чої не жорсткості (тобто для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}\ ).$$

Тоді справедливість тверджень 1,2 та наслідків витікає із властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці та співвідношень (7) та (9).

$$A_\delta u_0 = C_\delta,\ C_\delta = (\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T, \qquad u_0 = A_\delta^{-1} \times C_\delta,\ C_\delta = (\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T,$$

$$\alpha_0 \times A_\delta = B,\ B = (\underbrace{1,1,...,1}_{m}), \qquad \alpha_0 = B \times A_\delta^{-1},\ B = (\underbrace{1,1,...,1}_{m}).$$

Висновок. Розв'язання двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) (1)–(3) та (4)–(6) на основі методу базисних матриць встановлює властивості оптимальних розв'язків прямої та двоїстої задачі, зокрема вказує на властивості єдності та неєдиності.

Після встановлення властивостей розв'язків прямої та двоїстої задач можна зробити висновки про рівноважні стани матричної гри (про сідлові точки задачі та їх властивості).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Golshteyn E.G., Yudin D.B. New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. Dantzig G.B Linear programming and application. M.: Progress, − 1966. (in Russian).
3. Dantzig G.B., Thapa M.N. Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
4. Dantzig G.B. Dikin's Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, − 1988.
5. Golshteyn E.G., Yudin D.B. Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
6. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. – 2007. – N 4. –.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 28.05.14

Тодорико Б. Д., асп.,
Кудин В. И., д-р техн. наук, вед. науч. сотр., Григорьева Ю. А., студ.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

МЕТОД БАЗИСНЫХ МАТРИЦ И РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГІЯХ

Проанализированы связи элементов метода базисных матриц для задачи линейного программирования нахождения оптимальных стратегий игроков матричной игры в смешанных стратегиях. Исследованы условия равновесности состояний матричной игры в смешанных стратегиях (оптимальные стратегии игроков) на основе положений метода базисных матриц для двойственной пары задач линейного программирования.

Ключевые слова: двоиста задача, матричная игра, метод Ланrранжа, линейное программирование.

Todoriko B. D., postgraduate
Kudyn V. I., Dr. Sc. Science
Grigorieva Y. A., a student
Taras Shevchenko National University of Kyiv

THE METHOD OF BASIS MATRICES AND THE EQUILIBRIUM STATE OF THE MATRIX GAME IN MIXED STRATEGIYAH

Analysis of communications elements method basis matrix for the linear programming problem of finding optimal strategies of players in the game matrix mixed strategies. The conditions of equilibrium states of a matrix game in mixed strategies (optimal strategies of players) on the basis of the method of basis matrices for the dual pair of linear programming problems.

Keywords: duol task matrix game, the Lagrangian method, linear programming.

УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, А. С. Сиренко, асп.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В настоящей работе будут рассматриваться линейные дифференциальные системы с линейными законами переключения. Получены условия устойчивости их решений.

Ключевые слова: устойчивость, разностные системы, переключение, метод Ляпунова.

Введение. Исследованию устойчивости дифференциальных и разностных систем в отдельности посвящено достаточно много работ. Например, можно указать [1–4]. В последнее время появился интерес к исследованию систем, описываемых одновременно и дифференциальными, и разностными системами (гибридными системами, системами с переключениями, логико-динамическими системами).

Как правило, понятие устойчивости касается только решений систем дифференциальных и разностных уравнений. В нелинейных системах решения бывают как устойчивыми, так и неустойчивыми. Поэтому понятие "устойчивая система" относится только к линейным системам.

1. Устойчивость линейных систем с линейными переключениями. Рассмотрим динамическую систему, описываемую совокупностью дифференциальных и разностных уравнений. А именно, в моменты $t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0,1,2,3,...$ система описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями

$$x'(t) = A_i x(t), \qquad (1.1)$$

а в моменты $t = t_i$ происходят переключения, которые описываются линейными разностными уравнениями

$$x(t_i + 0) = B_i x(t_i - 0),\ i = 0,1,2,3,... \qquad (1.2)$$

Под решением системы с переключениями (1.1), (1.2) будем понимать непрерывно дифференцируемую на промежутках $t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0,1,2,3,...$ функцию, которая при $i = 0,1,2,3,...$ скачкообразно изменяется согласно зависимости (1.2).

