УДК 517.929.4

А. Т. Кожаметов, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Нукусский университет, Каракалпакстан, Узбекистан,
А. В. Шатырко, канд. физ.-мат. наук, Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук,
Киевский национальный університет имени Тараса Шевченко, Киев

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Рассматривается, ставшая уже классической, задача исследования глобальной устойчивости тривиального положения равновесия системы автоматического регулирования с одной нелинейностью, расположенной в заданном линейном секторе. Т.е. так называемая проблема абсолютной устойчивости. Аппаратом исследования выбран прямой метод Ляпунова, с функциями из заданного класса – квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности. Предложен оптимизационный подход практического построения функции Ляпунова для заданного класса, основанный на применении обобщенной градиентной процедуры.

Ключевые слова: система регулирования, функция Ляпунова, абсолютная устойчивость, оптимизация, обобщенный градиент

Введение. Одним из универсальных методов исследования динамики систем различного вида является второй метод Ляпунова. Основные формулировки утверждений метода гласят, что если существует положительно определенная функция, полная производная которой в силу системы является отрицательно определенной функцией, то нулевое решение системы устойчиво (асимптотически устойчиво). Основные теоремы JЛяпунова про устойчивость и асимптотическую устойчивость носят необходимый и достаточный характер. Доказано, если нулевое решение системы асимптотически устойчиво, то функция Ляпунова существует [1]. Однако несмотря на теоретическую завершенность метода неразрешимой проблемой является собственно построение требуемой функции. В каком-то смысле, задача нахождения функции Ляпунова похожа на задачу нахождения интеграла системы. В основном, функция Ляпунова ищется в заранее заданном классе функций, например в классе квадратичных функций [2]. В этом случае задача нахождения функции Ляпунова облегчается.

В работах [3-12] было показано, что проблему нахождения функции Ляпунова можно свести к решению задачи выпуклого программирования с целевой функцией, имеющей вид минимального собственного числа. Были сформулированы условия существования решения поставленных задач. Известно, что одним из эффективных численных методов решения задач оптимизации является градиентный метод [13-15]. Однако в задачах оптимизации функции Ляпунова целевые функции являются недифференцируемыми. Кроме того, встает проблема получения градиента в явном виде. В настоящей работе предлагается использовать понятие «производной по направлению». И, если брать производную по каждой координате положительно определенной матрицы, входящей в функцию Ляпунова, то можно сформулировать понятие «градиента».

Численный метод, основанный на градиентной процедуре. Рассмотрим систему прямого регулирования, описаную системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\sigma(t)),\quad \sigma(t) = c^T x(t),\quad A \in R^{n\times n},\quad x(t), c, b \in R^n \tag{1}$$

Матрица A линейной части системы (1) асимптотически устойчивая, а нелинейная функция $f(\sigma)$, $\sigma(t) = c^T x(t)$ удовлетворяет, так называемому "условию сектора"

$$0 \le \sigma f(\tau) \le k\sigma^2,\ k = const.$$

Система называется абсолютно устойчивой, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво в целом, т.е. во всем пространстве, при произвольной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей "условию сектора".

Одним из методов исследования задач абсолютной устойчивости является использование второго метода Ляпунова. Рассмотрим задачу получения гарантированного условия абсолютной устойчивости в заданном классе функций Ляпунова

$$V(x) = x^T Hx + \beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma\,. \tag{2}$$

с некоторой положительно определенной матрицей H и скаляром $\beta \ge 0$.

Используя "условие сектора", оценку полной производной функции (2) в силу системы (1) можно записать в виде квадратичной формы

$$\frac{d}{dt}V(x(t) \le -x^T(t)C(H,\beta,\nu)x(t),$$

где

$$C(H,\beta,\nu) = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I\nu)c\right] \\ -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I\nu)c\right]^T & \frac{\nu}{k} + \beta b^T c \end{bmatrix}$$

Или в виде

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\lambda_{\min}[C(H,\beta,\nu)]|x(t)|^2,$$

где I – единичная матрица, $\nu \ge 0$ - некоторая постоянная (множитель Лагранжа).

