УДК 517.929

Э. Азизбеков, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В последнее время большой интерес вызывают исследования дифференциальных уравнений с распределенными параметрами, содержащими запаздывание. Уравнения параболического типа с запаздывающим аргументом рассматриваются при анализе динамики численности популяции в экологических системах с неоднородной внешней средой, численности рабочей силы с учетом миграции, динамики генераторов с запаздывающей обратной связью и др. [1–2]. Следует отметить, что проблемы анализа дифференциальных уравнений с сосредоточенными параметрами различного типа с последействием изучены достаточно неплохо [3–5]. В то же время работ по исследованию уравнений в частных производных с запаздыванием не так много [6]. Следующая работа это продолжение работ [7–10], которыми получено представление решения отдельных уравнений с распределенными параметрами с одним постояннымзапаздыванием.

Recently, a great interest is investigation of differential equations with distributed parameters which contain delay. The equation of parabolic type with delay are considered in the analysis of the dynamics of populations in ecological systems with heterogeneous external environment, the number of workers with regard to migration, the dynamics of generators with retarded feedback etc. [1–2]. It should be noted that the problem of analysis of differential equations with lumped parameters of different types, equation with aftereffect investigated fairly well [3–5]. At the same time works on investigation equations in partial derivatives with delay is not much [6].Next work is a continuation of works [7–10], in which received representation of results of certain equations with distributed parameters with a constant delay.

1. Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) .$$

Ищется классическое решение первой краевой задачи, т.е. функция $u(x,t)$, определенная при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t, удовлетворяющая начальным $u(x,0) = \phi(x)$, $0 \le x \le l$ и краевым $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, $t \ge 0$ условиям. Для нахождения решения часто используют метод разделения переменных (метод Фурье). Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) ,$$

где $u_1(x,t)$ - решение однородного уравнения с нулевыми краевыми $u_1(0,t) \equiv 0$, $u_1(l,t) \equiv 0$, $t \ge 0$ и ненулевым начальным $u_1(x,0) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \phi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right]$, $0 \le x \le l$ условиями; $u_2(x,t)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $F(x,t) = f(x,t) - \dot{\mu}_1(t) - \frac{x}{l}\left[\dot{\mu}_2(t) - \dot{\mu}_1(t)\right]$ с нулевыми краевыми $u_2(0,t) \equiv 0$, $u_2(l,t) \equiv 0$, $t \ge 0$ и нулевым начальным $u_2(x,0) = 0$, $0 \le x \le l$ условиями; $u_3(x,t)$ имеет вид $u_3(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$.

Решение $u_1(x,t)$ однородного уравнения ищется в виде произведения двух функций

$$u_1(x,t) = X(x)T(t) .$$

В результате разделения переменных получается задача на собственные числа и решение однородного уравнения представляется в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувиля. Эти же собственные функции используются для получения решения второй краевой задачи.

2. Решение одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием. В настоящей работе рассматривается одномерное уравнение теплопроводности с запаздыванием

$$u_t(x,t) = a_1^2 u_{xx}(x,t) + a_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + b_1 u_x(x,t) + b_2 u_x(x,t-\tau) + \ + c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t-\tau) + f(x,t) , \quad (1)$$

определенное при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$. Предполагается, что коэффициенты при производных фазовых координат пропорциональны.. А именно, существует постоянная α, что выполняется условие $b_1 = \alpha a_1^2$, $b_2 = \alpha a_2^2$,. Рассматривается первая краевая задача. Начальное условие имеет вид

$$u(x,t) = \phi(x,t) , \ 0 \le x \le l, \ -\tau \le t \le 0 , \quad (2)$$

а краевые

$$u(0,t) = \mu_1(t), \ u(l,t) = \mu_2(t) , \ t \ge -\tau , \quad (3)$$

причем выполнено условие "согласования" краевых и начальных условий

$$\phi(0,t) = \mu_1(t) , \ \phi(l,t) = \mu_2(t) , \ -\tau \le t \le 0 .$$

Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) .$$

Здесь функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ определяются следующим образом:

