УДК 517.98

Ю. Єльченко, студ., А.Чайковський канд. фіз.-мат. наук
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІ ЗСУВОМ АРГУМЕНТУ В ПРОСТОРІ l_2 У ВИПАДКУ ВИРОДЖЕНОГО ОПЕРАТОРНОГО КОЕФІЦІЄНТА

Наведено достатні умови розв'язності однорідного диференціального рівняння зі зсувом аргументу у просторі l_2 у випадку необмеженого оператора блочного вигляду з довільним розташуванням спектра.

The sufficient conditions for solvability of homogeneous differential equation with argument's displacement in the l_2 space in the case of unbounded operator coefficient with block structure with any specter are given.

1. Вступ.

В цій роботі розглядається лінійне однорідне диференціальне рівняння з одним запізненням аргументу на осі

$$x'(t) = Ax(t-1),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

відносно неперервно диференційовної функції зі значеннями в просторі l_2, яка зростає повільніше довільної експоненти.

У випадку, коли $A \in L(B)$ і $\sigma(A) \cap \{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\} = \varnothing$ відомо, що це рівняння має лише тривіальний розв'язок. Якщо ця умова не виконується, задача відшукання розв'язку суттєво ускладнюється. В роботі Чайковського А.В. [1] такі розв'язки знайдені за умов певного розташування спектра.

В той же час при застосуванні цієї теорії до розв'язання нескінченних систем диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2,3]), виникають необмежені матричні оператори, спектр яких не задовольняє знайдені умови. Мета цієї роботи – знаходження розв'язків рівняння (1) для деяких класів необмежених матричних операторів у просторі l_2.

2. Постановка задачі. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір. Розглянемо диференціальне рівняння (1), де $A : B \to B$ – лінійний оператор, $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ – шукана функція.

Для нього відомо [1], що якщо $A \in L(B)$, то спектр оператора A складається з трьох замкнених частин $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, де σ_1 не перетинається з подвійною спіраллю $\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$, σ_2 лежить на цій спіралі, але не містить її точок самоперетину: $(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, σ_3 складається лише з точок самоперетину, то розв'язок, що зростає повільніше довільної експоненти, тобто $x \in C_E(\mathbf{R}, B) := \left\{ x \in C^1(\mathbf{R}, B) \mid \forall r > 0 : \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} e^{-r|t|} \|x(t)\| < \infty \right\}$, має вигляд:

$$x(t) = e^{C_2 t} x_2 + e^{C_{31} t} x_{31} + e^{C_{32} t} x_{32}. \tag{2}$$

Якщо P_1, P_2, P_3 – проектори, що відповідають часинам спектра $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, $B_k = P_k B, k = 1, 2, 3,$ – підпростори простору B, причому B є їх прямою сумою, $A_2 = AP_2$, $A_3 = AP_3$ – оператори, що фактично діють у просторах B_2, B_3, то оператор $C_2 = f^{-1}(A_2)$, де $f(z) = ze^z$, f^{-1} – обернене відображення, що переводить окіл частин уявної осі в околи частин спіралі. Якщо ці частини спіралі є точками самоперетину, то в їх околі можна описати два різних "обернених" відображення: f_1^{-1} і f_2^{-1} (див. [1]). Тоді $C_{31} = f_1^{-1}(A_3)$, $C_{32} = f_2^{-1}(A_3)$, $x_2, x_{31}, x_{32} \in B$ – довільні сталі вектори.

Спробуємо отримати розв'язок рівняння (1), якщо спектр не обов'язково розпадається на вищезгадані частини для випадку простору $B = l_2$ за умови, що оператор A є нескінченною матрицею, що має блочну структуру. В цьому разі рівняння розпадається на нескінченну кількість рівнянь, які відповідають різним блокам. Кожне таке рівняння розглядається в скінченновимірному евклідовому просторі. Оператор A при цьому може бути необмеженим.

