

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРІВ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ КОРОТКИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ

Запропоновано методику визначення частотних характеристик пружних циліндрів. Збудження коливань та знімання резонансних характеристик здійснюється за допомогою заклеєних на торцях циліндра п'єзокерамічних дисків. Узгодження результатів експериментів із даними розрахунків, широко відомих в літературі, підтверджує ефективність експериментального та теоретичного підходу.

Technique for determining of frequency spectra elastic cylinders is proposed. Vibrations excitation and resonance characteristics taking is accomplished by means of glued piezoceramic disks. Concordance between experimental results and widely known in literature data of calculations confirm effectiveness of experimental and theoretical approaches.

1. Вступ

При проектуванні технічних пристроїв регулярно виникають задачі, пов'язані із застосуванням коротких циліндрів. Прикладами таких приладів є, наприклад, гравітаційні антени [4], п'єзокерамічні резонатори та випромінювачі ультразвукових хвиль [11], резонансні перетворювачі для деформування поверхні адаптивних дзеркал оптичних систем [8], п'єзоелектричні генератори (струму та напруги) [2], модулятори лазерного випромінювання та інше.

Залежно від задач, що розв'язуються, виникають ті чи інші практичні проблеми. Так, наприклад, при конструюванні гравітаційних антен виникають задачі вибору оптимальної геометрії не тільки із умов мінімального впливу дисипації енергії у вузлах її кріплення, але й забезпечення моночастотності. В якості чутливого елемента гравітаційної антени часто використовується багатотонний суцільний циліндр із спеціального алюмінієвого сплаву, в якого механічна добротність досягає тисяч одиниць. Переміщення обох торців циліндра реєструються за допомогою ємнісних датчиків, чутливість котрих може досягати реєстрації зміщення при броунівському русі молекул повітря на частоті першої поздовжньої форми коливань циліндра.

Знання власних частот циліндричних зразків може бути використано для визначення пружних сталих металевих зразків у формі скінчених циліндрів. Методики визначення модуля зсуву G та коефіцієнта Пуассона ν за відношенням декількох власних частот подаються, наприклад, в роботі [14].

У всіх вище наведених прикладах циліндричне тіло здійснює коливальні рухи і знання їх характеристик (як на поверхні так і в об'ємі) надзвичайно важливе. Необхідно відмітити, що виникнення та визначення точок (областей), де виникають максимальні нормальні та дотичні напруження можливе в більшості практичних випадках тільки за умови проведення теоретичних розрахунків. Питання про те, наскільки точними можуть бути такі розрахунки, які математичні моделі найкращим чином описують фізичний процес деформування суцільних циліндрів із різними співвідношеннями діаметра до довжини є актуальними на сьогоднішній день.

В даній роботі пропонується теоретичний розв'язок задачі про вимушені коливання ізотропного циліндра скінченої довжини та експериментальна методика визначення власних частот коливань.

2. Об'єкт дослідження, цілі та задачі

Об'єктом дослідження був обраний суцільний циліндр із співвідношенням діаметра до довжини 1:2.812. На перший погляд, хоча такий циліндр не підходить для описання одновимірною моделлю, тим не менше навіть при таких співвідношеннях перша поздовжня форма коливань (стрижнева) визначається відомою формулою [7] з точністю до декількох відсотків. Другою причиною вибору такого співвідношення є те, що краєві форми коливань на обох торцях вже чітко проявляються і не являються сильно зв'язаними між собою, так як вони є експоненціально затухаючими вздовж довжини циліндра. Їх вивчення представляє для нас неабиякий інтерес.

З такою метою досліджуваний циліндр мав розміри 35,95 мм (діаметр):101,1 мм (довжина) і був виготовлений із алюмінієвого сплаву типу Д16Т. Цей сплав був вибраний внаслідок його високої механічної добротності Q_{mex} , що складає тисячі одиниць. Досліджуваний циліндр був виготовлений із брусу діаметром 50 мм на токарному станку підвищеної точності, з похибкою не більше 0,01 мм. Неплощинність торців відносно поздовжньої осі не гірше ± 30 кутових секунд. Клас чистоти поверхні – не гірше восьмого. На даному етапі досліджень, коли не ставилася задача отримання граничних характеристик по збереженню максимально можливої добротності замість ємнісних датчиків [4, 10] для електричного збудження і прийому були використані дві тонкі п'єзокерамічні пластини складу «НБС-3» (діаметр 39.8 мм, товщина 1.0 мм, поляризовані по товщині), які були наклеєні на торці епоксидною смолою. З метою зменшення товщини епоксидного клею, пластини під час заклеювання притискувалися вантажем вагою 5 кг. По нашим підрахункам товщина епоксидного клею не перевищила 0.05 мм, а на більшій площі була меншою. Після підсушування і витримки для стабілізації властивостей протягом декількох діб циліндричний зразок був готовий для проведення дослідів (рис.1). Необхідно було зняти резонансний спектр пружних коливань, провести його аналіз і виділити основні резонанси (тони), а також порівняти з результатами теоретичних дослідів.