- $u_1(x,t)$ - решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_1(x,t)+c_2u_1(x,t-\tau)+f(x,t),$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t)=0$, $u_1(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и ненулевым начальным $u_1(x,t)=\Phi(x,t)$, $\Phi(x,t)=\phi(x,t)-\mu_1(t)-\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями;

- $u_2(x,t)$ - решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_2(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_2(x,t)+c_2u_2(x,t-\tau)+F(x,t)$$

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+c_1\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+$$
$$+c_2\left\{\mu_1(t-\tau)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ 0\le x\le l,$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t)=0$, $u_2(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и нулевым начальным $u_2(x,t)\equiv 0$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями;

- $u_3(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$.

I. Однородное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_1(x,t)+c_2u_1(x,t-\tau)\qquad(4)$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t)=0$, $u_1(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и ненулевым начальным $u_1(x,t)=\Phi(x,t)$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями. Его решение будем искать методом Фурье, т.е. функция $u_1(x,t)$ ищется в виде произведения

$$u_1(x,t)=X(x)T(t).$$

После подстановки в однородное уравнение, получаем

$$X(x)T'(t)=a_1^2X''(x)T(t)+a_2^2X''(x)T(t-\tau)+b_1X'(x)T(t)+b_2X'(x)T(t-)+c_1X(x)T(t)+c_2X(x)T(t-\tau).$$

Перегруппируем полученное выражение следующим образом

$$\left[T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)\right]X(x)=\left[a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)\right]X''(x)+\left[b_1T(t)+b_2T(t-\tau)\right]X'(x).$$

Учитывая пропорциональность коэффициентов, получим

$$\left[T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)\right]X(x)=\left[a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)\right]\left[X''(x)+\alpha X'(x)\right].$$

Делим переменные

$$\frac{X''(x)+\alpha X'(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)}{a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)}=-\lambda.$$

Уравнение расщепляется на два

$$X''(x)+\alpha X'(x)+\lambda X(x)=0,\ T'(t)+\left(\lambda a_1^2-c_1\right)T(t)+\left(\lambda a_2^2-c_2\right)T(t-\tau)=0.\qquad(5)$$

Поскольку граничные условия нулевые, то для первого уравнения получаем нулевые краевые условия

$$X(0)=0,\quad X(l)=0.$$

Ненулевым решение будет только при

$$\lambda=\lambda_n=\frac{\alpha^2}{4}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n=1,2,3,\ldots.$$

И каждому собственному значению $\lambda_n=\frac{\alpha^2}{4}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ соответствует собственная функция

$$X_n(x)=A_ne^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{\pi n}{l}x,\ n=1,2,3,\ldots,$$

где A_n – произвольная постоянная. Подставляя полученные значения λ_n во второе уравнение (5), получим дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{T}_n(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]T_n(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]T_n(t-\tau),\quad n=1,2,3,\ldots.\qquad(6)$$

Определим начальные условия для каждого из уравнений (6) следующим образом. Разложим функцию $\Phi(x,t)$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ в ряд по собственным функциям первого уравнения, т.е. представим в виде

$$\Phi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Подставив значение $\Phi(x,t)$ и проинтегрировав, получим, что начальные условия для каждого из уравнений (6), $n = 1,2,3,...$ будут иметь вид

$$T_n(t) = \Phi_n(t)\ ,\ n = 1,2,3,...\ ,\ -\tau \le t \le 0\ ,\ \Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi + \frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Получим решение задачи Коши для каждого из уравнений (6) в аналитическом виде. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau)\ ,\ t \ge 0\ ,\ \tau > 0\ ,\ x(t) \equiv \phi(t)\ ,\ -\tau \le t \le 0\ . \tag{7}$$

Тут $\phi(t)$ - произвольная, непрерывно-дифференцируемая функция, которая определяет начальное условие.