3. Дослідження прямої суми блоків 2х2

Розглянемо рівняння вигляду (1) в двовимірному просторі. Спектр оператора $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ складається з двох власних чисел λ_1, λ_2 (можливо, рівних). Нехай A зводиться до діагональної нормальної жорданової форми: $A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}T^{-1}$,де $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді легко знайти матрицю переходу $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d & b \\ c & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$. Розв'яжемо рівняння $A\bar{t} = \lambda_1 \bar{t}$ (тобто знайдемо власний підпростір, що відповідає числу λ_1). Отримаємо, що $T^{-1}\bar{t}$ – власний вектор матриці $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу λ_1, тобто $T^{-1}\bar{t} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbf{C} \ \Rightarrow\ \bar{t} = kT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbf{C}$. Отже, шуканим власним підпростором для λ_1 є $B_1 = \left\{ \bar{t} = kT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C} \right\}$.

Аналогічно знаходимо власний підпростір для λ_2: $B_2 = \left\{ \bar{t} = kT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{C} \right\}$.

Якщо тепер $A = T\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T^{-1}$, то $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ (E – одинична матриця), отже кожен вектор простору $\mathbf{C}^2$ є власним.

Якщо ж A зводиться до вигляду $A = T\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T^{-1}$, то можна знайти матрицю переходу $T_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Але в цьому випадку простір не розбивається на два інваріантні підпростори.

Позначимо такі множини:

$C_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z \neq ite^{it},\ t \in \mathbf{R} \right\}$ **–** точки поза спіраллю;

$C_2 = \left\{ z = ite^{it} \mid t \in \mathbf{R},\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$ **–** точки на спіралі, крім точок самоперетину;

$C_3 = \left\{ z = ite^{it} \mid t = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$ - точки самоперетину спіралі.

Тепер, використовуючи формулу (2), ми можемо записати розв'язки рівняння (1) в залежності від вигляду матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ і від розташування точок спектру (тобто власних чисел λ_1, λ_2 матриці A).

1. Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in C_1$, то розв'язок $x(t) \equiv 0$.
2. Якщо $\sigma(A) = \{\lambda\}$ (тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – одне власне число кратності 2) і $\lambda \in C_2$:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, тоді $x(t) = e^{Kt}c_1$, де $K = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$– знаходиться після підстановки розв'язку в рівняння, $c_1 \in \mathbf{C}^2$, $\sigma e^{\sigma} = \lambda,\ \sigma \in i\mathbf{R}$, тобто $\sigma = f^{-1}(\lambda),\ f(z) = ze^z$. Таким чином, $x(t) = e^{\sigma t}c_1,\ c_1 \in \mathbf{C}^2$.

б) $A = T_2\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T_2^{-1}$, $\lambda = \frac{a+d}{2},\ \sigma e^{\sigma} = \lambda$.

Після підстановки розв'язку $x(t) = e^{Kt}c_1$ отримаємо $A = Ke^K$. Легко перевірити, що K не може мати діагональну нормальну жорданову форму. Тому $K = S\begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}S^{-1}$, де S – деяка невироджена матриця, що зводить K до жорданової нормальної форми. Маємо:

$$Ke^K = S\begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & (\sigma+1)e^{\sigma} \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix}S^{-1} = T_2\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T_2^{-1},$$

Оскільки $\begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & (\sigma+1)e^{\sigma} \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & 1 \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix}M^{-1}$, де $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}} \end{pmatrix}$, то $SM\begin{pmatrix} \sigma e^{\sigma} & 1 \\ 0 & \sigma e^{\sigma} \end{pmatrix}M^{-1}S^{-1} = T_2\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T_2^{-1}$, можна взяти $SM = T_2$, тобто $S = T_2M^{-1}$.

Тож $K = T_2M^{-1}\begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}MT_2^{-1}$. Остаточно розв'язок запишеться у вигляді: $x(t) = T_2M^{-1}\begin{pmatrix} e^{\sigma t} & te^{\sigma t} \\ 0 & e^{\sigma t} \end{pmatrix}MT_2^{-1}c = e^{\sigma t}D(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbf{C},$

де позначено $D(t):=\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2}t\frac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}}+1 & -\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 t\frac{1}{c(\sigma+1)e^{\sigma}} \\ \frac{ct}{(\sigma+1)e^{\sigma}} & \frac{t(d-a)}{2}\frac{1}{(\sigma+1)e^{\sigma}}+1 \end{pmatrix}$.

3. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\lambda_2 \in C_2$, тоді $A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}T^{-1}$ і розв'язок

$$x(t) = e^{K_1 t}c_1 + e^{K_2 t}c_2 = \left|c_1 \in B_1, c_2 \in B_2\right| = T\begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}k_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix}T^{-1}k_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= k_1 T\begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix} = k_1 e^{\sigma_1 t}T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\sigma_2 t}T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k.k_2 \in \mathbf{C}.$$

4. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in C_3$, то $x(t) = e^{K_1 t}c_1 + e^{K_2 t}c_2$. Можливі випадки зведення A:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, в цьому випадку «обернені» відображення переводить точку λ самоперетину спіралі у дві точки уявної осі $\sigma_1 = f_1^{-1}(\lambda),\ \sigma_2 = f_2^{-1}(\lambda)$.

Підстановкою загального розвязку в (1) можна знайти загальний вигляд операторів K_1, K_2.

$$K_1 e^{K_1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 e^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 e^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ K_2 e^{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 e^{\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 e^{\sigma_1} \end{pmatrix}.$$

$$x(t) = e^{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t}\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t}\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}t}\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}t}\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t} \\ me^{\sigma_1 t} + ne^{\sigma_2 t} \end{pmatrix},\ k,l,m,n \in \mathbf{C}.$$

б) Якщо $A = T_2\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T_2^{-1}$, $x(t) = e^{K_1 t}c_1 + e^{K_2 t}c_2$. K_1, K_2 не можуть мати діагональної нормальної жорданової форми, тому $K_1 = S\begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}S^{-1}, K_2 = V\begin{pmatrix} \sigma_2 & 1 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}V^{-1}$, $\lambda = \sigma_1 e^{\sigma_1} = \sigma_2 e^{\sigma_2}$.

Після підстановки маємо $K_1 e^{K_1} = A$, і $K_1 = T_2 M_1^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}M_1 T_2^{-1},\ K_2 = T_2 M_2^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_2 & 1 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}M_2 T_2^{-1}$, де матриця M вводилася в пункті 2) для σ, а M_1, M_2 –аналогічні матриці для σ_1, σ_2. Розв'язок :

$$x(t) = T_2 M_1^{-1}\begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} & te^{\sigma_1 t} \\ 0 & e^{\sigma_1 t} \end{pmatrix}M_1 T_2^{-1}c_1 + T_2 M_2^{-1}\begin{pmatrix} e^{\sigma_2 t} & te^{\sigma_2 t} \\ 0 & e^{\sigma_2 t} \end{pmatrix}M_2 T_2^{-1}c_2 = e^{\sigma_1 t}D_1(t)c_1 + e^{\sigma_2 t}D_2(t)c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbf{C}^2.$$

5. Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \in C_2,\ \lambda_2 \in C_3$ і $A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}T^{-1}$. Тоді $x(t) = ke^{\sigma t}T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(le^{\sigma_1 t} + me^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k,l,m \in \mathbf{C}$.

6. Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in C_3$. Тоді, якщо σ_1, σ_2 відповідають числу λ_1, σ_3, σ_4 – числу λ_2, то розв'язком буде :

$$x(t) = \left(ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(me^{\sigma_3 t} + ne^{\sigma_4 t}\right)T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k,l,m,n \in \mathbf{C}.$$

7. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \in C_1,\ \lambda_2 \in C_2$, то $x(t) = ke^{\sigma t}T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbf{C}$.

8. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \in C_1,\ \lambda_2 \in C_3$, то $x(t) = \left(ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}\right)T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k,l \in \mathbf{C}$.

Пункти 1)-8) – повністю вичерпують усі можливі випадки вигляду розв'язку диференціального рівняння (1) у двовимірному евклідовому просторі в залежності від матриці A.

Нижче будемо оцінювати одержані розв'язки, щоб отримати умови, при яких рівняння (1) уже в просторі l_2 має розв'язок. Для цього потрібні допоміжні леми.

Лема 1. Нехай матриця A в комплексному евклідовому просторі $\mathbf{C}^2$ має вигляд $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,b,c,d \in \mathbf{C}$. Тоді норма

$$\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + \sqrt{(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^2 + 8\,\mathrm{Re}(ad\overline{cb}) - 4|ad|^2 - 4|cb|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

.