Интерес представляет получение условий асимптотической устойчивости решений динамических систем (1.1) с переключениями (1.2).

Определение 1.1. Нулевое решение системы с переключениями (1.1), (1.2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого решения $x(t)$ при произвольно заданных моментах переключения $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ с систем (1.1) на системы (1.2) и с (1.2) на (1.1) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ будет выполняться $|x(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$, лишь только $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon)$.

Предварительно получим условия устойчивости системы с переключениями (1.1), (1.2), основанные на представлении решений систем дифференциальных (1.1) и разностных (1.2) уравнений.

Теорема 1.1. Для асимптотической устойчивости системы с переключениями (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$, произвольных моментов переключения $t_0 < t_1 < t_2 < ... t_k < ...$ и $t > t_k$, $k = 1,2,3,...$ выполнялись неравенства

$$\delta(\varepsilon) < \varepsilon \min\left\{ \frac{1}{\left|\prod_{j=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})}\right|}, \frac{1}{\left|e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod_{i=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A(t_{k-i} - t_{k-i-1})}\right|} \right\}. \qquad (1.3)$$

Доказательство. Вычислим решение системы с переключениями, методом шагов.

1.1. Рассмотрим первый шаг, состоящий из движения по непрерывной траектории системы дифференциальных уравнений

$$x'(t) = A_1 x(t),\ t_0 \le t \le t_1. \qquad (1.3)$$

и переключения

$$x(t_1 + 0) = B_1 x(t_1). \qquad (1.4)$$

Движение по закону дифференциального уравнения (1.3) описывается решением вида

$$x(t) = e^{A_1(t-t_0)} x(0),\ t_0 \le t \le t_1.$$

И в момент $t = t_1$ оно имеет вид

$$x(t_1) = e^{A_1(t_1 - t_0)} x(0).$$

Далее идет переключение по закону (1.3) и в момент $t = t_1 + 0$ оно равно

$$x(t_1 + 0) = B_1 e^{A_1(t_1 - t_0)} x(0).$$

1.2.Рассмотрим второй шаг, также состоящий из движения по непрерывной траектории системы

$$x'(t) = A_2 x(t),\ t_1 < t \le t_2 \qquad (1.5)$$

и переключения

$$x(t_2 + 0) = B_2 x(t_2). \qquad (1.6)$$

Движение по закону (1.5) описывается в виде

$$x(t) = e^{A_2(t-t_1)} x(t_1 + 0),\ t_1 < t \le t_2.$$

И в момент $t = t_2$ оно имеет вид

$$x(t_2) = e^{A_2(t_2 - t_1)} x(t_1 + 0) = e^{A_2(t_2 - t_1)} B_1 e^{A_1(t_1 - t_0)} x(0).$$

Далее идет переключение по закону (1.6) и в момент $t = t_2 + 0$ оно имеет вид

$$x(t_2 + 0) = B_2 e^{A_2(t_2 - t_1)} B_1 e^{A_1(t_1 - t_0)} x(0).$$

Продолжая процесс дальше, получаем, что в момент $t = t_k + 0$ решение системы с переключениями имеет вид

$$x(t_k + 0) = \prod_{i=0}^{k-1} B_k e^{A_k(t_{k-i} - t_{k-i-1})} x(0).$$

Если рассматривать момент времени $t_k < t \le t_{k+1}$, то решение имеет вид

$$x(t) = e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod_{i=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})} x(0).$$

Таким образом, чтобы выполнялось условие устойчивости, сформулированное в определении 1.1, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$, произвольных моментов переключения $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ и $t > t_k$, $k = 1,2,3,...$ выполнялись неравенства

$$\delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\left|\prod_{i=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})}\right|},\ \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\left|e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod_{i=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})}\right|}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.1.

2. Использование второго метода Ляпунова. К сожалению, условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 1.1, проверяются тяжело. Они требуют явного представления решений дифференциальных и разностных систем и их "склейки".