Определение 1.1. Запаздывающим экспоненциалом $\exp_\tau\{b,t\}$ назовем функцию, которая имеет вид

$$e_\tau\{b,t\} = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < t < -\tau, \\ 1 & , \quad -\tau \le t < 0, \\ 1 + b\dfrac{t}{1!} & , \quad 0 \le t < \tau, \\ 1 + b\dfrac{t}{1!} + b^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} & , \quad \tau \le t < 2\tau \\ ... & , \quad ... \\ 1 + b\dfrac{t}{1!} + \dots + b^k\dfrac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!} & , \quad (k-1)\tau \le t < k\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{8}$$

В работах [7,8] было доказано, что функция $\exp_\tau\{b,t\}$ является решением линейного однородного уравнения с чистым запаздыванием

$$\dot{x}(t) = bx(t-\tau)\ ,\ t \ge 0\ ,$$

удовлетворяющим единичному начальному условию $x(t) \equiv 1,\ -\tau \le t \le 0$.

Покажем, что решение задачи Коши для уравнения с запаздыванием (7) также может быть записано в интегральном виде с функцией аналогичного вида.

Лемма 1.1. Функция

$$x_0(t) = e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}\ ,\ b_1 = e^{-a\tau}b\ ,\ t \ge 0\ , \tag{9}$$

где $\exp_\tau\{b_1,\tau\}$ - запаздывающий экспоненциал, определенный в (8), является решением уравнения (7), с параметром b_1, удовлетворяющим начальному условию

$$x_0(t) = e^{at}\ ,\ -\tau \le t \le 0\ . \tag{10}$$

Доказательство. Выполнение функцией $x_0(t)$ условия (10) следует из определений для экспоненциалов e^{at} и $\exp_\tau\{b_1,t\}$. Покажем, что при $t \ge 0$ функция $x_0(t)$ является решением уравнения (8). Продифференцировав (9), получаем

$$\frac{d}{dt}(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}) = a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}) + e^{at}b_1\exp_\tau\{b_1,t-\tau\} = a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}) + e^{at}e^{-a\tau}b\exp_\tau\{b_1,t-\tau\} =$$
$$= a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}) + b(e^{a(t-\tau)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau\}).$$

Учитывая обозначение (9), получаем

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = ax_0(t) + bx_0(t-\tau),$$

т.е. получаем утверждение леммы 1.1.

Теорема 1.1. Решение $x(t)$ уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t) \equiv \phi(t)\ ,\ -\tau \le t \le 0$, имеет вид

$$x(t) = e^{a(t+\tau)}\exp_\tau\{b_1,t\}\phi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{a(t-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}[\phi'(s) - a\phi(s)]ds\ . \tag{11}$$

Доказательство. Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t) \equiv \phi(t)\ ,\ -\tau \le t \le 0$, будем искать в виде

$$x(t) = x_0(t)c + \int_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)y(s)ds\ , \tag{12}$$

где c – неизвестная постоянная, $y(t)$ – неизвестная непрерывно-дифференцируемая функция, $x_0(t)$ определена в (9). Поскольку, как следует из леммы 1.1, функция $x_0(t)$ является решением уравнения (7), то при произвольных c и $y(t)$ выражение (12) также будет решением уравнения (7). Выберем c и $y(t)$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия, т.е. $x(t) \equiv \phi(t)\ ,\ -\tau \le t \le 0$. Или, учитывая обозначения (12), при $-\tau \le t \le 0$ выполнялось

$$x_0(t)c+\int_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)y(s)ds \equiv \phi(t).$$

Положим $t=-\tau$. Как следует из определения запаздывающего экспоненциала, $x_0(-\tau)=e^{-a\tau}$, $x_0(-2\tau-s)=0$, если $-\tau<s\le 0$ и $x_0(-2\tau-s)=e^{-a\tau}$, если $s=-\tau$. Поэтому $\phi(-\tau)=e^{-a\tau}c$, отсюда $c=e^{a\tau}\phi(-\tau)$, и зависимость (12) приобретает вид

$$x(t)=e^{a(t+\tau)}\exp_\tau\{b_1,t\}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}y(s)ds.$$

Разобьем интеграл на промежутке $-\tau\le t\le 0$ на два. Получаем

$$\phi(t)=e^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}y(s)ds+\int_{t}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}y(s)ds.$$

В первом интеграле границами являются $-\tau\le s\le t$, поэтому $-\tau\le t-\tau-s\le t$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}\equiv 1,\ -\tau\le s\le t.$$