И задача исследования абсолютной устойчивости сводится к оптимизационной задаче нахождения положительно определенной матрицы H^0 и величин $\beta^0 \ge 0$, $\nu^0 \ge 0$, при которых минимальное собственное число симметричной матрицы $C\left(H^0,\beta^0,\nu^0\right)$, которая определяет производную функции Ляпунова в силу системы (1), будет максимальным.

Оптимизационная задача рассматривается на множестве троек $L=\left\{(H,\beta,\nu): H\geq 0,\beta\geq 0,\nu\geq 0\right\}$, где под $H\geq 0$ понимается положительная полуопределенность матриц H. Выберем в качестве нормы

$$|(H,\beta,\nu)|=\sqrt{|H|^2+\beta^2+\nu^2},\ |H|=\lambda_{\max}(H).$$

Тут и далее будем обозначать $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – экстремальные собственные числа соответствующих симметричных положительно определенных матриц.

Как известно, симметричная матрица $C(H,\beta,\nu)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right]>0.$ И задачу нахождения гарантированного условия абсолютной устойчивости системы (1) в классе функций (2) можно рассматривать как оптимизационную задачу

$$\phi(H,\beta,\nu)\to\min_{(H,\beta,\nu)\in L} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\lambda_{\min}(H)\geq 0,\quad \beta\geq 0\quad \nu\geq 0, \qquad \phi(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C(H,\beta,\nu)\right]. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что множество L - является линейным пространством, которое представляет собой выпуклый конус [3]. И, если оптимизационная задача (3), (4) имеет решением тройку (H^0,β^0,ν^0), для которой будет выполняться

$$\phi(H^0,\beta^0,\nu^0)<0,$$

то система регулирования (1) будет абсолютно устойчивой. Если

$$\phi(H^0,\beta^0,\nu^0)>0,$$

то задача исследования абсолютной устойчивости в классе функций вида (1) за счет выбора H, β, ν не решается.

Обозначим через L_1 подмножество L которое состоит из троек (H,β,ν), находящихся внутри единичной сферы, т.е. удовлетворяющих условию

$$\lambda^2_{\max}(H)+\beta^2+\nu^2\leq 1. \tag{5}$$

Приведенная задача оптимизации является задачей динамического программирования с ограничениями. Наиболее часто используемым методом решения задач такого типа есть градиентный метод и его модификации [13].

Поскольку вычислить градиент от целевой функции, представляющей собой экстремальное собственное число в общем случае затруднительно, для решения задачи оптимизации будем использовать понятие производной по направлению.

Определение. 1. Пусть для двух троек $(H_0,\beta_0,\nu_0),\in L_1$, $(M,\alpha,\gamma),\in L_1$ и $0\leq t\leq t_1$ выполняется $(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)\in L_1$. Если существует предел

$$\frac{d\varphi(H_0,\beta_0,\nu_0)}{d(M,\alpha,\gamma)}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\{\varphi(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)-\varphi(H_0,\beta_0,\nu_0)\}, \tag{6}$$

то выражение $d\varphi(H_0,\beta_0,\nu_0)/d(M,\alpha,\gamma)$ называется производной функции $\phi(H,\beta,\nu)$ по направлению (M,α,γ) в точке (H_0,β_0,ν_0).

Лемма 1. Производная функции $\varphi(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C(H,\beta,\nu)]$ по направлению (M,α,γ) в точке $(H_0,\beta_0,\nu_0)\in L_1$ имеет вид

$$\frac{d\varphi(H_0,\beta_0,\nu_0)}{d(M,\alpha,\gamma)}=-(y^0_{\min})^T C(M,\alpha,\gamma)y^0_{\min}. \tag{7}$$

Здесь $y^0_{\min}$ – граничный единичный собственный вектор матрицы $C(H_0,\beta_0,\nu_0)$ по направлению (M,α,γ) т.е.

