Kozhametov A. T. Ph.D. in Math.,
Universiteta Nukus, Karakalpakstan, Uzbekistan,
Shatyrko A. V., Ph.D. . in Math.,
Khusainov D. Ya., Dr. Sc. Prof.,
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON A NUMERICAL METHOD FOR OBTAINING THE OPTIMAL LYAPUNOV FUNCTION

The problem of studying the global stability of the trivial equilibrium position of the automatic control system with a non-linearity, which is located at a predetermined linear sector, is considered. This is so-called absolute stability problem (or Lur'e problem), which has already become a classic. Lyapunov's direct method, with the functions of a given class – quadratic form plus integral of the nonlinearity is selected as apparatus for studying. We propose an optimization approach practical construction of Lyapunov function for a given class, based on the application of the generalized gradient procedure.
Key words: Lur'e type control system, Lyapunov function, absolute stability, optimization, generalized gradient.

УДК 517.929

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Чернівецький національний університет, Чернівці

МОМЕНТНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Робота присвячена дослідженню стійкості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертових просторах з допомогою моментних рівнянь.
Ключові слова: Гільбертовий простір, стійкість, диференціальні рівняння

Нехай H – гільбертів простір і $X(t)$ – векторний випадковий процес із H, що є розв'язком рівняння

$$dX(t) = A(t,\xi(t))X(t)dt + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t,\xi(t))X(t)dW_j(t), \quad X(0)=\zeta, \tag{1}$$

де $\xi(t)$ – неперервний справа марковський процес, що набуває зліченну кількість значень $\theta_1,...,\theta_q,...$; $A(t,\theta_s), B_j(t,\theta_s), s=\overline{1,q},$ – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, $W_1(t),...,W_r(t),...$ – незалежні між собою скалярні вінерові процеси, причому величини $(W_1(t),...,W_r(t),...,\xi(t),\zeta)$ також є незалежними. Позначимо $P_s(t) \equiv P\{\xi(t)=\theta_s\}$. Вважатимемо, що існують неперервні на відрізку $[0,T]$ функції $\alpha_{kj}(t)$ такі, що

$$P_{kj}(t+h,t) = \delta_{kj} + \alpha_{kj}(t)h + o(h), \tag{2}$$

де δ_{kj} – символ Кронекера, $h>0,\ \dfrac{o(h)}{h} \to 0, h \to 0.$

Нехай
$$F_k(t,x) = P\{X(t)<x, \xi(t)=\theta_k\},$$
$$m_k(t) = \int_{R^m} x dF_k(t,x),$$
$$D_k(t) = \int_{R^m} xx^* dF_k(t,x).$$

Означення 1. *Функції $m_k(t), D_k(t)$ називаються частковими середніми та частковими матрицями других моментів відповідно.*

Теорема 1. *Нехай $X(t)$ є розв'язком рівняння (1), $\left\langle |\zeta|^2 \right\rangle < \infty,$ а перехідні ймовірності марковського процесу $\xi(t)$ задовольняють умові (2). Тоді справедливими є рівняння*

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}m_s(t), \quad m_k(0) = \langle\zeta\rangle P_k(0), \quad k=\overline{1,q}, \tag{3}$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{jk}(t)D_k(t)B_{jk}^*(t) + $$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}D_s(t), \quad D_k(0) = \left\langle \zeta\zeta^* \right\rangle P_k(0), \quad k=\overline{1,q}, \tag{4}$$

де $A_k(t) = A(t,\theta_k), B_{jk}(t) = B_j(t,\theta_k)$.