Во втором интеграле границами являются $t\le s\le 0$, поэтому $t-\tau\le t-\tau-s\le-\tau$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}=0,\ \text{если}\ t<s\le 0\ \text{и}\ \exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}=1,\ \text{если}\ s=t.$$

Таким образом на промежутке $-\tau\le t\le 0$ получаем

$$e^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}y(s)ds=\phi(t)\ . \tag{13}$$

Продифференцируем зависимость (13). Получаем

$$ae^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+a\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}y(s)ds+e^{-a\tau}y(t)=\phi'(t)\ . \tag{14}$$

Решая систему уравнений (13), (14), получаем

$$y(t)=e^{a\tau}\left[\phi'(t)-a\phi(t)\right]\ .$$

Подставив полученное выражение в (12), получим утверждение теоремы 1.
Вернемся к дифференциальным уравнениям (6) с соответствующими начальными условиями

$$\dot{T}_n(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]T_n(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]T_n(t-\tau),\ T_n(t)=\Phi_n(t),\ -\tau\le t\le 0,\ n=1,2,3,\ldots .$$

Введем следующее обозначение

$$L_n=c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2,\ \ D_n=\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

Тогда, как следует из зависимости (11) решения задач Коши для каждого из уравнений (6) имеют вид

$$T_n(t)=e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds\ . \tag{15}$$

Отсюда решение первой краевой задачи для уравнения (4) имеет вид

$$u_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\ .$$

II. Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}+\ b_2\frac{\partial u_2(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_2(x,t)+c_2u_2(x,t-\tau)+F(x,t) \tag{17}$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t)=0,\ \ u_2(l,t)=0,\ \ t\ge-\tau$ и нулевым начальным $u_2(x,t)\equiv 0$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями. Решение ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin\frac{\pi n}{l}x$, $n=1,2,\ldots$

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \ n=1,2,\ldots,$$

Представим функцию $F(x,t)$ также в виде ряда

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\ .$$

Поскольку

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+c_1\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+\ c_2\left\{\mu_1(t-\tau)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},$$

то, взяв интегралы, получим

$$F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]-c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ t\geq 0\ .$$

Тогда каждая из функций $u_{2n}(t)$, $n=1,2,...$ является решением соответствующего уравнения

$$\dot{u}_{2n}(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]u_{2n}(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]u_{2n}(t-\tau)+F_n(t)\ , \tag{18}$$

с нулевым начальным условием $u_{2n}(t)\equiv 0,\ -\tau\leq t\leq 0$.

Вновь приведем некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+f(t)\ ,\ t\geq 0\ ,\ \tau>0 \tag{19}$$

с нулевым начальным условием.

Теорема 2.1. Решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$\overline{x}(t)=\int_0^t e^{a(t-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-s\right\}f(s)ds,\quad t\geq 0\ ,\ b_1=e^{-a\tau}b\ . \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $x_0(t)$ решение однородного уравнения (7), то, используя метод вариации произвольной постоянной и учитывая вид функции $x_0(t)$, решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19) будем искать в виде

$$\overline{x}(t)=\int_0^t e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)ds\ , \tag{21}$$

где $c(s)$, $0\leq s\leq t$ - неизвестная функция. Продифференцировав записанное выражение, получим

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t)=e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)\Big|_{s=t}+\int_0^t\left[ae^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}+e^{a(t-\tau-s)}b_1\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}\right]c(s)ds\ .$$

Подставив зависимость (21) и полученное выражение производной в уравнение (19), запишем

$$e^{-a\tau}c(t)+\int_0^t\left[ae^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}+be^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\rho-s\right\}\right]c(s)ds\ =$$

$$=a[\int_0^t e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)ds]+b\left[\int_0^{t-\tau}e^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\vartheta-s\right\}c(s)ds\right]+f(t)\ .$$

Отсюда

$$e^{-a\tau}c(t)+\int_{t-\tau}^t be^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}c(s)ds=f(t).$$

А, поскольку $\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}=0$, при $t-\tau<s\leq t$ и $\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}=1$, при $s=t-\tau$, то получаем $e^{-a\tau}c(t)=f(t)$ и $c(t)=e^{a\tau}f(t)$. Отсюда следует зависимость (20).