$$y^0_{\min}=\lim_{t\to+0}y_{\min}(t),\ \ y_{\min}(t)=y_{\min}[C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+\gamma t)]. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим возмущенную матрицу $C\left[(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)\right]$, $0\leq t\leq t_1$ и, соответственно, ее минимальное собственное число $\lambda_{\min}\left[C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)\right]$ и минимальный нормированный собственный вектор $y_{\min}(t)$. В силу непрерывности, при $t\to+0$ будет выполняться

$$\lambda_{\min}\left[C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)\right]\to\lambda_{\min}\left[C(H_0,\beta_0,\nu_0)\right],\ y_{\min}(t)\to y^0_{\min}.$$

Поскольку $y_{\min}(t)$ нормированный вектор, то, по определению, для $0\leq t\leq t_1$ тождественно выполняются соотношения

$$y^T_{\min}(t)y_{\min}(t)\equiv 1,$$

$$\lambda_{\min}[C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)]\equiv y^T_{\min}(t)C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)y_{\min}(t).$$

Собственное число и собственные векторы симметричных матриц являются кусочно непрерывно дифференцируемыми функциями (кроме случая кратных корней). И в некотором промежутке $0\leq t\leq t_1$ функции $y_{\min}(t)$ и $\lambda_{\min}[C(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma)]$ будут иметь производные.

Продифференцировав приведенные тождества по t, получим

$$\left(y'_{\min}(t)\right)^T y_{\min}(t) + y^T_{\min}(t) y'_{\min}(t) \equiv 0, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right] = \left(y'_{\min}(t)\right)^T C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right) y_{\min}(t) +$$
$$+\left(y_{\min}(t)\right)^T \frac{d}{dt} C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right) y_{\min}(t) +$$
$$+\left(y_{\min}(t)\right)^T C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right) y'_{\min}(t) \tag{10}$$

Первое тождество дает

$$\left(y'_{\min}(t)\right)^T y_{\min}(t) = -y^T_{\min}(t) y'_{\min}(t)$$

Имеют место тождественные соотношения

$$C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right) y_{\min}(t) \equiv \lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right] y_{\min}(t)$$

где

$$C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right) = \begin{bmatrix} -A^T H_0 - H_0 A & -\left[H_0 b + \frac{1}{2}\left(\beta_0 A^T + I\nu_0\right)c\right] \\ -\left[H_0 b + \frac{1}{2}\left(\beta_0 A^T + I\nu_0\right)c\right]^T & \frac{\nu_0}{k} - \beta_0 b^T c \end{bmatrix} +$$
$$+t\begin{bmatrix} -A^T M - MA & -\left[Mb + \frac{1}{2}\left(\alpha A^T + I\gamma\right)c\right] \\ -\left[Mb + \frac{1}{2}\left(\alpha A^T + I\gamma\right)c\right]^T & \frac{\gamma}{k} - \alpha b^T c \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left(y_{\min}(t)\right)^T C(M,\alpha,\gamma) y_{\min}(t) =$$
$$= \left(y^0_{\min}\right)^T C(M,\alpha,\gamma) y^0_{\min}$$

$$C(M,\alpha,\gamma) = \begin{bmatrix} -A^T M - MA & -\left[Mb + \frac{1}{2}\left(\alpha A^T + I\gamma\right)c\right] \\ -\left[Mb + \frac{1}{2}\left(\alpha A^T + I\gamma\right)c\right]^T & \frac{\gamma}{k} - \alpha b^T c \end{bmatrix}.$$

И получаем, что

$$\frac{d}{dt}\lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right] =$$
$$= \lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right]\left(y'_{\min}(t)\right)^T y_{\min}(t) - \left(y_{\min}(t)\right)^T C(M,\alpha,\gamma) y_{\min}(t) +$$
$$+ \lambda_{\min}\left[C\left(H_0+tM,\beta_0+t\alpha,\nu_0+t\gamma\right)\right]\left(y_{\min}(t)\right)^T y'_{\min}(t) = \left(y_{\min}(t)\right)^T C(M,\alpha,\gamma) y_{\min}(t).$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем утверждение (7) леммы 1, что и необходимо было доказать.

Приведем условия решения задачи оптимизации (3) - (5) в терминах обобщенного градиента.

Определение 2. Пусть $U \subseteq L_1$ некоторое множество и $(H_0,\beta_0,\nu_0) \in U$. Направление (M,α,γ) назовем возможным в точке (H_0,β_0,ν_0) если существует $t_0 > 0$ такое, что при всех $0 \le t \le t_0$ будет выполняться ($H_0 + tN, \beta_0 + t\alpha, \nu_0 + t\gamma) \in U$.