Одним из основных методов исследования устойчивости дифференциальных и разностных систем в отдельности является второй метод Ляпунова [1–4]. Он состоит в поиске положительно определенной функции $V(x)$, полная производная которой в силу системы (для разностных систем – первая разность в силу системы) будет отрицательно определенной. Для линейных систем функция Ляпунова, как правило, ищется в виде квадратичной формы $V(x)=x^T Hx$.

Очевидно, достаточным условием асимптотической устойчивости системы с переключениями (1.1), (1.2) будет существование единой функции Ляпунова для системы в целом. Как известно, асимптотическая устойчивость для каждой из дифференциальных систем (1) гарантируется наличием положительно определенной квадратичной формы $V(x)=x^T Hx$, полная производная которой в силу каждой из систем является отрицательно определенной квадратичной формой. Поскольку

$$\frac{d}{dt}V(x)=x^T\left(A^T H+HA\right)x,$$

то асимптотическая устойчивость каждой из подсистем гарантируется существованием положительно определенных матриц C_i, при которых матричные уравнения Ляпунова

$$A_i^T H_i+H_i A_i=-C_i,\ i=1,2,3,... \tag{4}$$

имеют решениями положительно определенные матрицы H_i, $i=1,2,3,...$.

Для разностных систем (2), аналогично, асимптотическая устойчивость каждой из подсистем гарантируется существованием положительно определенных матриц C_i, при которых матричные уравнения Ляпунова

$$B_i^T H_i B_i-H_i=-C_i,\ i=1,2,3,...$$

имеют решениями положительно определенные матрицы H_i.

И, естественно, встает вопрос, при каких условиях существует единая матрица H, при которой соответствующие матрицы $C_i(A_i)$, $C_i(B_i)$ также будут отрицательно определенными [5,6].

2.1. Общая функция Ляпунова для дифференциальных систем.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения [7].

Лемма 2.1. Пусть матрица A асимптотически устойчива (в смысле линейного дифференциального уравнения, т.е. все ее собственные числа имеют отрицательную действительную часть $\mathrm{Re}\lambda_i(A)<0$, $i=\overline{1,n}$). Тогда множество $G_A(H)$ положительно определенных матриц H, для которых матрицы $C=-A^T H-HA$ также положительно определенные, образуют выпуклый конус в пространстве $R^{n\times n}$.

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 две положительно определенные матрицы, при которых матрицы $C_1=-A^T H_1-H_1A$, $C_2=-A^T H_2-H_2A$ также положительно определены. А тогда при произвольном $0\le\alpha\le1$ матрица $\alpha H_1+(1-\alpha)H_2$ также будет положительно определенной. Кроме того, матрица

$$-A^T\left(\alpha H_1+(1-\alpha H_2)\right)-\left(\alpha H_1+(1-\alpha)H_2\right)A=$$
$$=-\alpha\left(A^T H_1+H_1A\right)-(1-\alpha)\left(A^T H_2-H_2A\right)=\alpha C_1+(1-\alpha)C_2$$

также будет положительно определенной. Таким образом, множество положительно определенных матриц H образует выпуклое множество. Кроме того, в силу однородности, при произвольном $0<\beta<\infty$ матрицы βH также будут положительно определенными и такими, что

$$C(\beta)=-A^T(\beta H)-(\beta H)A=-\beta\left(A^T H+HA\right)$$

будут положительно определенными. Следовательно, множество $G_A(H)$ образует выпуклый конус.

Предварительно получим достаточные условия, при выполнении которых существует единая функция Ляпунова для подсистем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейные стационарные дифференциальные уравнения (1.1)

$$x'(t)=A_i x(t),\ i=\overline{1,n}.$$

Если матрицы A_i, $i=\overline{1,n}$ асимптотически устойчивые, то для произвольных положительно определенных матриц C_i, $i=\overline{1,n}$ матричные уравнения

$$A_i^T H+HA_i=-C_i \tag{2.1}$$

имеют единственными решениями – положительно определенные матрицы H_i, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим алгоритм построения общей функции Ляпунова, т.е. нахождения положительно определенной матрицы H_0, при которой все матрицы C_i^0 также будут положительно определенными.