Используя полученный результат, запишем решение задачи Коши с нулевым начальным условием для уравнений (18) в виде

$$u_{2n}(t)\ =\ \int_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right](t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\ ,\quad L_n=c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2,$$

$$D_n=\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

И решение неоднородного уравнения теплопроводности с запаздывающим аргументом (17) с нулевыми краевыми и начальным условиями имеет вид

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\ ,$$

$$F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]-c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ t\geq 0\ .$$

Объединяя все полученные зависимости получаем, что решение краевой задачи одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с запаздыванием имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{L_n(t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}F_n(s)ds\right]\sin\frac{\pi n}{l}x+\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right], \qquad (22)$$

Где

$$F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]-c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},$$

$$\Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right],\quad L_n=c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2,\ D_n=\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

Решение дифференциального уравнения с запаздыванием представлено в виде формального ряда Фурье. Сформулируем следующую теорему о сходимости решений краевой задачи (1)–(3).

Теорема 2.2. Пусть функции $F(x,t)$, $\Phi(x,t)$ таковы, что коэффициенты Фурье $F_n(t)$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi_n'(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n\to\infty}n^{2k+1+\alpha}\left[\Phi_n'(s)+L_n\Phi_n(s)\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*-s)}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{2k-1+\alpha}\left|F_n(s)\right|e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*+\tau)}=0,\ \alpha>0,\ -\tau\le s\le 0,\ (k-1)\tau\le t^*<k\tau.$$

Тогда функция $u(x,t)$, представленная рядом (22), имеет непрерывную производную по t, непрерывную производную второго порядка по x, и будет решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному (2) и краевым (3) условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда по x (два раза) и по t (один раз), и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\le x\le l$, $t\ge-\tau$.

Доказательство. Запишем ряд (22) в виде суммы

$$u(x,t)=S_1(x,t)+S_2(x,t)+S_3(x,t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

$$S_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_3(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$A_n(t)=e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau),\ B_n(t)=\int_{-\tau}^{0}e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds,$$

$$C_n(t)=\int_0^t e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds.$$

1. Рассмотрим $A_n(t)$, $n=1,2,\dots$, коэффициенты первого ряда - $S_1(x,t)$. Для произвольного фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ получаем

$$A_n(t^*)=e^{L_n(t^*+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t^*\}e_\tau^{D_nt^*}\Phi_n(-\tau)=e^{L_n(t^*+\tau)}\left\{1+D_n\frac{t^*}{1!}+D_n^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots+D_n^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\Phi_n(-\tau).$$

После подстановки значений L_n и D_n, запишем

$$A_n(t^*)=e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{t^*}{1!}+\left[\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\right]^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\left[\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\right]^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\times\Phi_n(-\tau).$$

Или

$$A_n(t^*)=\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]t^*}\frac{t^*}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*-\tau)}\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][t^*-(k-1)\tau]}\times\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\times\Phi_n(-\tau).$$

Поскольку, по условию, $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$, то при выполнении неравенств $c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2<0$, $c_2-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2<-1$, или при выполнении

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\},$$

будет выполняться соотношение

$$\left|A_n(t^*)\right| \le \left|\Phi_n(-\tau)\right| e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]}\left|\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\frac{t^*}{1!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\right| \le$$

$$\le \left|\Phi_n(-\tau)\right| e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]}\left|\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]\right|^k\left|1+\frac{t^*}{1!}+\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\ldots+\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right|.$$

и найдется непрерывная функция $N_1(t^*)$, при которой

$$\left|A_n(t^*)\right| \le N_1(t^*)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2k} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]}\left|\Phi_n(-\tau)\right|.$$

Таким образом, если для момента времени t^*: $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k+1+\alpha} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\left[t^*-(k-1)\tau\right]} \times \left|\Phi_n(-\tau)\right| = 0.\ \ \alpha > 0,$$

то ряд

$$S_1(x,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

сходится равномерно и абсолютно.

