УДК 517.91

Н. Будницька, асп., О. Пришляк, д-р.фіз.-мат.наук
budnitska_nt@ukr.net, prishlyak@yahoo.com

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАМКНЕНИХ 1-ФОРМ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

Розглядаються замкнені 1-форми з ізольованими нулями на замкнених орієнтованих поверхнях роду $p \geq 2$. Доводиться критерій топологічної еквівалентності замкнених 1-форм.

The closed 1-forms with isolated zeros on orientable closed surfaces of genus $p \geq 2$ are considered. The criteria on topological equivalence of closed 1-formes is proved.

1. Вступ.

Топологічна теорія замкнених 1-форм була започаткована С.П. Новіковим, над нею також працювали А.Т. Фоменко, В.І. Арнольд тощо. У роботі [2] зроблена топологічна класифікація замкнених 1-форм з ізольованими критичними точками та замкненими рекурентними траєкторіями.

Метою цієї роботи є знаходження необхідних і достатніх умов топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями. Для доведення розглядається круг Пуанкаре H^2 як накривна площина поверхні, а також використовується гомотопічний клас обертання, введений С.Х. Арансоном і В.З. Грінесом у роботі [1].

2. Основні визначення.

Розглянемо M – замкнену орієнтовану поверхню роду $p \geq 1$. Нагадаємо деякі означення, що були введені в роботі [2].

Визначення 1. Позначимо $N(\omega) = \{x \in M : f_i(x) = 0\}$ - множину нулів 1-форми ω. Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною кривою форми ω, якщо локально вона є рівнем функції f, такої що $\omega = df$. Ми будемо розглядати тільки максимальні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і будемо називати їх просто кривими чи траєкторіями.

Для кожного досить малого околу $U(x)$ точки $x \in M \setminus N(\omega)$ крива, що проходить через x, розбиває $U(x)$ на дві частини: додатну $\{y : f(y) - f(x) > 0\}$ і від'ємну $\{x : f(y) - f(x) < 0\}$.

Визначення 2. Диференціальні 1-форми ω_1 і ω_2 на M називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : M \to M$, що відображає нулі в нулі, а криві на криві. При цьому h називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того, h зберігає розбиття кожного малого околу точки $x \in M \setminus N(\omega)$ на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні форми топологічно еквівалентними.

Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, а від'ємних – від'ємною.

Визначення 3. Нуль 1-форми називається ізольованим**,** якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.

Визначення 4. Інтегральна крива $\gamma : R \to M$ називається рекурентною, якщо $\gamma \subset \{x \in M : \exists\{t_n\} \to \pm\infty, \gamma(t_n) \to x, n \to \infty\}$.

Нехай ω - замкнена 1-форма з ізольованими точками на замкненій орієнтованій поверхні M, усі рекурентні інтегральні криві якої замкнені. Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як граф $G(\omega)$, що вкладений у поверхню M. При цьому якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна траєкторія, то для побудови графа $G(\omega)$, ми обріжемо цю траєкторію на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Ізольовані нулі можуть бути сідлами парної валентності або центрами [2].

Оскільки поверхня орієнтована, то можемо розглядати інтегральні криві замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 як потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, задані на M, і навпаки.

Якщо рід поверхні $p = 1$, то розглянемо M як фактор евклідової площини R^2 з координатами x, y по цілочисельній решітці Z^2. Позначимо через π природну проекцію R^2 на M. Нехай L - додатна півтраєкторія потоку f_t на M і $l:\ x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [0, +\infty)$ - її прообраз на R^2.

Відомо[1], що якщо $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то існує скінченна чи нескінченна границя $\nu(L) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$, яка не залежить від вибору прообраза l в $\pi^{-1}(L)$. Число $\nu(L)$ називається числом обертання додатної півтраєктрії L потоку f_t на M. Аналогічно визначається число обертання від'ємної півтраєкторії. Зазначимо, що число обертання не залежить від вибору півтраєкторії потоку f_t на M, прообраз якої на R^2 покидає компактну частину площини. Тому для такого потоку f_t на M, можна говорити про одне число обертання для будь-якої півтраєкторії, якщо її прообраз на R^2 покидає компактну частину площини. Таке число ν називається числом обертання Пуанкаре потоку f_t на торі M.

© Н. Будницька, О. Пришляк, 2008

Визначення 5. Потік $\widetilde{f}_t$ на M з числом обертання Пуанкаре $\widetilde{\nu}$ топологічно еквівалентний за допомогою гомеоморфізма $\varphi : M \to M$ потоку f_t на M з числом обертання Пуанкаре ν, якщо $\tilde{\nu} = \dfrac{c + d\nu}{a + b\nu}$, де $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - цілочисельна унімодулярна матриця, яка задає автоморфізм групи гомологій $H_1(M,Z)$, індукований φ. Числа обертання ν і $\widetilde{\nu}$, що задовольняють це співвідношення, називаються сумірними.