3. Експериментальна установка і методика досліджень



Рис.1. Досліджуваний експериментальний зразок із алюмінієвого сплаву Д16Т



Рис.2. Експериментальна установка з генератором Х1-46

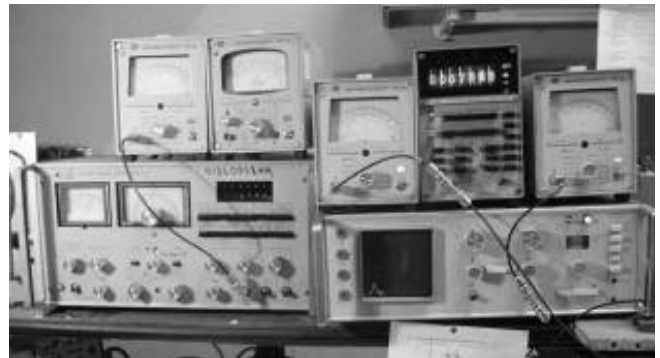


Рис.3. Експериментальна установка з генератором ГЗ – 117

Експериментальна установка (рис.2) подібна до тієї, що описана в [1]. На рис.4 зображено блок-схему експериментальної установки для зняття амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та форм коливань. Зокрема зображено: генератор змінної частоти (ГКЧ-46), індикатор (Х1-46), підсилювач потужності (У7-3), частотомір (ЧЗ-57), вольтметр (ВЗ-38), двокоординатний самопис (Н-306), $R_{ш}$ – струмовий резистор величиною 15 Ом, ПЕ1 та ПЕ2 – п'єзоелементи на торцях досліджуваного циліндра із дюралюмінію, Вк1 – тумблер для шунтування струмового резистора, Вк2 – тумблер для підключення на вимірювання або вхідної напруги (із ПЕ2) або вхідного струму (через ПЕ1). При перемиканні із вимірювання по напрузі на вимірювання по струму вимикачі Вк1 та Вк2 перемикаються синхронно. Положення на рисунку відповідає вимірюванню на АЧХ при реєстрації струму

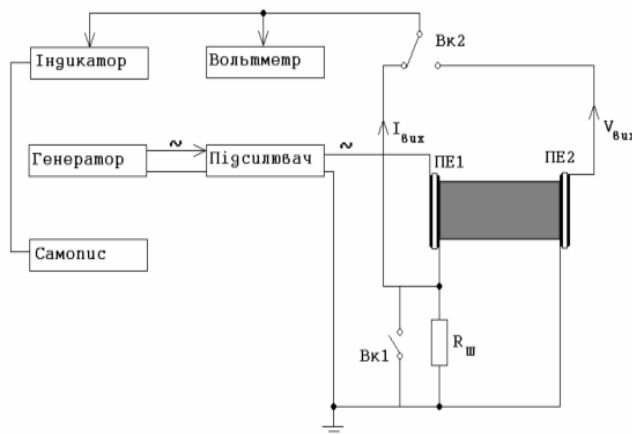


Рис.4 Блок-схема експериментальної установки

Цікаво відмітити, що добротність циліндричного резонатора з алюмінієвого сплаву така, що при подачі напруги 1 В на один із п'єзоелементів, інтенсивність збудження буде такою, що вихідна напруга на іншому п'єзоелементі буде досягати 4 В – на крайовій моді 77,34 кГц, а на першій поздовжній, для порівняння, тільки 0,4 В. Основна частина цієї напруги створюється радіальною компонентою деформації наклеєної круглій п'єзокерамічної пластини і в першому наближенні можна підрахувати рівень переміщень (в мікронах), а також еквівалентні механічні радіальні напруження, які необхідно було б прикласти до п'єзодиску для створення потенціалу рівного 4 В.