Доведення. Розіб'ємо інтервал $(0,T)$ точками $0<t_1<t<...<t_N<T$ з кроком $t_{k+1},\ t_k = h,\ \ t_n = nh.$ Позначимо через $X(n) = X(t_n),\ \ \xi_n = \xi(t_n),\ \ A(n,\xi_n) = A(t_n,\xi(t_n)),\ \ B_j(n,\xi_n) = B_j(t_n,\xi(t_n)).$ Поставимо у відповідність рівнянню (1) різницеве рівняння

$$X(n+1) = X(n) + hA(n,\xi_n)X(n) + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(n,\xi_n)\Delta W_j(t_n)X(n), \quad X(0)=\zeta, \tag{5}$$
$$\Delta W_j(t_n) = W_j(t_{n+1}) - W_j(t_n).$$

Для часткових моментів вектора $X(n)$ запишемо рівняння

$$m_k(n+1) = \sum_{s=1}^{\infty} P_{ks}(n)[E + hA_s(n)]m_s(n) =$$

$$= P_{kk}(n)[E + hA_k(n)]m_k(n) + \sum_{s\neq k} P_{ks}(n)\left[E + hA_s(n)\right]m_s(n) =$$
$$= (1 + \alpha_{kk}(n)h)[E + hA_k(n)]m_k(n) + h\sum_{s\neq k} \alpha_{ks}(n)\left[E + hA_s(n)\right]m_s(n) =$$
$$= m_k(n) + hA_k(n)m_k(n) + h\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ks}(n)m_s(n) + o(h)$$

або

$$\frac{m_k(n+1) - m_k(n)}{h} = A_k(n)m_k(n) + \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}(n)\,m_s(n) + \frac{o(h)}{h}.$$

Спрямуємо h до нуля. Тоді одержимо рівняння (3). Запишемо далі рівняння для часткових матриць $D_k(n)$ вектора $X(n)$. Із рівнянь (5) випливає, що матриця $D_k(n)$ задовольняє рівняння

$$D_k(n+1) = \sum_{s=1}^{\infty}[E + hA_s(n)]D_s(n)[E + hA_s(n)]^* + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}P_{ks}(n)B_{js}(n)D_s(n)B_{js}^*(n)h.$$

При виведенні цього рівняння ми скористалися тим, що $\left\langle \Delta W_j(t_n)\Delta W_k(t_n)\right\rangle = \delta_{jk}$. Перепишемо рівняння для $D_k(n)$ у наступному вигляді

$$D_k(n+1) = P_{kk}(n)[E + hA_k(n)]D_k(n)[E + hA_k(n)]^* +$$
$$+\sum_{s\neq k}[E + hA_s(n)]D_s(n)[E + hA_s(n)]^* P_{ks}(n) +$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}P_{kk}(n)B_{jk}(n)D_k(n)B_{jk}^*h + \sum_{s\neq k}\sum_{j=1}^{\infty}P_{ks}(n)B_{js}(n)D_s(n)B_{js}^*h =$$
$$= D_k(n) + hA_k(n)D_k(n)A_k^*(n) + h\sum_{j=1}^{\infty}B_{jk}(n)D_k(n)B_{jk}^*(n) + h\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}(n)D_s(n) + o(h),$$

або поділивши на h та спрямувавши h до нуля одержимо рівняння (3).

Припустимо далі, що $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \le T$ є стрибки процесу $\xi(t)$ на проміжку $[0,T]$.

$X(t)$ – розв'язок стохастичного рівняння (1) з умовами

$$X(\tau_j) = C(\xi(\tau_j), \xi(\tau_j - 0))X(\tau_j - 0), \tag{6}$$

де $C_{ks} = C(\theta_k, \theta_s)$ – деякі матриці.

Нехай $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le T$ точки розбиття відрізку $[0,T]$ з кроком h, так що $t_n = nh$, $t_{k+1} - t_k = h$. Поставимо у відповідність рівнянню (1) з умовами (6) різницеве рівняння

$$X_{n+1} = X_n + [hA(t_n, \xi_{n+1}, \xi_n) + \sum_{j=1}^{\infty}B_j(t_n, \xi_{n+1}, \xi_n)\Delta W(t_n)]X_n, \quad X(0) = \zeta, \tag{7}$$

де

$\xi_n = \xi(t_n)$, $X_n = X(t_n)$, $A(t_n, \theta_s, \theta_s) = A(t_n, \theta_s)$, $B_j(t_n, \theta_s, \theta_s) = B_j(t_n, \theta_s)$, $B_j(t_n, \theta_k, \theta_s) = 0, k \neq s$, $E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s) = C(\theta_k, \theta_s), k \neq s$.