Доведення. Потрібно скористатись формулою $\|A\| = \sqrt{\|AA^*\|} = \sqrt{r\left(AA^*\right)}$, де $r\left(AA^*\right)$ – спектральний радіус відповідного оператора, який можна підрахувати, знайшовши власні числа матриці.

Лема 2. Нехай $\sigma_1, \sigma_2 \in i\mathbf{R}$ (тобто лежать на уявній осі), $a, b \in \mathbf{C}$. Тоді

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|ae^{\sigma_1 t} + be^{\sigma_2 t}\right| = |a| + |b|. \tag{4}$$

Доведення можна отримати, дослідивши функцію $\left|ae^{\sigma_1 t} + be^{\sigma_2 t}\right|$ на екстремум по t методами диференціального числення.

Використовуючи формулу (3), можна отримати норми матриць $D(t), D_1(t), D_2(t)$.

Тепер оцінимо зверху норми розв'язків, одержаних в пунктах 1)–8).

1) $\|x(t)\| = 0 =: \psi_1(t) \equiv \psi_1$;

2) а) $\|x(t)\| \le \sup_{t\in\mathbf{R}}\left|e^{\sigma t}\right| \cdot \|c_1\| = \|c_1\| = \psi_2(t) \equiv \psi_2$;

2) б) $\forall t \in \mathbf{R}$: $\|x(t)\| = \left\|e^{\sigma t} D(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right\| \le \sup_{t\in\mathbf{R}}\left|e^{\sigma t}\right| \cdot \|D(t)\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right\| =: \psi_3(t)$;

3) $\|x(t)\| = \left\|k_1 e^{\sigma_1 t} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\sigma_2 t} T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} k_1 e^{\sigma_1 t}(\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b \\ k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t}(\lambda_2 - a) \end{pmatrix}\right\| =$

$= \sqrt{\left\|k_1 e^{\sigma_1 t}(\lambda_1 - d) + k_2 e^{\sigma_2 t} b\right\|^2 + \left\|k_1 e^{\sigma_1 t} c + k_2 e^{\sigma_2 t}(\lambda_2 - a)\right\|^2} \le$

$\le \sqrt{(|k_1(\lambda_1 - d)| + |k_2 b|)^2 + (|k_1 c| + |k_2(\lambda_2 - a)|)^2} =: \psi_4(t) \equiv \psi_4$;

4) а) Аналогічно знаходимо :

$\|x(t)\| = \left\|\begin{pmatrix} ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t} \\ me^{\sigma_1 t} + ne^{\sigma_2 t} \end{pmatrix}\right\| \le \sqrt{(|k| + |l|)^2 + (|m| + |n|)^2} =: \psi_5(t) \equiv \psi_5$;

4) б) $\forall t \in \mathbf{R}$: $\|x(t)\| = \left\|e^{\sigma_1 t} D_1 c_1 + e^{\sigma_2 t} D_2 c_2\right\| \le \|D_1\| \cdot \|c_1\| + \|D_2\| \cdot \|c_2\| =: \psi_6(t)$;

5) $\|x(t)\| = \left\|ke^{\sigma t} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(le^{\sigma_1 t} + me^{\sigma_2 t}\right) T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} ke^{\sigma t}(\lambda_1 - d) + (le^{\sigma_1 t} + me^{\sigma_2 t})b \\ ke^{\sigma t} c + (le^{\sigma_1 t} + me^{\sigma_2 t})(\lambda_2 - a) \end{pmatrix}\right\| =$

$(|k(\lambda_1 - d)| + |lb| + |mb|)^2 + (|kc| + |l(\lambda_2 - a)| + |m(\lambda_2 - a)|)^2)^{\frac{1}{2}} =: \psi_7(t) \equiv \psi_7$;

6) $\|x(t)\| = \left\|\left(ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}\right) T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(me^{\sigma_3 t} + ne^{\sigma_4 t}\right) T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \le$

$\le (|k(\lambda_1 - d)| + |l(\lambda_1 - d)| + |mb| + |nb|)^2 + (|kc| + |lc| + |m(\lambda_2 - a)| + |n(\lambda_2 - a)|)^2)^{\frac{1}{2}} =: \psi_8(t) \equiv \psi_8$;