2. Рассмотрим $B_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$, коэффициенты второго ряда - $S_2(x,t)$. Для фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$ произведем замену $t^*-\tau-s=\xi$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\exp_\tau\{D_n,\xi\}\left[\Phi_n'(t-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right]d\xi +$$

$$+\int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)}\exp_\tau\{D_n,\xi\}\left[\Phi_n'(t-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right]d\xi.$$

Используя представление запаздывающего экспоненциала $\exp_\tau\{D_n,\xi\}$ на каждом из промежутков, получаем следующее

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n^{\,2}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\cdots+D_n^{\,k-1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi +$$

$$+\int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\left\{1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+D_n^k\frac{\left[\xi-(k-1)\tau\right]^k}{k!}\right\}d\xi.$$

Подставив значения L_n и D_n, получим

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\right.$$

$$\left.\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\times\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi + \int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\right.$$

$$\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\times e^{-k\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\Bigg\}d\xi .$$

Или, после преобразований, получаем

$$B_n(t^*)=\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\Bigg\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+$$

$$+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\Bigg\}d\xi+$$

$$+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\Bigg\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+$$

$$+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\cdots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\Bigg\}d\xi .$$

Как и в предыдущем случае, поскольку $t^*\geq(k-1)\tau$, то при достаточно большом n выполняется неравенство

$$n>\frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|},\frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому, как следует из свойств определенных интегралов и второй теоремы о среднем, существуют s_1, s_2: $t^*-\tau\leq s_1\leq(k-1)\tau$, $(k-1)\tau\leq s_2\leq t^*$ такие, что

$$\left|B_n\left(t^*\right)\right|\leq\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]\left|(k\tau-t^*)\left[\Phi_n'(t^*-\tau-s_1)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_1)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right][s_1-(k-2)\tau]}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1+\frac{s_1}{1!}+\frac{(s_1-\tau)^2}{2!}+\cdots+\frac{[s_1-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}\right|+\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^k\times$$

$$\times\left|\left[t^*-(k-1)\tau\right]\left[\Phi_n'(t^*-\tau-s_2)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_2)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right][s_2-(k-1)\tau]}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1+\frac{s_2}{1!}+\frac{(s_2-\tau)^2}{2!}+\cdots+\frac{[s_2-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\right|.$$

И найдутся непрерывные функции $N_2^1(t^*,s)$, $N_2^2(t^*,s)$, ограниченные при $(k-1)\tau\leq t^*<k\tau$, $-\tau\leq t\leq 0$, такие что

$$\left|B_n\left(t^*\right)\right|\leq\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^{k-1}\left|\left[\Phi_n'(t^*-\tau-s_1)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_1)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right][s_1-(k-2)\tau]}\right|\left|N_2^1\left(t^*,s_1\right)\right|+$$

$$+\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^k\left|\left[\Phi_n'(t^*-\tau-s_2)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_2)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right][s_2-(k-1)\tau]}\right|\times\left|N_2^2\left(t^*,s_2\right)\right|.$$

Пусть функции $\Phi_n'(s)$, $\Phi_n(s)$ "не очень сильно растут" на промежутке $-\tau\leq s\leq 0$, т.е. для момента времени $t^*:(k-1)\tau\leq t^*<k\tau$ и для произвольного $s:-\tau\leq s\leq 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}n^{2k+1+\alpha}\left[\Phi_n'\left(s\right)+\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n\left(s\right)\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\left(t^*-s\right)}=0 .$$

Тогда ряд $S_2(x,t)$ также сходится равномерно и абсолютно.

