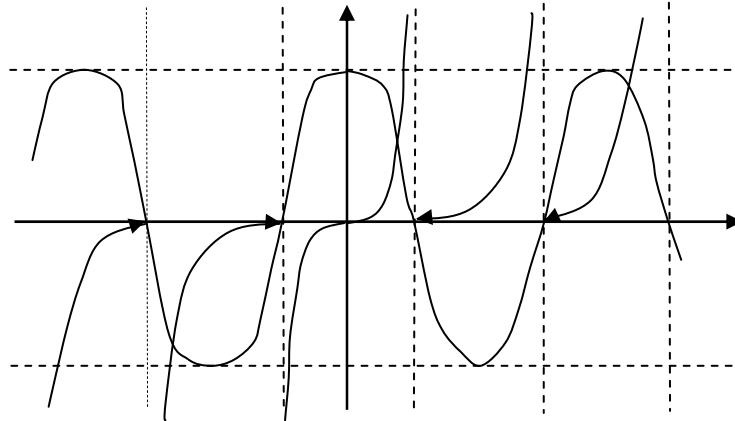


Рис. 3.1. Графическое решение уравнения (3.6).

Пример 2.2. Оценим зависимость запаздывания на динамику системы. Рассмотрим пример системы с запаздыванием с теми же параметрами $a = 2, c = 2, d = 2, g = 2$. Особые точки имеет тот же вид.

Рассмотрим вторую особую точку $O_2(x_2, y_2), x_2 = 1, y_2 = 1$.

Система, линеаризованная в этой точке имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = B_2(z(t) - z_2), \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Построим графики фазовых траекторий системы (3.7), соответствующие "замороженным" начальным условиям при различных величинах запаздываний $\tau > 0$.

В отличие от уравнений без последствия, дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием являются уравнениями в бесконечномерном функциональном пространстве и построить фазовый портрет системы на плоскости без дополнительных ограничений не удастся.

На Рис.3.2–3.5 приведены траектории движений системы, начинающиеся из одной точки при "замороженных" начальных данных, т.е. при условиях $x(t) = 1, y(t) = 1, -\tau \leq t \leq 0$. Показано, что при возникновении запаздывания и его увеличении происходит бифуркация и фазовый портрет системы (3.7) меняется.

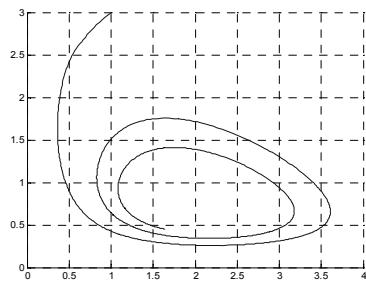


Рис. 3.2.

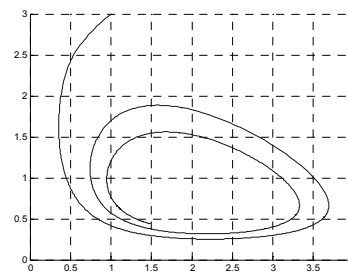


Рис. 3.3.

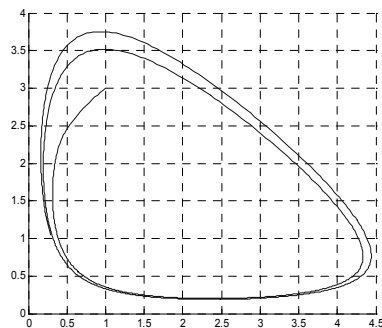


Рис. 3.4.

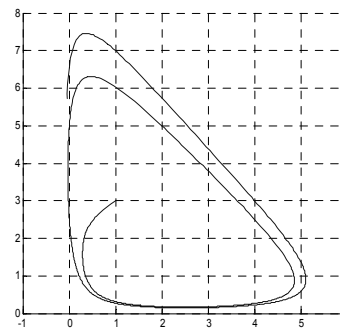


Рис. 3.5.

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976. – 288 с. 2. Смит Дж. Модели в экологии. – М., 1976. – 180 с. 3. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. – Новосибирск, 1997. 4. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics/ – Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht/Boston/London. – 1992. – 514 p. 5. Jean Jacques Loiseau, Wim Michiels, Selvin Julian Niculescu and Rifat Sipahi. Topics in Time Delay Systems. Analysis, Algorithms and Control. – Lecture Notes in Control and Information Sciences, 388. – Springer. – 2009. – 418 p. 6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1970. – 240 с. 7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с. 8. Колесніков К., Коварж І., Грицай І. Дослідження розподілу характеристичних показників коливального рівняння з запізненням // Вісник Київського національного університету. Серія: Фізико-математичні науки, №3, 2004. – С.382-368.