Запишемо рівняння для часткових моментів вектора X_n.

$$m_k(n+1) = \sum_{s=1}^{\infty}P_{ks}(n)[E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s)]m_s(n) =$$
$$= P_{kk}(n)[E + hA(t_n, \theta_k)]m_k(n) + \sum_{s\neq k}P_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) =$$
$$= (1 + \alpha_{kk}(n)h)[E + A(t_n, \theta_k)h]m_k(n) + h\sum_{s\neq k}\alpha_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) =$$
$$= m_k(n) + h\alpha_{kk}(n)m_k(n) + hA(t_n, \theta_k)m_k(n) + h\sum_{s\neq k}\alpha_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) + o(h).$$

При $h \to 0$ одержимо рівняння

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m_k(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}C_{ks}m_s(t), \qquad m_k(0) = \langle\zeta\rangle P\{\xi(0) = \theta_k\}, \tag{8}$$

де $A_k(t) = A(t, \theta_k), C_{ks} = C(\theta_k, \theta_s)$ при $k \neq s$, $C_{kk} = E$.

Одержимо рівняння для часткових других моментних матриць. Зауважимо, що $D_k(n)$ задовольняють рівняння

$$D_k(n+1) = \sum_{s=1}^{\infty}P_{ks}(n)\bar{A}_{ks}D_s(n)\bar{A}_{ks}^* + \sum_{s=1}^{\infty}P_{ks}(n)\sum_{j=1}^{\infty}B_{jks}D_s(n)B_{jks}^*h,$$

де $\bar{A}_{ks} = E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s)$, $\quad B_{jks} = B_j(t_n, \theta_k, \theta_s)$.

Далі перепишемо рівняння $D_k(n)$ у вигляді

$$D_k(n+1) = P_{kk}(n)\bar{A}_{kk}D_k(n)\bar{A}_{kk}^* + \sum_{s\neq k}P_{ks}(n)C_{ks}D_s(n)C_{ks}^* +$$
$$+P_{kk}(n)\sum_{j=1}^{\infty}B_{jkk}D_k(n)B_{jkk}^*h + \sum_{s\neq k}P_{ks}(n)\sum_{j=1}^{\infty}B_{jks}D_s(n)B_{jks}^*h =$$
$$= D_k(n) + hA(t_n, \theta_k)D_k(n)A^*(t_n, \theta_k) + h\sum_{s\neq k}\alpha_{ks}(n)C_{ks}D_s(n)C_{ks}^* +$$

$$+\alpha_{kk}D_k(n)h + h\sum_{j=1}^{\infty} B_{jkk}D_s(n)B_{jkk}^* + o(h).$$

При $h \to 0$ одержимо рівняння

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) +$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}C_{ks}D_k(t)C_{ks}^* + \sum_{j=1}^{\infty}B_j(t,\theta_k)D_k(t)B_j^*(t,\theta_k), \quad (9)$$
$$D_k(0) = \langle \zeta\zeta^* \rangle P\{\xi(t) = \theta_k\},$$

де $C_{kk} = E$.

Таким чином, ми показали, що має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $X(t)$ *є розв'язком рівняння (1) з умовами (6). Тоді функції* $m_k(t), D_k(t), k = \overline{1,q}$, *є розв'язками рівнянь (8) та (9) відповідно.*

Припустимо далі, що стрибки процесу $X(t)$ задовольняють умові

$$X(\tau_j) = C(\xi(\tau_j), \xi(\tau_j - 0))X(\tau_j - 0) + H(\tau_j, \xi(\tau_j), \xi(\tau_j - 0)).$$

Введемо позначення: $H_{ks}(t) = H(t, \theta_k, \theta_s)$ при $k \neq s$ та $H_{ss}(t) = 0$. Нехай вектор функція $H_{ks}(t)$ є неперервною на відрізку $[0,T]$.

