

ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОПЕРЕНОСУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Запропоновано узагальнений підхід до постановки задачі електропереносу з розривним розв'язком. Показано ефективність та зручність для чисельного розв'язання такого узагальнення.

V. Nakvasyuk . Charge transfer problems with discontinuous solutions. General problems statement of charge transfer with discontinuous solutions proposed. Effectiveness and convenience for numerical solution is demonstrated.

1. Вступ.

Розриви розподілених характеристик полів (температури, концентрації, електричного потенціалу, тиску й ін.) у математичних описах різноманітних фізичних процесів можуть бути обумовлені різними причинами. Найпоширеніший варіант розривного розв'язку виникає при побудові математичних моделей процесів переносу в шарувато-неоднорідних середовищах, що мають на межі контакту середовищ тонкий (у порівнянні з характерними геометричними розмірами середовищ) слабо проникний прошарок. При чисельному розв'язанні такого роду контактних задач врахування в області розв'язку тонких прошарків вимагає невиправданого подрібнення сітки, тому зазвичай в таких випадках будується спрощена модель прошарку, використання якої дозволяє виключити цей прошарок з області розв'язку диференціальної задачі. Наявність у класичній постановці задач тепло-, масо- і електропереносу умов спряження розв'язку на межі контакту шарувато-неоднорідних середовищ вимагає при чисельному розв'язанні апроксимації нормальних компонент векторів питомих потоків субстанції, що викликає певні труднощі при побудові й реалізації обчислювальних алгоритмів. З цього погляду доцільно переформулювати класичні постановки відповідних задач так, щоб однаковим чином описати процеси переносу у всій багатозаровій системі в цілому, виключивши при цьому умови спряження як атрибут математичної постановки задачі. Дана робота присвячена побудові узагальненої моделі для задачі електропереносу з розривним розв'язком.

2. Моделі розривного розв'язку.

Для побудови моделей прошарку, як правило, використовується гіпотеза про квазіодноримірний характер протікання процесу переносу субстанції через прошарок. Характерним прикладом моделі прошарку є задача розрахунку скалярного потенціалу φ електромагнітного поля в системі «анод - дугова плазма». На межі між металевим анодом і плазмою електричної дуги існує тонкий прианодний прошарок, у якому, відповідно до узагальненого закону Ома, електричний струм може бути направлений проти вектора напруженості електричного поля [4].

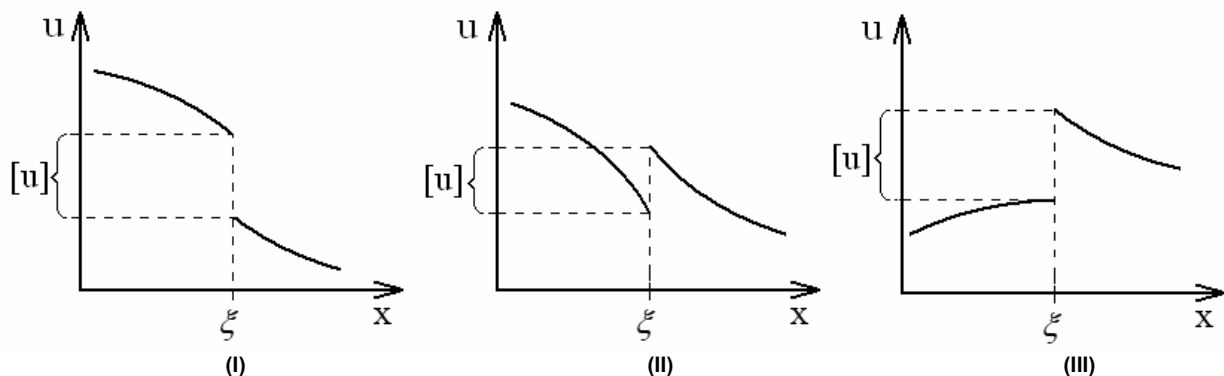


Рис. 1. Схеми розриву розв'язку в точці $x = \xi$ (I - прямий стрибок; II - зворотний стрибок; III - комбінований стрибок).