Обозначим

$$C_{ij}=A_i^T H_j+H_j A_i,\ \ i\ne j. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. Пусть C_i, $i=\overline{1,n}$ положительно определенные матрицы и H_i соответствующие решения уравнений Ляпунова. Если существуют постоянные $0\le\alpha_i\le 1$, $i=\overline{1,n-1}$, при которых матрицы

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12}-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{1,n-1}-(1-\alpha_{n-1})C_{1,n},$$
$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21}+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{2,n-1}-(1-\alpha_{n-1})C_{2,n}.$$
$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,1}-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,2}-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{n,n-1}+(1-\alpha_{n-1})C_n. \qquad (2.3)$$

также положительно определены, то для систем (1.1) существует единая функция Ляпунова и она имеет вид $V(x)=x^TH(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})x$, где

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n-1})=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2+...+(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3+....$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1}+(1-\alpha_{n-1})H_n. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Как следует из леммы 2.1, для асимптотически устойчивых матриц A_i множество положительно определенных матриц H_i, при которых линейные комбинации $C_i=-A_i^TH-HA_i$ также положительно определены, образуют выпуклые конусы $G_{A_i}(H)$, $i=\overline{1,n}$. И общая функция Ляпунова существует тогда и только тогда, когда эти конуса имеют непустое пересечение.

Рассмотрим первые две матрицы H_1 и H_2 входящие в конусы $G_{A_1}(H)$, $G_{A_2}(H)$ и построим третью матрицу, расположенную на прямой, соединяющей эти две матрицы.

$$H(\alpha_1)=\alpha_1H_1+(1-\alpha_1)H_2. \qquad (2.5)$$

Если общая функция Ляпунова для первой и второй подсистем существует, то, в силу выпуклости конусов, всегда имеются матрицы H_1 и H_2 и параметр $0\le\alpha_1\le 1$, такие, что общая функция Ляпунова может быть представленной в виде (2.5).

Рассмотрим третью подсистему. Если она асимптотически устойчива, то существует матица H_3, входящая в конус положительно определенных матриц $G_{A_3}(H)$. Построим матрицу $H(\alpha_1,\alpha_2)$ расположенную на отрезке прямой, соединяющей $H(\alpha_1)$ и H_3:

$$H(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2H(\alpha_1)+(1-\alpha_2)H_3=$$
$$=\alpha_2\left[\alpha_1H_1+(1-\alpha_1)H_2\right]+(1-\alpha_2)H_3=\alpha_1\alpha_2H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2H_2+(1-\alpha_2)H_3,\ 0\le\alpha_2\le 1.$$

Рассмотрим четвертую подсистему. Если она асимптотически устойчива, то существует матица H_4, входящая в $G_{A_4}(H)$. Построим матрицу $H(\alpha_1,\alpha_2)$ расположенную на отрезке прямой, соединяющей $H(\alpha_1)$ и H_3:

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_3H(\alpha_1,\alpha_2)+(1-\alpha_3)H_4=$$
$$=\alpha_3\left[\alpha_1\alpha_2H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2H_2+(1-\alpha_2)H_3\right]+(1-\alpha_3)H_4=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3H_2+(1-\alpha_2)\alpha_3H_3+(1-\alpha_3)H_4.$$

Рассмотрим последнюю $n-$ подсистему. Аналогично получим

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n-1})=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2+...+(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3+....$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1}+(1-\alpha_{n-1})H_n.$$

Получим условия, при выполнении которых полученная матрица будет общей для всех подсистем.

Условием того, что полученная таким образом матрица будет матрицей функции Ляпунова для первой подсистемы, есть положительная определенность матрицы

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=-A_1^TH(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})-H(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})A_1=$$
$$=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_1+H_1A_1\right)-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_2+HA_1\right)-$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_3+H_3A_1\right)+...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_{n-1}-H_{n-1}A_1\right)-(1-\alpha_{n-1})\left(A_1^TH_n+H_nA_1\right).$$

Поскольку первое выражение определяется уравнением Ляпунова для первой подсистемы, то

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_2+H_2A_1\right)-$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_3+H_3A_1\right)+...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(A_1^TH_{n-1}-H_{n-1}A_1\right)-(1-\alpha_{n-1})\left(A_1^TH_n+H_nA_1\right).$$