3. Рассмотрим $C_n(t^*)$ $n=1,2,\ldots$, коэффициенты третьего ряда - $S_3(x,t)$. Для произвольного фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau\leq t^*<k\tau$ произведем замену $t-\tau-\xi=s$ и представим интеграл суммой интегралов, в которых функция запаздывающего экспоненциала имеет одинаковую структуру

$$C_n(t^*) = \int_{-\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n,\xi\} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi = \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(\xi+\tau)} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi + \int_{0}^{\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \left[1 + D_n\frac{\xi}{1!}\right] F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \left[1 + D_n\frac{\xi}{1!} + D_n^{\ 2}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \ldots + D_n^{\ k-1}\frac{(\xi-(k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi \quad .$$

Подставив значения L_n и D_n, и используя теорему о среднем, можем показать, что существуют моменты времени $-\tau \le s_1 \le 0$, $0 \le s_2 \le \tau$, $(k-2)\tau \le s_k \le t^* - \tau$, такие, что

$$C_n(t^*) \le \tau e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_1)} F_n(t^*-\tau-s_1) + \tau e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_2)} \left[1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau} \frac{s_2}{1!}\right] F_n(t^*-\tau-s_2) + \ldots$$

$$\ldots + \tau e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_k)} \left[1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau} \frac{s_k}{1!} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \tau \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\tau\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]} \frac{\left[s_k - (k-2)\tau\right]^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^*-\tau-s_k) \ .$$

И при достаточно большом n, справедливо неравенство

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому найдется непрерывная, ограниченная при $-\tau \le s \le t^*$ функция $N_3(t^*,s)$, при которой справедливо неравенство

$$\left|C_n(t^*)\right| \le \tau \max_{-\tau\le s\le t^*}\left|F_n(s)\right| N_3(t^*,s)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2(k-1)} e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 - c_1\right](t^*+\tau)} .$$

Пусть функции $F_n(s)$ "не очень сильно растут" на промежутке $-\tau \le s \le t^*$, т.е. выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k-1+\alpha}\left|F_n(s)\right| e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*+\tau)} = 0 .$$

Тогда ряд $S_3(x,t)$ также сходиться абсолютно и равномерно.

Таким образом показано, что для абсолютной и равномерной сходимости рядов $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$ требуется лишь "не очень сильный рост" по индексу n коэффициентов Фурье $F_n(t)$, $-\tau \le s \le t^*$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi'_n(t)$, $-\tau \le t \le 0$. Сходимость производных функции $u(x,t)$ следует из свойств дифференцируемости запаздывающего экспоненциала.

1.Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с. 2. Жуков А.Б. Пространственная и временная изменчивость процесса прироста леса. //Доклады АН СССР, Т.239, №1, 1978. – С.245–248. 3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М.: Наука, 1971. – 296 с. 4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., Мир, 1984. – 421 с. 5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1991. – 277 с. 6. Ткач Б.П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных из запаздывающим аргументом. //Дифференциальные уравнения. Т.III. – 1967 – № 10 – С.1796–1801. 7. Хусаінов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 2004. – С.362–368. 8. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Про зображення розв'язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2006. – С.51–59. 9. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Розв'язок рівняння коливання із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2006. – С.243–248. 10. Коварж І.В., Іванов А.Ф., Хусаінов Д.Я. Постановка крайових задач і задач Коші для рівнянь параболічного типу з чистим запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2007. – С.37–41.

Надійшла до редколегії 15.10.12

О. Ф. Волошин, д-р техн. наук, проф.,
В. О. Лавер, студент

НЕЧІТКІ МЕТОДИ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ

У роботі наведено деякі алгоритми для розподілу витрат при нечітких умовах .Запропоновано нечіткі узагальнення подушного та рівневого податків на випадок нечіткого виконання обмежень на частки витрат агентів та на випадок нечіткого задання величини витрат. Запропоновано нечітке узагальнення N-ядра. Наведені алгоритми проілюстровано числовими прикладами, дано аксіоматичну характеризацію.

The paper presents some algorithms of cost sharing under fuzzy conditions. Fuzzy generalizations of uniform gains, uniform losses and Talmudic rationing methods are proposed. These algorithms are illustrated by numerical examples. Also, the axiomatic characterization of generalized methods is given.

Вступ. Справедливий розподіл спільних витрат (або спільного прибутку) серед агентів є центральною темою теорії кооперативних ігор із трансферабельною корисністю. Зокрема, простіша проблема розподілу одного виду благ за певним профілем заявок (що відображає індивідуальні потреби чи вимоги) теж була популярною для аксіоматичного аналізу. Ця модель розподілу в літературі часто називається проблемою банкрутства [1].