7) $\|x(t)\| = \left\|ke^{\sigma t} T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \le \sqrt{|kb|^2 + |k(\lambda_2 - a)|^2} =: \psi_9(t) \equiv \psi_9$;

8) $\|x(t)\| = \left\|\left(ke^{\sigma_1 t} + le^{\sigma_2 t}\right) T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \le \sqrt{(|kb| + |lb|)^2 + (|k(\lambda_2 - a)| + |l(\lambda\ - a)|)^2} =: \psi_{10}(t) \equiv \psi_{10}$.

Зауваження. Лема 2 показує, що використані оцінки лінійних комбінацій двох експонент є точними.

Перейдемо тепер до рівняння (1) в просторі l_2. Оператор A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Двовимірні блоки $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ матриці (5) відповідають розглядуваним вище матрицям 2x2. Двовимірний розв'язок $x_N(t)$ для N-того блоку визначаються формулами з пунктів 1)–8) і $\forall t \in \mathbf{R} : \|x_N(t)\| \le \psi_{i(N)}(t)$, $\|A_N x_N(t)\| \le \|A_N\| \psi_{i(N)}(t),\ i = i(N) \in \{1,...,10\}$, і обирається в залежності від вигляду N-того блоку. Введемо перепозначення: $\tilde{x}_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & (x_N(t),\bar{e}_1) & (x_N(t),\bar{e}_2) & 0 & ... \end{pmatrix}^t$, де $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ –вектори базису в двовимірному просторі. Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розвязку рівняння (1) :

$$x(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{x}_N(t) \qquad (6)$$

Використовуючи подані вище позначення , сформулюємо таку теорему:

Теорема 1. Нехай оператор A має вигляд (5). Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (6).
2) Якщо

$$\forall t \in \mathbf{R} \ : \ \sum_{N=1}^{\infty} \|A_N\|^2 \psi_{i(N)}^2(t) < \infty \ , \ \sum_{N=1}^{\infty} \psi_{i(N)}^2(t) < \infty ,$$

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі $C_E(\mathbf{R}, B)$ функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.

3) Якщо в матриці A немає блоків вигляду 2)б) та 4)б) і

$$\sum_{N=1}^{\infty}\|A_N\|^2\psi_{i(N)}^2<\infty\ ,\ \sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2<\infty\ ,$$

тоді ряд (6) збігається в l_2 до обмеженого розв'язку рівняння (1).

Доведення. Пункт 1 випливає з наведених вище міркувань, якщо діяти на рівняння (1) проекторами на відповідні двовимірні підпростори. Пункт 2 з наведених вище міркувань, рівності Парсеваля : $\|x(t)\|^2=\sum_{N=1}^{\infty}\|\tilde{x}_N(t)\|^2$ і неперервності функцій x та Ax, що випливають з рівномірної збіжності рядів.

4.Дослідження прямої суми блоків n x n.

Далі будемо розглядати рівняння (1), де матриця A – нескінченна і має блочну структуру з блоків різної (скінченної) розмірності.

Всі міркування з попереднього розділу можна перенести на цей випадок. Розглянемо N-тий n-вимірний блок A_N, його власні числа $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ можна визначити з характеристичного рівняння $\det(A_N-\lambda E)=0$.

Зведемо A_N до нормальної жорданової форми. Нехай T – матриця переходу. Простір $\mathbf{C}^n$ розбивається в пряму суму інваріантних підпросторів, що відповідають клітинам Жордана. Розв'язок у цьому просторі буде сумою розв'язків, що відповідають різним клітинам. Міркуючи аналогічно попередньому пункту, можна встановити вигляд розв'язку для кожного випадку.

1) Якщо власне число, що відповідає клітині Жордана, лежить у множині C_1, то розв'язок для цієї клітини нульовий.