Аналогично, можно получить, что условием того, что полученная матрица будет матрицей функции Ляпунова для второй подсистемы, будет положительная определенность матрицы

$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -A_2^T H(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) - H(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})A_2 =$$
$$= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_1 + H_1 A_2\right) - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_2 + H_2 A_2\right) -$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_3 + H_3 A_2\right) + ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_{n-1} - H_{n-1}A_2\right) - (1-\alpha_{n-1})\left(A_2^T H_n + H_n A_2\right).$$

Или

$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_1 + H_1 A_2\right) + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2 -$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_3 + H_3 A_2\right) - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_{n-1} - H_{n-1}A_2\right) - (1-\alpha_{n-1})\left(A_2^T H_n + H_n A_2\right).$$

Для последней подсистемы получаем

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_1 + H_1 A_n\right) - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_2 + HA_n\right) -$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_3 + H_3 A_n\right) - ... -(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_{n-1} - H_{n-1}A_n\right) + (1-\alpha_{n-1})C_n.$$

Обозначим

$$C_{ij} = A_i^T H_j + H_j A_i, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1 - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12} - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13} - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{1,n-1} - (1-\alpha_{n-1})C_{1,n},$$
$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21} + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2 - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23} - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{2,n-1} - (1-\alpha_{n-1})C_{2,n}.$$

……………………………………………………………………………..

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,1} - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,2} - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3} - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{n,n-1} + (1-\alpha_{n-1})C_n.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.1.

2.2. Единая функция Ляпунова для разностных подсистем. Получим достаточные условия, при выполнении которых существует единая функция Ляпунова для подсистем разностных уравнений. Рассмотрим уравнения (1.2)

$$x(k+1) = B_i x(k), \quad k = 0,1,2,3,..., \quad i = \overline{1,n}.$$

Если матрицы B_i, $i = \overline{1,n}$ асимптотически устойчивые, т.е. $\left|\lambda_i(B_j)\right| < 1$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ то для произвольных положительно определенных матриц C_i, $i = \overline{1,n}$ матричные уравнения

$$B_i^T H B_i - H = -C_i \tag{2.6}$$

имеют единственными решениями – положительно определенные матрицы H_i, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим алгоритм построения общей функции Ляпунова,

Лемма 2.2. Пусть матрица B асимптотически устойчива (в смысле линейного разностного уравнения, т.е. все ее собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы, или $\left|\lambda_i(A)\right| < 1$, $i = \overline{1,n}$). Тогда множество $S_B(H)$ положительно определенных матриц H, для которых матрицы $H - B^T HB$ также положительно определенные, образуют выпуклый конус в пространстве $R^{n\times n}$.

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 две положительно определенные матрицы, при которых матрицы $C_1 = H_1 - B^T H_1 B$, $C_2 = H_2 - B^T H_2 B$ также положительно определены. А тогда при произвольном $0 \le \alpha \le 1$ матрицы $\alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ также будут положительно определенными. Кроме того, матрица

$$\left(\alpha H_1 + (1-\alpha H_2)\right) - B^T\left(\alpha H_1 + (1-\alpha)H_2\right)B =$$
$$= \alpha\left(H_1 - B^T H_1 B\right) + (1-\alpha)\left(H_2 - B^T H_2 B\right) = \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2$$

также будет положительно определенной. Таким образом, множество положительно определенных матриц H образует выпуклое множество. Кроме того, в силу однородности, при $0 < \beta < \infty$ матрицы βH также будут положительно определенными и такими, что

$$C(\beta) = (\beta H) - B^T(\beta H)B = \beta\left(H - B^T HB\right)$$

также положительно определены. Следовательно, как и в лемме 2.1., множество $S_B(H)$ образует выпуклый конус.