Твердження 2. *Функції* $m_k(t)$ *та* $D_k(t), k = \overline{1,q}$, *є розв'язками лінійних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m_k(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}(t)(C_{ks}m_s(t) + H_{ks}(t)P_s(t)),$$
$$m_k(0) = \langle \zeta \rangle P\{\xi(0) = \theta_k\}, \quad (10)$$
$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) +$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}(t)[C_{ks}D_s(t)C_{ks}^* + C_{ks}m_k(t)H_{ks}^*(t) + H_{ks}(t)m_k^*(t)C_{ks}^*] +$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}H_{ks}(t)H_{ks}^*(t)P_k(t).$$
$$D_k(0) = \langle \zeta\zeta^* \rangle P\{\xi(t) = \theta_k\},$$

де $P_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}, k = \overline{1,q}$.

Доведення. Нехай $t_k, k = \overline{1,n}$, – точки розбиття відрізку $[0,T]$ з кроком h, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, $t_{k+1} - t_k = h$, $k = \overline{1, N-1}$. Покладемо $t_n = nh$, $n = \overline{1,N}$. Поставимо у відповідність рівнянню з умовами різницеве рівняння

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}, \xi_n, t_n), \quad X(0) = \zeta, \quad n = 0,1,2,....,$$

де

$$X_n = X(t_n),$$
$$f(X, \theta_s, \theta_s, t_n) = X + hA_s(t_n)X + \sum_{j=1}^{\infty}B_{js}(t_n)\Delta W_j(t_n),$$
$$f(X, \theta_k, \theta_s, t_n) = C_{ks}X + H_{ks}(t_n), \; k \neq s.$$

Тоді рівняння для частинних середніх вектора X_n буде мати вигляд

$$m_k(n+1) = P_{kk}(n)(E + hA_k(t_n))m_k(n) + \sum_{s \neq k}P_{ks}(n)C_{ks}m_s(n) + \sum_{s \neq k}P_{ks}(n)H_{ks}(t_n)P_s(t_n),$$

або враховуючи рівності

$$P_{kk}(n) = \alpha_{kk}(n)h + o(h), \quad P_{ks}(n) = \alpha_{ks}(n)h + o(h),$$

матимемо

$$m_k(n+1) = m_k(n) + hA_k(t_n)m_k(n) + \alpha_{kk}(n)m_k(n)h +$$
$$+h\sum_{s \neq k}\alpha_{ks}(n)C_{ks}m_s(n) + h\sum_{s \neq k}\alpha_{ks}(n)H_{ks}(t_n)P_s(t_n) + o(h).$$

При $h \to 0$ одержимо рівняння для функцій $m_k(t)$. Аналогічно доводиться, що справедливим є рівняння для $D_k(t)$.

Зауваження. Функції $P_k(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ks}(t)P_s(t), \quad P_k(0) = P\{\xi(0) = \theta_k\}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. Монография. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 258 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1962. – 412 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с.

6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 354 с.
7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. 1. Общая теория. – М.: НЛ, 1962. – 895 с.
9. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. – М.: НЛ, 1965. – 605 с.
10. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
11. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.1. – М.: Наука, 1994. – 544 с.
12. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.2. – М.: Наука, 1996. – 628 с.
13. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с.
14. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М. Наука, 1981. – 448 с.
15. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 1987. – 328 с.
16. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
17. Хейл Дж . Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
18. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 429 с.
19. Korolyuk V.S., Limnions W. Stochastic systems in merging Phase Space. – London: World Scientific, 2006. – 331 p.