Щодо оцінки механічної добротності досліджуваного циліндру з алюмінієвого сплаву на першій поздовжній моді коливань слід зауважити, що під час проведення експериментальних досліджень було виявлено, що коректне визначення форми резонансного піку, і відповідно, визначення частот, на яких рівень сигналу зменшується в $1/\sqrt{2}$ рази відносно максимального, викликає труднощі. Це пов'язано зі стабільністю генератора (пристрій Х1-46). Більш чітко вид АЧХ і добротність були визначені за допомогою генератора ГЗ-117 (рис.3). Безсумнівно, що механічна добротність алюмінієвого сплаву і, відповідно, циліндру із нього виготовленого буде ще вище (у декілька разів), якщо торці не будуть задемпфовані п'єзокерамікою і тонким шаром епоксидної смоли. П'єзоелементи виконують роль приєднаної маси і приєднаної жорсткості. Оскільки маса пластинок значно менша, ніж маса циліндру, пониження першої поздовжньої моди буде якісно не суттєвим, тим більше це майже не впливає на форми коливань.

4. Результати експериментальних досліджень.

В результаті експериментів було отримано АЧХ суцільного алюмінієвого циліндра, збуджуваного за допомогою приклеєних на торцях тонких п'єзокерамічних дисків. Перед заклеюванням п'єзодисків було отримано також їх власні частоти, що склали 57,49 кГц, 151,49 кГц, 240,70 кГц, 328,59 кГц, 415,57 кГц (також див. [12]). По співвідношенню цих частот можна розрахувати при необхідності модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, що є важливим для врахування жорсткостей приєднаних мас та їх впливу на частоти власних коливань системи циліндр – п'єзодиски.

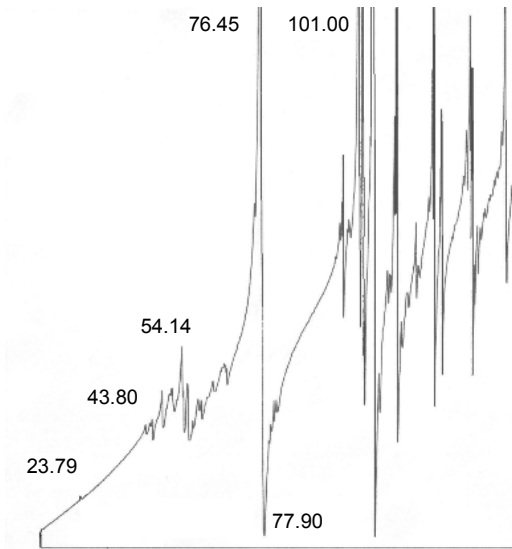


Рис.5. АЧХ суцільного циліндра із алюмінієвого сплаву (Д16Т), реєстрація струму

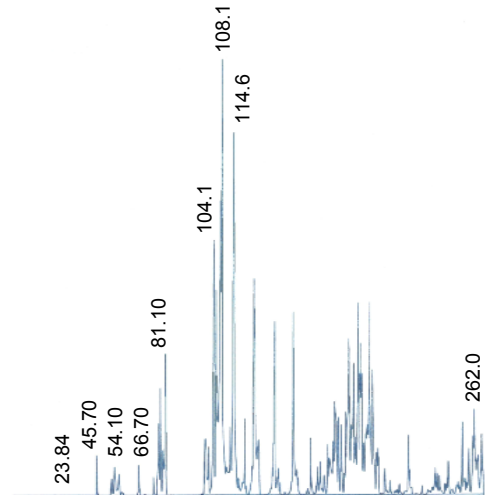


Рис.6. АЧХ, знята при збудженні одного п'єзоелемента (ПЕ1) і реєстрації сигналу з іншого п'єзоелемента (ПЕ2)

Спершу АЧХ була знята по струму через резистор $R=15$ Ом. Рис.5. видно, що частотний спектр дуже щільний (багато резонансів), а перші інтенсивні резонанси можна побачити з частоти 76 кГц. В районі 23 кГц спостерігається невеликий сплеск, а на частотах 43 – 54 кГц менш високодобротні резонанси.

Подібна АЧХ отримується при подачі живлення на один п'єзоелемент (рис.6), а сигнал з іншого п'єзоелемента при цьому використовується для реєстрації вихідної напруги.