В [1] запропоновано спрощену модель прианодного прошарку, відповідно до якої стрибок $[\varphi]_{\Gamma}$ (тут і далі стрибок функції $f(\bar{x})$ на межі Γ позначається через $[f]_{\Gamma}$) потенціалу електричного поля в цьому прошарку нелінійно залежить від величини нормальної до межі анода компоненти $j_n|_{\Gamma}$ вектора щільності електричного струму $\vec{j} = -\sigma \text{grad} \varphi$, де σ - питома електрична провідність, тобто

$$[\varphi]_{\Gamma} = G(j_n|_{\Gamma}). \quad (1)$$

При цьому припускається, що $j_n|_{\Gamma}$ є неперервним на межі Γ контакту анода із плазмою. Модель анодного шару (1) робить задачу розрахунку потенціалу φ нелінійною, і приводить до так званого зворотного стрибка, одномірний варіант якого схематично зображено на Рис. 1 (II). Між знаками $[\varphi]_{\Gamma}$ й $(\text{grad} \varphi)_n|_{\Gamma}$ у цьому випадку виконується наступне співвідношення: $\text{sign}[\varphi]_{\Gamma} = -\text{sign}(\text{grad} \varphi)_n|_{\Gamma}$, що й виправдовує назву «зворотний стрибок».

Варто також зазначити, що у випадку задач для рівнянь з частинними похідними з розривними розв'язками можливі також і інші види стрибка: прямий стрибок (Рис. 1 (I)), такий стрибок виникає, наприклад, у задачі про неідеальний контакт двох теплопровідних тіл; ще один приклад стрибка розв'язку, назовемо його комбінованим (Рис. 1 (III)), дає, наприклад, задача розподільної дифузії, що виникає при описі сегрегації розчинних включень у процесі кристалізації сплавів.

3. Узагальнені постановки задач з розривними розв'язками.

Нехай R_n - n -вимірний евклідів простір, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - декартові координати, $\Omega \subset R_n$ - область розв'язку задачі, яку не обмежуючи загальності можемо вважати двошаровою: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, через Γ позначимо межу розділу підобластей Ω_1, Ω_2 . Всім ідентифікаторам змінних, що стосуються підобластей Ω_1, Ω_2 , присвоїмо індекси 1 і 2 відповідно. Позначимо через $u(\bar{x})$ шуканий розв'язок задачі, а через $\vec{q}(\bar{x})$ - питомий потік субстанції. Будемо вважати функцію $u(\bar{x})$ досить гладкою всюди в Ω , за винятком можливо межі Γ , на якій вона має стрибок $[u(\bar{x})]_\Gamma$, при цьому припускається, що $[u(\bar{x})]_\Gamma$ як функція координат межі Γ є неперервною. У кожній з підобластей Ω_1, Ω_2 визначимо питомий потік у такий спосіб $\vec{q}_m = -k_m \text{grad } u_m$, $m = 1, 2$, вважаючи при цьому, що оператор grad визначений у класичному розумінні як функція точки $\bar{x} \in \Omega_1, \Omega_2$. Коефіцієнти $k_m(\bar{x})$, $m = 1, 2$, також вважаємо досить гладкими й такими, що $k_m(\bar{x}) \geq C > 0$. Нехай у кожній з підобластей Ω_m функції $u_m(\bar{x})$ (потенціал електричного поля) задовольняють рівнянням

$$\text{div}(k_m \text{grad } u_m) = f_m(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_m, \quad m = 1, 2. \quad (2)$$

На межі Γ покладемо неперервність нормальної до Γ компоненти вектора питомого потоку, тобто

$$q_{1n} \Big|_{\Gamma_+} = q_{2n} \Big|_{\Gamma_-}. \quad (3)$$

У лінійній постановці задачі для розрахунку потенціалу електричного поля на відміну від (1) будемо вважати, що на межі Γ задана різниця потенціалів $[u]_\Gamma$ як функція координат межі Γ

$$[u]_\Gamma = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma. \quad (4)$$

На зовнішній границі $\partial\Omega$ області Ω будемо вимагати виконання деяких граничних умов, конкретний вид яких для подальшого викладу не має значення; при цьому передбачається, що розв'язок задачі в класичній постановці існує і єдиний.

Введемо у Ω функції $u(\bar{x})$, $\vec{q}(\bar{x})$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $k(\bar{x})$, які існують у Ω як функції точки всюди, за винятком межі Γ , у та-

кий спосіб: $\psi(\bar{x}) = \psi_m(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega_m$, де $\psi(\bar{x})$ - одна з перерахованих вище функцій. Узагальнені частинні похідні $\frac{D}{Dx_i}$

функції $u(\bar{x})$ в області Ω визначаються в такий спосіб [5]:

$$\frac{Du}{Dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + [u]_\Gamma^{(i)} \gamma_i \delta(\Gamma), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (5)$$