Приведем необходимые условия решения задачи (3) - (5).

Теорема 1. Пусть U_* – множество точек минимума функции $\phi(H,\lambda,\nu)$ в L_1 и в точке (H_*,λ_*,ν_*) функция $\varphi(H,\beta,\nu)$ имеет производные по всем возможным направлениям. Тогда, если в точке (H_*,β_*,ν_*) функция достигает минимума, то по произвольному возможному направлению (M,α,γ) выполняется условие

$$\frac{d\varphi(H_*,\beta_*,\nu_*)}{d(M,\alpha,\gamma)} \ge 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $(H\ ,\beta\ ,\nu\ ) \in L_1$ и (M,α,γ) – возможное направление в этой точке. Тогда, по условию

$$\varphi(H_* + tM,\ \beta_* + t\alpha, \nu_* + t\gamma) - \varphi(H_*,\beta_*,\nu_*) \ge 0.$$

Разделив на $t \ge 0$ и направив $t \to +0$, получим

$$\frac{d\varphi(H_*,\beta_*,\nu_*)}{d(M,\alpha,\gamma)} = \lim_{t\to +0}\frac{\varphi(H_* + tM,\ \beta_* + t\alpha, \nu_* + t\gamma) - \varphi(H_*,\beta_*,\nu_*)}{t} \ge 0,$$

то есть получаем утверждения теоремы.

Возьмем за возможные направления базисные векторы, которые построенные следующим образом. Выберем в пространстве симметричных матриц в качестве базиса матрицы Δ_{sk}, у которых на месте (s,k) – го и (k,s) -го элементов стоит одна вторая, а другие элементы нули (если $s = k$, т.е. это диагональный элемент, то стоит единица), Θ – нулевая матрица. Тогда произвольную симметричную матрицу

$$H = \{h_{ij}\},\ 1 \le i \le j \le n$$

можно представить в виде

$$H = \sum_{1 \le k \le sn} h_{ij} \Delta_{ij}$$

Возьмем за базисные направления тройки $(\Delta_{sk},1,1)$, $1 \le i \le j \le n$, $1 \le i \le j \le n$. И в качестве производных по направлениям (M,α,γ) функции $\varphi(H,\beta,\nu)$ будем брать производные по этим базисным направлениям. Образуем тройки, первым элементом которых является набор $n(n+1)/2$ квадратичных форм матриц $C(\Delta_{ij},0,0)$, $1 \le i \le j \le n$, а вторым и третим элементами квадратичные формы от матриц $C(\Theta,1,0)$, $C(\Theta,0,1)$

$$\nabla(H,\beta,\gamma) = \left\{ (y^1_{\min}(s,k))^T C(\Delta_{ij},0,0) y^1_{\min}(s,k), (y^2_{\min})^T C(\Theta,1,0) y^2_{\min}, (y^3_{\min})^T C(\Theta,0,1) y^3_{\min} \right\}, \quad (12)$$

где

$$C(\Delta_{ij},0,0) = \begin{bmatrix} -A^T\Delta_{ij} - \Delta_{ij}A & -\Delta_{ij}b \\ -b^T\Delta_{ij} & 0 \end{bmatrix} \; C(\Theta,1,0) = \begin{bmatrix} \Theta & -\frac{1}{2}A^T c \\ -\frac{1}{2}c^T A & -b^T c \end{bmatrix}, \; C(\Theta,0,1) = \begin{bmatrix} \Theta & -\nu c \\ -c^T \nu & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

Здесь $y^1_{\min}(s,k)$ — предельный единичный минимальный собственный вектор матрицы $C(\Delta_{ij},0,0)$, который отвечает направлению $(\Delta_{ij},0,0)$, $y^2_{\min}$ — предельный единичный минимальный собственный вектор матрицы $C(\Theta,1,0)$, который отвечает $(\Theta,1,0)$. , $y^3_{\min}$ — предельный единичный минимальный собственный вектор матрицы $C(\Theta,0,1)$, который отвечает $(\Theta,0,1)$.