Обозначим

$$C_{ij} = H_j - B_i H_j B_i, \quad i \neq j. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. Пусть C_i, $i = \overline{1,n}$ положительно определенные матрицы и H_i соответствующие решения уравнений Ляпунова. Если существуют постоянные $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$, при которых матрицы

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12}-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{1,n-1}-(1-\alpha_{n-1})C_{1,n},$$
$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21}+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{2,n-1}-(1-\alpha_{n-1})C_{2,n}.$$
$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,1}-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,2}-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3}-...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{n,n-1}+(1-\alpha_{n-1})C_n. \quad (2.8)$$

также положительно определены, то для систем (1) существует единая функция Ляпунова и она имеет вид $V(x)=x^T H(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})x$, где

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2+...+(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3+....$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1}+(1-\alpha_{n-1})H_n. \quad (2.9)$$

Доказательство. Схема доказательства теоремы 3 аналогична схеме доказательства предыдущей теоремы. Как следует из леммы 2.2, для асимптотически устойчивых матриц B_i множество положительно определенных матриц H_i, при которых линейные комбинации $C_i = H - B_i^T H B_i$ также положительно определены, образуют выпуклые конусы $G_{B_i}(H)$, $i=\overline{1,n}$. И общая функция Ляпунова существует тогда и только тогда, когда эти конуса имеют непустое пересечение.

Рассмотрим матрицы H_1 и H_2 водящие в первые два конуса $S_{B_1}(H)$, $S_{B_2}(H)$ и построим третью матрицу, расположенную на прямой, соединяющей эти две матрицы.

$$H(\alpha_1)=\alpha_1H_1+(1-\alpha_1)H_2. \quad (3)$$

Если общая функция Ляпунова для первой и второй подсистем существует, то, в силу выпуклости конусов, всегда имеются матрицы H_1 и H_2 и параметр $0\le\alpha_1\le1$, такие, что общая функция Ляпунова может быть представленной в виде (3).

Рассмотрим третью подсистему. Если она асимптотически устойчива, то существует матица H_3, входящая в конус положительно определенных матриц $G_{A_3}(H)$. Построим матрицу $H(\alpha_1,\alpha_2)$ расположенную на отрезке прямой, соединяющей $H(\alpha_1)$ и H_3:

$$H(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2H(\alpha_1)+(1-\alpha_2)H_3=$$
$$=\alpha_2\left[\alpha_1H_1+(1-\alpha_1)H_2\right]+(1-\alpha_2)H_3=\alpha_1\alpha_2H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2H_2+(1-\alpha_2)H_3,\ 0\le\alpha_2\le1.$$

Рассмотрим последнюю $n-$ подсистему. Аналогично случаю дифференциальных систем получим

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n-1})=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2+...+(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3+....$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1}+(1-\alpha_{n-1})H_n.$$

Получим условия, при выполнении которых полученная матрица будет общей для всех подсистем.

Условием того, что полученная матрица будет матрицей функции Ляпунова для первой подсистемы, есть положительная определенность матрицы

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=H(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})-B_1^TH(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})B_1=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(H_1-B_1^TH_1B_1\right)+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}(H_2-B_1H_2B_1)-$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(H_3-B_1^TH_3B_1\right)+...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}(H_{n-1}-B_1H_{n-1}B_1)-(1-\alpha_{n-1})(H_n-B_1H_nB_1).$$

Поскольку первое выражение определяется уравнением Ляпунова для первой подсистемы, то

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1-(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}(H_2-B_1H_2B_1)-$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(H_3-B_1^TH_3B_1\right)+...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}(H_{n-1}-B_1H_{n-1}B_1)+(1-\alpha_{n-1})\left(H_n-B_1^TH_nB_1\right).$$

Далее, условием того, что полученная матрица будет матрицей функции Ляпунова для второй подсистемы, будет положительная определенность матрицы

$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=H(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})-B_2^TH(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})B_2=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(H_1-B_2^TH_1B_2\right)+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(H_2-B_2^TH_2B_2\right)+$$
$$-(1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(H_3-B_2^TH_3B_2\right)+...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}\left(H_{n-1}-B_2^TH_{n-1}B_2\right)-(1-\alpha_{n-1})\left(H_n-B_2^TH_nB_2\right).$$