де $[u]_\Gamma^{(i)}$ - стрибок розв'язку функції $u(\bar{x})$ у напрямку осі Ox_i (надалі будемо вважати $[u]_\Gamma^{(i)} = [u]_\Gamma$, $i = \overline{1, n}$), $\gamma_i = \cos(\vec{n}, \vec{x}_i)$ - напрямні косинуси нормалі до Γ , $\delta(\Gamma)$ - δ функція Дірака, зосереджена на гіперповерхні Γ $(n-1)$ -го виміру. Користуючись (5), уведемо в Ω узагальнений градієнт $GRAD_-$ розривної функції $u(\bar{x})$

$$GRAD_- u = \text{grad } u + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma). \quad (6)$$

Так як $-k \text{grad } u = \vec{q}(\bar{x})$, то з (6) випливає

$$GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma), \quad (7)$$

де $\rho(\bar{x}) = k^{-1}(\bar{x})$ має сенс питомого опору середовища.

Отже, узагальнені рівняння в лінійній постановці, що описують розподіл потенціалу електричного поля у двошаровому середовищі «анод - дугова плазма», можна записати у вигляді

$$\begin{cases} -\text{DIV } \vec{q} = f, \\ GRAD_- u = -\rho \vec{q} + \vec{n}[u]_\Gamma \delta(\Gamma), \end{cases} \quad (8)$$


використовуючи при цьому як узагальнений закон Ома вираз (7). Під узагальненим розв'язком системи рівнянь (8) будемо розуміти вектор щільності струму $\vec{q}(\bar{x})$ та скалярний потенціал електромагнітного поля $u(\bar{x})$, які задовольняють в сенсі теорії узагальнених функцій рівнянням (8) і граничним умовам, заданим на $\partial\Omega$. Вважається, що $[u]_\Gamma$, як функція координат межі Γ , є неперервною на Γ . При розв'язуванні реальних задач електропереносу в системі «анод - дугова плазма» потрібно враховувати нелінійну залежність (1) стрибка потенціалу від щільності струму. Ітераційний процес по нелінійності передбачає на кожній ітерації розв'язання лінійних рівнянь виду (8).

4. Однорідні різницеві схеми на узагальнених розв'язках.

У цьому розділі ми обмежимося побудовою різницевої схеми для досить простої одновимірної тестової задачі, однак основні підходи до розробки методів чисельного розв'язку переносяться також і на випадок більш складних багатовимірних задач. Для оцінки фактичної точності такої схеми розглянемо характерну тестову задачу, що має точний розв'язок.

Розглянемо одновимірний варіант узагальненої постановки (8) задачі про розподіл потенціалу u електричного поля в системі «анод - дугова плазма»

$$-\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{D_- u}{Dx} = -\rho q + [u]_\xi \delta(x - \xi), \quad 0 < x < l; \quad u(0) = 0, \quad u(l) = u_0, \quad (9)$$

де  - узагальнена похідна, q - щільність струму, u - потенціал електричного поля, $\rho = \rho(x)$ - питомий електричний опір середовища, $\xi \in (0, l)$ - положення межі розділу метал - плазма, $[u]_\xi$ - стрибок потенціалу на цій межі (анодний бар'єр). У випадку $\rho(x) = \rho_1 = \text{const}$, $0 < x < \xi$, $\rho(x) = \rho_2 = \text{const}$, $\xi < x < l$ задача (9) має простий аналітичний розв'язок:

$$u(x) = \begin{cases} -q\rho_1 x, & 0 < x < \xi, \\ -q(\rho_1 \xi + \rho_2(x - \xi)) + [u]_\xi, & \xi < x < l, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{де } q = \frac{[u]_\xi - u_0}{\rho_1 \xi + \rho_2(l - \xi)}.$$

На відрізку $[0, 1]$ введемо сітку $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = 1\}$. Інтегруючи перше з рівнянь (9) на відрізку $[x_i - 0.5h, x_i + 0.5h]$, отримаємо сітковий аналог закону збереження у вигляді

$$-\frac{q(x_i + 0.5h) - q(x_i - 0.5h)}{h} = 0. \quad (11)$$

З другого рівняння випливають наближені рівності

$$q(x_i + 0.5h) \approx -a_{i+\frac{1}{2}} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + a_{i+\frac{1}{2}} \frac{[u]_\xi}{h} \beta_i, \quad (12)$$

$$\text{де } a_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x) dx \right]^{-1}, \quad \beta_i = 1 \text{ якщо } \xi \in (x_i, x_{i+1}), \quad \beta_i = 0 \text{ якщо } \xi \notin (x_i, x_{i+1}).$$

З (11), (12) і граничних умов отримаємо різницеву схему

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = 0, y_N = 0. \quad (13)$$

Нехай $x_m < \xi < x_{m+1}$, тоді права частина сіткового рівняння (13) обчислюється в такий спосіб: $\varphi_i = 0$ якщо $i \neq m, m+1$, $\varphi_m = \phi_m$, $\varphi_{m+1} = -\phi_m$, де $\phi_m = a_{m+\frac{1}{2}} \frac{[u]_\xi}{h^2}$.