2) Якщо клітина Жордана одновимірна, то у випадку власного числа $\lambda\in C_2$ маємо розв'язок $ke^{\sigma t}T\mathbf{e},\ k\in\mathbf{C},\ \sigma=f^{-1}(\lambda),\ \mathbf{e}=(0,,,.0,1,0,...,0)$, де положення одиниці залежить від розташування клітини в матриці, а у випадку $\lambda\in C_3$ маємо розв'язок $\left(k_1e^{\sigma_1t}+k_2e^{\sigma_2t}\right)T\mathbf{e},\ k\in\mathbf{C},\ \sigma_1=f_1^{-1}(\lambda),\sigma_2=f_2^{-1}(\lambda),\ \mathbf{e}=(0,,,.0,1,0,...,0)$.

3) Якщо клітина Жордана U більш ніж одновимірна і $\lambda\in C_2$, то знаходимо матрицю M з умови $Ue^U=MZM^{-1}$, де Z – нормальна жорданова форма для матриці Ue^U. Позначимо через $G(t)$ матрицю розміру $n\times n$, у якої на тому місці, на якому досліджувана клітина Жордана розташована в A_N стоїть матриця $M^{-1}e^{U_0t}M$, де U_0 – клітина Жордана тої ж розмірності, що й U, яка відповідає числу $\sigma=f^{-1}(\lambda)$, а всі інші клітини заповнені нулями. Тоді маємо $x(t)=TG(t)T^{-1}c,\ c\in\mathbf{C}^n$. У випадку $\lambda\in C_3$ всі міркування залишаються правильними, крім того, що маємо два доданки, що відповідають числам $\sigma_1=f_1^{-1}(\lambda),\ \sigma_2=f_2^{-1}(\lambda)$.

n-вимірний розв'язок $x_N(t)$ для N-того блоку визначається наведеними формулами і $\forall t\in\mathbf{R}:\|x_N(t)\|\le\psi_{i(N)}(t)$, $\|A_Nx_N(t)\|\le\|A_N\|\psi_{i(N)}(t),\ i=i(N)$, і обирається в залежності від вигляду N-того блоку. Введемо перепозначення:

$\tilde{x}_N(t)=\begin{pmatrix}0 & ... & 0 & (x_N(t),\bar{e}_1) & ... & (x_N(t),\bar{e}_n) & 0 & ...\end{pmatrix}^t$, де $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\bar{e}_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ – вектори базису в n-вимірному просторі. Тоді можемо записати формальний ряд, який може збігатися до розвязку рівняння (1) :

$$x(t)=\sum_{N=1}^{\infty}\tilde{x}_N(t) \tag{7}$$

Використовуючи подані вище позначення , сформулюємо таку теорему:

Теорема 2. Нехай оператор A має блочно-діагональний вигляд. Тоді:

1) Кожен розв'язок рівняння (1), що зростає повільніше довільної експоненти, має вигляд (7).

2) Якщо $\forall t\in\mathbf{R}$: $\sum_{N=1}^{\infty}\|A_N\|^2\psi_{i(N)}^2(t)<\infty$, $\sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2(t)<\infty$,

причому ряди рівномірно збіжні на кожному відрізку, а другий ряд має суму, що зростає повільніше довільної експоненти, тоді ряд (6) є розв'язком рівняння (1) в класі $C_E(\mathbf{R},B)$ функцій, що зростають повільніше довільної експоненти.

3) Якщо в матриці A немає блоків, описаних у випадку 3) і

$$\sum_{N=1}^{\infty}\|A_N\|^2\psi_{i(N)}^2<\infty\ ,\ \sum_{N=1}^{\infty}\psi_{i(N)}^2<\infty\ ,$$

тоді ряд (7) збігається в l_2 до обмеженого розв'язку рівняння (1).

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

5. Висновки

В роботі розглянуті диференціальні рівняння зі зсувом аргументу в просторі l_2 для випадку вироджених необмежених операторних коефіцієнтів, спектр яких може досить загальним чином перетинати подвійну спіраль $\left\{ ite^{it} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$. В цьому випадку не виконується умова існування та єдиності розв'язків. Проте у випадку операторів блочної структури в просторі l_2 вдалося знайти умови, за яких існують розв'язки, що зростають повільніше довільної експоненти та явно виписати ці розв'язки для випадку двовимірних блоків.

1. *Чайковський А.В.* Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, №5, С. 688-693. 2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 3. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М., 1960.

Надійшла до редколегії 22.09.2007