Надійшла до редколегії 15.05.14

Никитин А. В. канд. физ.-мат. наук
Черновицкий национальный университет, Черновцы

МОМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Посвящена исследованию устойчивости решений линейных стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с помощью моментных уравнений.
Ключевые слова: Гильбертовое пространство, устойчивость, дифференциальные уравнения

Nikitin A. V. Ph.D. Physics and Mathematics
Chernivtsi National University, Chernivtsi

MOMENT EQUATION FOR LINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS IN A HILBERT SPACE

This article is devoted to research of stability of decisions of linear stochastic differential equations in Hilbert Space with the help of moment equations.
Keywords: Hilbert space, stability, differential equations

УДК 512.7+519.7+681.3

В. В. Скобелев, канд. физ.-мат. наук,
В. Г. Скобелев, д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф.,
ИПММ НАН Украины, Донецк

МЕТОДЫ АНАЛИЗА АВТОМАТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В работе рассмотрены методы анализа автоматных моделей, определенных над конечными кольцами. Для управляемых логических операций исследована сложность обнаружения и локализации неисправностей в процессе off-line контроля их аппаратных реализаций, а также вычислительная стойкость семейств легко-вычислимых перестановок. Исследована задача построения имитационной модели для семейства автоматов, определенных системами уравнений над конечными кольцами, а также вычислительная стойкость семейства хэш-функций, определяемых автоматом без выхода. Исследованы автоматы, определенные на многообразии над конечным кольцом, в том числе, автоматы, определенные на эллиптической кривой над конечным полем.

Ключевые слова: конечные автоматы, конечные кольца, многообразия, эллиптические кривые.

Введение. Развитие информационных технологий на современном этапе, их проникновение практически во все сферы деятельности человечества выдвинули защиту информации в число одной из наиболее актуальных проблем. От ее успешного решения зависит не только благополучие индивидуумов, организаций и государств, но часто и их существование. Именно по этой причине в течение последних тридцати лет всем мире прилагаются значительные усилия в области разработки математических основ криптографии (достаточно полный анализ используемых в криптографии моделей и методов содержится в [1–3]). Последняя, в свою очередь, оказывает существенное влияние на переосмысление задач, решаемых в классических областях математики (теория чисел, теория конечных алгебраических систем, алгебраическая геометрия и т.д.) и компьютерных наук (теория булевых функций, теория автоматов, теория алгоритмов и т.д.). В частности, на первый план выходит анализ вычислительной стойкости алгоритмов преобразования информации [4].

Переход криптографии от комбинаторных моделей к комбинаторно-алгебраическим моделям стимулировал создание нового раздела алгебраической теории автоматов, объект исследования которого – автоматы, определенные на конечных алгебраических структурах, а предмет исследования – анализ вычислительной стойкости отображений, реализуемых исследуемыми инициальными автоматами. Отметим, что такой анализ включает в себя в качестве основных задачи идентификации начального состояния автомата и параметрической идентификации автомата, принадлежащего заданному семейству, а также исследование множества неподвижных точек автоматных отображений.

В настоящей работе дан обзор результатов исследований автоматно-алгебраических моделей, полученных в ИПММ НАН Украины.

1. Управляемые логические операции. Эти операции являются основой построения скоростных блочных шифров [5]. Формальная модель управляемой перестановочной (соответственно, подстановочной) операции – такое отображение $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{v})$, ($\mathbf{x}\in\mathbf{E}^n$, $\mathbf{v}\in\mathbf{E}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbf{E}^l$, $\mathbf{E}=\{0,1\}$), что $n=l$ (соответственно, $n\le l$) и для каждого $\mathbf{v}_0\in\mathbf{E}^m$ отображение $\mathbf{g}_{\mathbf{v}_0}:\mathbf{E}^n\to\mathbf{E}^l$, где $\mathbf{g}_{\mathbf{v}_0}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{v}_0)$ – перестановка компонент вектора $\mathbf{x}\in\mathbf{E}^n$ (соответственно, инъекция). Вектор $\mathbf{x}\in\mathbf{E}^n$ – информационный, а вектор $\mathbf{v}\in\mathbf{E}^m$ – управляющий.