Із рис.5 та 6 видно, що резонанс на частоті 23 кГц проявляється не чітко і не досягає свого максимуму. Більш якісно цей резонанс був зафіксований окремо, у вузькій смузі змінення частоти за той же проміжок часу, коли коливна система у вигляді циліндричного резонатора встигала виходити на встановлений режим. Амплітудно-частотна характеристика першої поздовжньої моди коливань приведена на рис.7. Зашумування сигналу пов'язане з перешкодами, що виникають від генератора розгортки. У ручному режимі налаштування на частоту таких кидків сигналу не спостерігається, що дозволяє впевнено визначити резонансну частоту з точністю ± 1 Гц та знаходити точки f_a і f_b

на рис.7, де рівень сигналу зменшується в $1/\sqrt{2}$ рази для знаходження механічної добротності. У нашому випадку резонансна частота рівна $f_{рез} = 23,792$ кГц і $Q_{мех} = \frac{f_{рез}}{\Delta f} = \frac{23792}{11} = 2163$, де $\Delta f = f_b - f_a = 23798 - 23787 = 11$ Гц.

В нашому випадку можуть збуджуватися також парні і непарні гармоніки основного тону, тобто $f_2 = f_{рез}^1 * 2 = 2 * 23792$ кГц = 47,584 кГц, а $f_3 = f_{рез}^1 * 3 = 71,376$ кГц. Нам не вдалося виявити першої крутильної та першої згинної форми коливань циліндру, котрі можуть збуджуватися внаслідок несиметрії властивостей алюмінієвого сплаву, спотворення викривленої форми циліндра, недосконалого підклеєння п'єзоелементів, що каже про якісне виготовлення зразка. Була отримана оцінка ступеня пропорційності між вхідними напругами та вихідними. При подачі на п'єзоелемент ПЕ1 напруги величиною 1 В, на виході ПЕ2 напруга дорівнювала 0,36 В (резонансна частота підтримувалася постійною), при подачі 2 В ми маємо 0,72 В і при подачі 3 В – 1,1 В, що вказує на лінійну залежність, яка забезпечує монотонність.

5. Теоретичне дослідження власних форм та частот осесиметричних коливань пружного циліндра

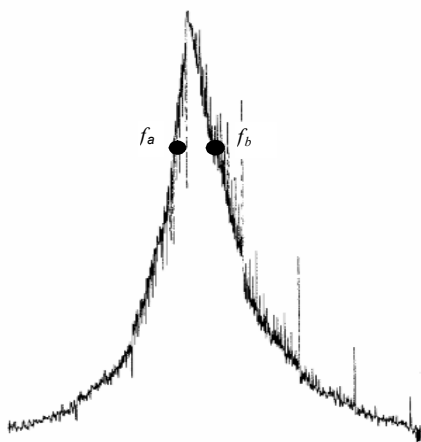


Рис.7. АЧХ першої поздовжньої моди коливань на частоті 23,79 кГц

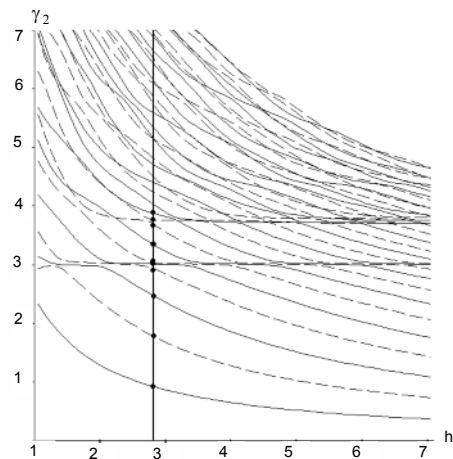


Рис.8. Частотний спектр

Спектр та власні форми коливань циліндра $0 \leq r \leq a$, $|z| \leq H$ вивчалися різними методами (чисельними та аналітичними) в багатьох публікаціях. Огляд майже необмеженої кількості робіт можна знайти в роботах [3; 5; 14]. Нижче ми наводимо лише основні формули методу суперпозиції. Детальні викладки містяться в роботах [5, 6].