На Рис. 2 порівнюється аналітичний й чисельний розв'язок одновимірної задачі (9) при заданій величині стрибка електричного потенціалу на межі метал - плазма $[u]_\xi = 2 \text{ V}$ та наступних значеннях параметрів задачі:

$$\rho_1 = 0,0025 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}, \quad \rho_2 = 0,0333 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}, \quad u_0 = -5 \text{ V}, \quad l = 1 \text{ cm}, \quad \xi = 0.5 \text{ cm}.$$

Нехай $u_i^{(h)} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx$ - проекція

розв'язку диференціальної задачі на сітку, $z_i = y_i - u_i^{(h)}$ - похибка чисельного розв'язку. Можна показати, що в вищезначеному вище класі коефіцієнтів має місце нерівність $\|z\|_C \leq Mh$, де $M = \text{const}$. Отже, різницєва схема (13) рівномірно сходиться на узагальненому розв'язку задачі (9) і має перший порядок точності. Для доведення цієї нерівності похибка апроксимації оцінюється в слабкій суматорній метриці [3], залучення якої пов'язане з тим, що локальна похибка апроксимації в околі розриву розв'язку становить $O\left(\frac{1}{h}\right)$. Наведена вище оцінка точності різницєвої схеми утворюється з урахуванням того, що кількість точок сітки з аномальною похибкою апроксимації залишається кінцевою при $h \rightarrow 0$. У випадку $f(x) \equiv 0$ різницєва схема (13) у класі кусково-сталих коефіцієнтів є точною. У загальному випадку $\rho(x) \in W_2^{-1}(0,1)$, $f(x) \in L_2(0,1)$, $u(x) \in L_2(0,1)$, $q(x) \in W_2^1(0,1)$ вдається довести лише збіжність різницєвої схеми (без встановлення порядку точності).

На Рис. 2 також представлено чисельний розв'язок задачі (9) з урахуванням нелінійної залежності (1) стрибка потенціалу від щільності електричного струму q , функціональний вид якої наведений в [1], а використовувані чисельні значення показані на Рис. 4.

Розв'язок нелінійної сіткової задачі було отримано методом ітерацій, при цьому на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувалась лінійна задача (13).

При чисельному моделюванні фізичних процесів, що протікають, наприклад, в умовах дугового зварювання металів, задача про розподіл потенціалу в системі «анод - дугова плазма» стає багатомірною і вимагає врахування складної геометрії межі розділу провідних середовищ. Зокрема, моделювання процесу електропереносу в системі «електродний дріт - плазма електричної дуги» при зварюванні електродом, що плавиться, може бути проведене на основі рівнянь (8), які у випадку осьової симетрії задачі можуть бути записані в циліндричній системі координат, показаної на Рис. 3 (при записі першого рівняння (8) ураховується, що $f \equiv 0$). На цьому ж рисунку відображені використовувані граничні умови.

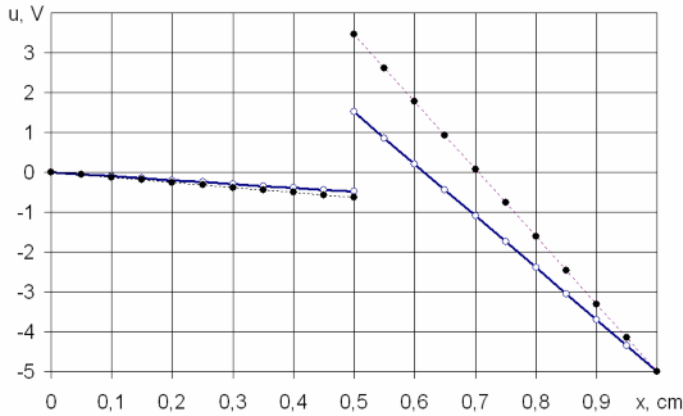


Рис. 2. Розподіл потенціалу в системі «анод - дугова плазма» (суцільна лінія - точний розв'язок лінійної задачі, \circ - чисельний розв'язок лінійної задачі; \bullet - чисельний розв'язок нелінійної задачі).