Или

$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_2^TH_1+H_1A_2\right)+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2-$$

$$-\left(1-\alpha_2\right)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_3 + H_3 A_2\right) - ...$$
$$-\left(1-\alpha_{n-2}\right)\alpha_{n-1}\left(A_2^T H_{n-1} - H_{n-1} A_2\right) - \left(1-\alpha_{n-1}\right)\left(A_2^T H_n + H_n A_2\right).$$

Для последней подсистемы получаем

$$C_n\left(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}\right) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_1 + H_1 A_n\right) - \left(1-\alpha_1\right)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_2 + H A_n\right) -$$
$$-\left(1-\alpha_2\right)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_3 + H_3 A_n\right) - ... -\left(1-\alpha_{n-2}\right)\alpha_{n-1}\left(A_n^T H_{n-1} - H_{n-1} A_n\right) + \left(1-\alpha_{n-1}\right)C_n.$$

Обозначим

$$C_{ij} = H_j - B_i^T H_j B_i, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$C_1\left(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}\right) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1 - \left(1-\alpha_1\right)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12} - \left(1-\alpha_2\right)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13} - ...$$
$$-\left(1-\alpha_{n-2}\right)\alpha_{n-1}C_{1,n-1} - \left(1-\alpha_{n-1}\right)C_{1,n},$$
$$C_2\left(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}\right) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21} + \left(1-\alpha_1\right)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2 - \left(1-\alpha_2\right)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23} - ...$$
$$-\left(1-\alpha_{n-2}\right)\alpha_{n-1}C_{2,n-1} - \left(1-\alpha_{n-1}\right)C_{2,n}.$$

……………………………………………………………………………..

$$C_n\left(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}\right) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,1} - \left(1-\alpha_1\right)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n,2} - \left(1-\alpha_2\right)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3} - ...$$
$$-\left(1-\alpha_{n-2}\right)\alpha_{n-1}C_{n,n-1} + \left(1-\alpha_{n-1}\right)C_n.$$

И получаем утверждение теоремы 2.2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1965. – 530 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., Наука, 1967. –
3. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М., Мир, 1971. – 309 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев, Наукова думка, 1972. – 246 с.
5. Сиренко А.С. Об одном алгоритме нахождения единой функции Ляпунова двух линейных разностных систем // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 2014. – С 107-113.
6. Сиренко А.С., Хусаинов Д. Я. О существовании единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика, в.13, 2013. – С 46-51.
7. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в линамике систем. – Нукус, МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 138 с.

Надійшла до редколегії 15.09.14

Хусаїнов Д. Я., д-р фіз.-мат. наук,
Сіренко А. С., асп.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ПЕРЕМИКАННЯМ

У даний роботі будуть розглядатися лінійні диференціальні системи з лінійними законами перемикання. Одержано умови стійкості їх рішень.
Ключові слова: стійкість, різницеві системи, перемикання, метод Ляпунова.

Khusainov D. Ya., Dr. Sc. phys. math. Professor,
Sirenko A. S., graduate,
Taras Shevchenko National University of Kiev

STABILITY OF LINEAR SYSTEMS WITH SWITCHING

In this paper we consider linear differential systems with linear laws change. Stability conditions of their decisions.
Keywords: stability, difference systems, switching, Lyapunov method.

УДК 517.929

V.O. Yatsenko, Professor, O. I. Kochkodan, PhD student
M. V. Makarychev, , PhD student,O. A. Turovsky student
Space Research Institute NASU-SSAU, Kyiv

ADAPTIVE CONTROL OF LYAPUNOV EXPONENTS

A new approach to adaptive control of local Lyapunov exponents is considered. A numerical optimization algorithm to determine the spectrum of Lyapunov exponents from the observed noise time series of a single variable is proposed. The approach is tested on non-linear lattice with known Lyapunov spectra.

Keywords: adaptive control, Lyapunov exponent, optimization, modeling

1. Optimization approach to estimation of Lyapunov exponents

Let us consider an observed trajectory $x(t)$, which can be considered as a solution of a certain dynamical system:

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

where $u \in U \subset R^n$, $x \in M$ – smooth manifold, and is defined in a *d*-dimensional space. On the other hand, the evolution of the tangent vector γ in a tangent space at $x(t)$ is represented by linearizing Eq. (1),