Рівняння Ламе для амплітуд (множник $\exp(-i\omega t)$ опущено) вектора переміщень $\vec{u}(r, z)$ має відомий вигляд

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} + \frac{\rho}{G} \omega^2 \vec{u} = 0 \quad (1)$$

Згідно методу суперпозиції розв'язок цього векторного рівняння для граничних умов в навантаженнях (тут подано вираз лише для симетричного відносно серединної площини циліндра руху) має вигляд

$$u_r(r, z) = A_0 J_0(\gamma_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_1(q_1 r) + B_n I_1(q_2 r)] \cos(k_n z) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j \frac{\lambda_j}{p_1} \text{ch}(p_1 z) + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \text{ch}(p_2 z) \right] J_1(\lambda_j r),$$

$$u_z(r, z) = C_0 \sin(\gamma_1 z) + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j \text{sh}(p_1 z) + D_j \text{ch}(p_2 z)] J_0(\lambda_j r) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{k_n}{q_1} I_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{k_n} I_0(q_2 r) \right] \sin(k_n z), \quad (2)$$

де $q_i^2 = k_n^2 - \gamma_i^2$, $p_i^2 = \lambda_j^2 - \gamma_i^2$, $i = 1, 2$; $k_n = \frac{\pi n}{h}$, $J_1(\lambda_j) = 0$

Через J_0, J_1 позначено функції Бесселя першого роду, відповідно нульового та першого порядків, через I_0, I_1 – модифіковані функції Бесселя.

Подальше виконання граничних умов призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n, B_n ($n=1,2,\dots$) та C_j, D_j ($j=1,2,\dots$). Умова рівності нулю визначника цієї системи дає резонансні частоти для циліндра скінченної довжини.

На рис. 8 зображено результати обрахунків частотного спектру для ізотропного циліндра із коефіцієнтом Пуассона $\nu = 1/3$, що відповідає коефіцієнту Пуассона для сплаву Д16Т [13].

Вздовж осі абсцис відкладено безрозмірну довжину $h = H/a$, вздовж осі ординат – безрозмірну частоту $\gamma_2 = \omega a / c_2$.

Суцільні лінії зображують вітки, що відповідають симетричній задачі, пунктирні – антисиметричній. Вертикальна пряма показує довжину циліндра, що досліджувався в експерименті.

Основні резонанси циліндра, які отримані при збудженні тонкою суцільною п'єзопластиною, приклеєною на його торці, наведено в Табл. 1. Там же подано результати теоретичних розрахунків. За рахунок приєднаних мас на торцях (п'єзодисків) частоти циліндра понижуються в порівнянні із розрахунковими.

Достатня точність співпадання теоретичних та експериментальних дозволяє більш точно визначати розрахунковим шляхом коефіцієнт Пуассона ізотропних суцільних циліндрів по експериментальному спектру резонансних частот.

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{\text{exp}}, \text{кГц}$	23,84	45,73	66,80	77,34	78,48	81,10	91,3	99,6
$f_{\text{theor}}, \text{кГц}$	24,85	48,11	67,15	80,02	82,8	83,34	91,07	100,57

Таблиця 1 Резонансні частоти коливань суцільного алюмінієвого циліндра із п'єзоелементами на торцях

6. Висновки

Запропоновані методики експериментального та теоретичного дослідження спектра власних частот пружного циліндра скінченної довжини дають результати, що надійно узгоджуються між собою для перших восьми-десяти мод коливань, та дозволяють більш точно визначати модулі пружності матеріалу, з якого виготовлено циліндр.

1. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Мелешко В.В., Никитенко В.Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом // Акуст. вісник. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 3–11. 2. Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применения. – М., 1981. 3. Бергман Л. Ультразвук. – М., 1957. 4. Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Панов В.И. Системы с малой диссипацией. – М., 1981. 5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К., 1981. 6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. журн. – 1978. – Т. 24, Вып. 6. – С. 60-68. 7. Колюский Г. Волны напряжения в твердых телах. – М., 1955. 8. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А., Рудницкий Б.Е. Оптические адаптивные системы. – М., 1989. 9. Никаноров С.П., Кардашев Б.К. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. – М., 1985. 10. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М., 1972. 11. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кичуци. – М., 1972. 12. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т.1, ч.А. : Методы и приборы ультразвуковых исследований – М., 1959. 13. Физические величины : Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М., 1991. 14. Nieves F.J., Gascon F., Bayon A. Measurement of the dynamic elastic constants of short isotropic cylinders // J. Sound Vibr. – 2003. – Vol. 265. – P. 917-933.

Надійшло до редколегії 29.11.2007