Определение 3. Назовем тройку

$$\nabla(H,\beta,\gamma) = \left\{ (y^1_{\min}(s,k))^T C(\Delta_{ij},0,0) y^1_{\min}(s,k), (y^2_{\min})^T C(\Theta,1,0) y^2_{\min}, (y^3_{\min})^T C(\Theta,0,1) y^3_{\min} \right\},$$

которая составлена из производных по базисным направлениям $(\Delta_{ij},0,0)$ (12) градиентом функции $\varphi(H,\beta,\gamma)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Если (H_0,β_0,γ_0) есть решение задачи оптимизации (3) - (5), то градиент $\nabla\varphi(H_0,\beta_0,\gamma_0)$ по направлениям базиса $(\Delta_{sk},0,0)$, $(\Theta,1,0)$, $(\Theta,0,1)$, $1 \le i \le j \le n$ в точке (H_0,β_0,γ_0) состоит из неотрицательных элементов.

Доказательство. Утверждение теоремы основано на утверждении предшествующей теоремы и выборе производных по направлениям..

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз. – 211 с.
2. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова, Киев, Наукова думка, 1981. – 412 с.
3. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д., Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, Изд.-во МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.
4. Хусаинов Д.Я. Об оптимизации оценивания времени переходного процесса в линейных системах с использованием функции Ляпунова. – В сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления, в.69, К.: Изд.-во Института кибернетики АН УССР, 1986. – С.33–37.
5. Жуйкова А.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки области изменения параметров в системах непрямого регулирования // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.6, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.93–97.
6. Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки времени переходного процесса в задачах регулирования.- В сб.: Вычислительная и прикладная математика, в.61, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.106–112.
7. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Оптимизация оценок начальных возмущений в линейных стохастических системах.- Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.7, К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1988. – С.40–45.
8. Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 1992. – С.27–33.
9. Бычков А.С., Лобок А.П., Нечаева И.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок устойчивости систем стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ, – №4, – 1992. – С.38–43.
10. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптмизационный метод исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием // Кибернетика и системный анализ, N4, 1996. – С.88–93.
11. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод построения функционалов Ляпунова-Красовского в стационарных системах с запаздыванием. – В сб. Вычислительная и прикладная математика, – В.80, – 1996. – С.142–151.
12. Хусаинов Д.Я., Стадник О.И., Давыдов В.Ф. Оптимизация оценок характеристик динамических систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики, – N1 (84), – 1999, – С.128–136.
13. Бейко І.В., Зінько П.М. Наконечний О.Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації. – К., ВПЦ Київського національного університета імені Тараса Шевченка, – 2012. – 799 с.
14. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., Наука, 1988. – 552 с.
15. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М., Наука, 1975. – 320 с.

Поступила в редколлегию 20.09.14

Кожаметов А. Т. канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Нукуського університета, Каракалпакстан, Узбекістан,
Шатирко А. В., канд. фіз.-мат. наук,
Хусаїнов Д. Я., д-р фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ОТРИМАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Розглядається задача, що стала вже класичною, дослідження глобальної стійкості тривіального положення рівноваги системи автоматичного регулювання з однією нелінійністю, що розташована в заданому лінійному секторі. Т.е. так звана проблема абсолютної стійкості. Апаратом дослідження обрано прямий метод Ляпунова, з функціями із заданого класу – квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності. Запропоновано оптимізаційний підхід практичної побудови функції Ляпунова для заданого класу, заснований на застосуванні узагальненої градієнтної процедури.

Ключові слова: система регулювання, функція Ляпунова, абсолютна стійкість, оптимізація, узагальнений градієнт

Kozhametov A. T. Ph.D. in Math.,
Universiteta Nukus, Karakalpakstan, Uzbekistan,
Shatyrko A. V., Ph.D. . in Math.,
Khusainov D. Ya., Dr. Sc. Prof.,
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON A NUMERICAL METHOD FOR OBTAINING THE OPTIMAL LYAPUNOV FUNCTION

The problem of studying the global stability of the trivial equilibrium position of the automatic control system with a non-linearity, which is located at a predetermined linear sector, is considered. This is so-called absolute stability problem (or Lur'e problem), which has already become a classic. Lyapunov's direct method, with the functions of a given class – quadratic form plus integral of the nonlinearity is selected as apparatus for studying. We propose an optimization approach practical construction of Lyapunov function for a given class, based on the application of the generalized gradient procedure.