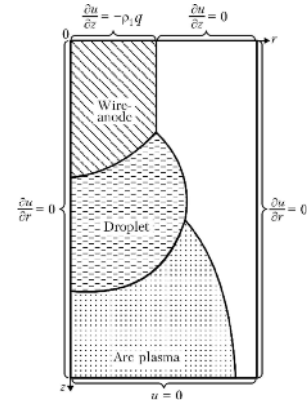


Рис. 3. Схематичне зображення системи «електродний дріт - крапля - плазма електричної дуги».

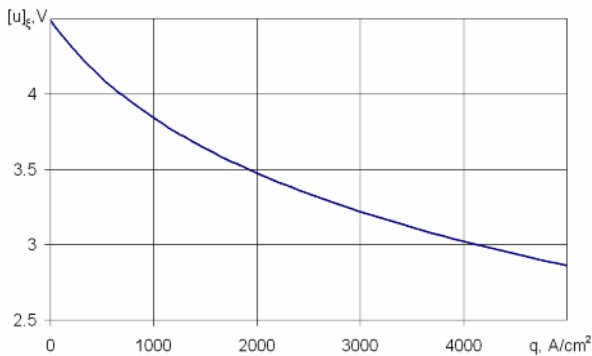


Рис. 4. Залежність анодного падіння потенціалу від щільності електричного струму.

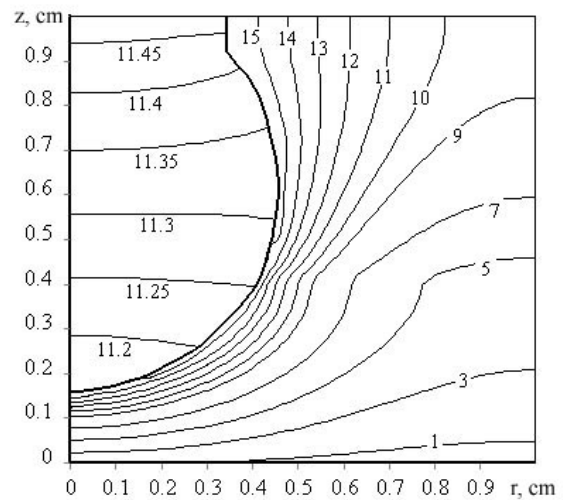


Рис. 5. Поле потенціалу в системі «електродний дріт - крапля - плазма електричної дуги» при зварюванні електроодом, що плавиться.

Результати чисельного розв'язання двовимірної задачі про розподіл потенціалу в розглянутій системі з урахуванням нелінійної залежності анодного падіння від щільності струму на аноді (див. Рис. 4) проілюстровані на Рис. 5 у вигляді ізоліній потенціалу електричного поля.

5. Висновки та завдання подальших досліджень.

Запропонована в даній статті узагальнена задача електропереносу в шарувато-неоднорідному середовищі з розривним розв'язком базується на природному з фізичної точки зору описі процесів переносу субстанції за допомогою системи рівнянь першого порядку, одне з яких (скалярне) являє собою закон збереження субстанції, а друге (векторне) - узагальнений феноменологічний закон Ома. Феноменологічний закон, записаний для розривного потенціалу в термінах питомих опорів, враховує на межі розділу середовищ наявність зосереджених факторів (наприклад, зосередженого опору). Саме такий опис дозволяє істотно розширити клас допустимих вхідних даних задач електропереносу, і, відповідно, клас допустимих рішень.

Відмінною рисою запропонованої узагальненої постановки є наскрізний (однорідний) опис процесів переносу у всій багатошаровій системі в цілому, без використання в явному вигляді умов сполучення на межі розриву розв'язку. Завдяки цьому вдається будувати однорідні обчислювальні алгоритми чисельного розв'язку (методом кінцевих різниць або методом кінцевих елементів). Точність різницевої схем наскрізного рахунку, побудованих на цій основі перевірено на характерній тестовій задачі, що має точний розв'язок.

1. Кривцун И. В. Модель испарения металла при дуговой, лазерной и лазерно-дуговой сварке // Автоматическая сварка. – 2001. – № 3. – С. 2-9.
2. Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М., 1977.
4. Dinulescu, H. A. & Pfender, E. Analysis of the anode boundary layer of high intensity arcs. // Appl. Phys. – 1980. – № 51. – P. 3149-3157.
5. Schwartz, L. Théorie des distributions. – Paris, 1950. – Т.