Key words: Lur'e type control system, Lyapunov function, absolute stability, optimization, generalized gradient.

УДК 517.929

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Чернівецький національний університет, Чернівці

МОМЕНТНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Робота присвячена дослідженню стійкості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертових просторах з допомогою моментних рівнянь.

Ключові слова: Гільбертовий простір, стійкість, диференціальні рівняння

Нехай H – гільбертів простір і $X(t)$ – векторний випадковий процес із H, що є розв'язком рівняння

$$dX(t) = A(t,\xi(t))X(t)dt + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t,\xi(t))X(t)dW_j(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

де $\xi(t)$ – неперервний справа марковський процес, що набуває злiченну кількість значень $\theta_1,...,\theta_q,...$; $A(t,\theta_s),B_j(t,\theta_s), s=\overline{1,q},$ – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, $W_1(t),...,W_r(t),...$ – незалежні між собою скалярні вінерові процеси, причому величини $(W_1(t),...,W_r(t),...,\xi(t),\zeta)$ також є незалежними. Позначимо $P_s(t) \equiv P\{\xi(t)=\theta_s\}$. Вважатимемо, що існують неперервні на відрізку $[0,T]$ функції $\alpha_{kj}(t)$ такі, що

$$P_{kj}(t+h,t) = \delta_{kj} + \alpha_{kj}(t)h + o(h), \tag{2}$$

де δ_{kj} – символ Кронекера, $h>0,\ \frac{o(h)}{h} \to 0, h \to 0.$

Нехай
$$F_k(t,x) = P\{X(t)<x,\xi(t)=\theta_k\},$$
$$m_k(t) = \int_{R^m} x dF_k(t,x),$$
$$D_k(t) = \int_{R^m} xx^* dF_k(t,x).$$

Означення 1. *Функції $m_k(t), D_k(t)$ називаються частковими середніми та частковими матрицями других моментів відповідно.*

Теорема 1. *Нехай $X(t)$ є розв'язком рівняння (1), $\left\langle |\zeta|^2 \right\rangle < \infty,$ а перехідні ймовірності марковського процесу $\xi(t)$ задовольняють умові (2). Тоді справедливими є рівняння*

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}m_s(t), \quad m_k(0) = \langle\zeta\rangle P_k(0), \quad k=\overline{1,q}, \tag{3}$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) + \sum_{j=1}^{\infty}B_{jk}(t)D_k(t)B_{jk}^*(t) + $$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ks}D_s(t), \quad D_k(0) = \langle\zeta\zeta^*\rangle P_k(0), \quad k=\overline{1,q}, \tag{4}$$

де $A_k(t) = A(t,\theta_k), B_{jk}(t) = B_j(t,\theta_k).$

Доведення. Розіб'ємо інтервал $(0,T)$ точками $0<t_1<t<...<t_N<T$ з кроком $t_{k+1},\ t_k = h,\ \ t_n = nh.$ Позначимо через $X(n) = X(t_n),\ \ \xi_n = \xi(t_n),\ \ A(n,\xi_n) = A(t_n,\xi(t_n)),\ \ B_j(n,\xi_n) = B_j(t_n,\xi(t_n)).$ Поставимо у відповідність рівнянню (1) різницеве рівняння

$$X(n+1) = X(n) + hA(n,\xi_n)X(n) + \sum_{j=1}^{\infty}B_j(n,\xi_n)\Delta W_j(t_n)X(n), \quad X(0)=\zeta, \tag{5}$$
$$\Delta W_j(t_n) = W_j(t_{n+1}) - W_j(t_n).$$

Для часткових моментів вектора $X(n)$ запишемо рівняння

$$m_k(n+1) = \sum_{s=1}^{\infty}P_{ks}(n)[E + hA_s(n)]m_s(n) =$$