Кажуть, що f_t утворює транзитивний потік, якщо в нього ν ірраціональне, а сам f_t співпадає з усім тором. З [1] відомо, що для того щоб два транзитивних потоки на торі без станів рівноваги були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб числа обертання цих потоків були сумірними. Під топологічною еквівалентністю двох потоків f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, заданих на M, розуміється існування гомеоморфізма $M \to M$, що переводить траєкторії потоку f_t в траєкторії потоку $\widetilde{f}_t$.

Для поверхні M роду $p \geq 2$ з роботи [1] розглянемо H^2 - круг Пуанкаре, S^1_∞ - абсолют, $\partial H^2 = S^1_\infty$, причому H^2 з S^1_∞ не перетинаються. Нехай C - коло, яке перетинає S^1_∞ в двох точках під кутами 90^0, тоді $C \cap H^2$ є геодезичною дугою. Ізометрія в H^2 визначається як композиція інверсій, де відстань між точками визначається за формулою $ds^2 = \dfrac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-(x^2+y^2))^2}$, де x і y - це координати точки в R^2. Позначимо множину всіх ізометрій через Γ. Відомими є факти, що Γ ізоморфна $\pi_1(M)$, H^2 є накривним простором для M.

Слідуючи роботі [1], введемо такі означення та позначення: нехай L - траєкторія на M, L^+ - її додатна півтраєкторія (з від'ємною траєкторією аналогічно). Тоді l і l^+ - їх підняття в H^2. Оскільки M - орієнтована, то зобразимо M в H^2 як $4p$-кутник, вершини якого лежать на геодезичних дугах, а сторони є частинами геодезичних дуг, де $p \geq 2$ - рід поверхні M. Тоді $\pi(H^2) = M$, де π - склеювання відповідних сторін.

Відображаючи даний $4p$-кутник k разів відносно лише протилежної сторони до сторони, яку перетинає траєкторія, ми отримаємо криві l^+_k і $l^+_k \to \delta \in S^1_\infty$, $k \to +\infty$. Позначимо через $\delta(l^+)$ - граничну точку півтраєкторії l^+, що належать абсолюту.

Визначення 6. Гомотопічним класом обертання півтраєкторії L^+ потоку f_t на M назвемо множину: $\mu(L^+) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\delta(l^+))$.

Визначення 7. Два гомотопічних класи обертання $\mu(L^+)$ і $\mu(\widetilde{L}^+)$ півтраєкторій L^+ і $\widetilde{L}^+$ потоків f_t і $\widetilde{f}_t$ на M називаються сумірними в силу автоморфізму $\overline{g}_*$ групи Γ, якщо $\mu(\widetilde{L}^+) = \overline{g}^*(\mu(L^+))$, де $\overline{g}^*$ - гомеоморфізм абсолюта S^1_∞, який єдиним чином індукований автоморфізмом $\overline{g}_*$.

Нагадаємо з [1], що потік f_t на M належить класу T, якщо виконуються такі умови:

1) потік f_t є транзитивним, тобто має на M всюди щільну півтраєкторію;

2) у потоку f_t існує лише скінченне число станів рівноваги і сепаратрис;

3) потік f_t немає сепаратрис, що йдуть з одного стану рівноваги в інший або в той же.

З роботи [1] відомо, що для того, щоб два потоки класу T, що задані на зв'язному замкненому орієнтованому двовимірному многовиді M роду $p \geq 2$, які не мають станів рівноваги з двома сепаратрисами, були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб існували дві стійкі за Пуасоном півтраєкторії цих потоків, що мають сумірні в силу автоморфізму $\overline{g}_*$ групи Γ гомотопічні класи обертання.

3. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм на орієнтованих поверхнях.

Граф $G(\omega)$, вершинами якого є нулі, а ребрами траєкторії, що їх з'єднують, розбиває поверхню на області двох типів:

1) області, що заповнені замкненими траєкторіями (регулярними рівнями);
2) області, що заповнені незамкненими рекурентними траєкторіями.

Теорема. *Нехай M - замкнена орієнтована поверхня роду $g \geq 1$. Нехай на M задано дві замкнені 1-форми ω_1 і ω_2. Для того, щоб ω_1 і ω_2 були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:*

1) для $G(\omega_1) \neq \varnothing$ і $G(\omega_2) \neq \varnothing$ виконувалися умови:

- *існував гомеоморфізм $f : M \to M$, обмеження якого на $G(\omega_1)$ задає ізоморфізм графів $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$;*
- *області, що обмежені ребрами графа $G(\omega_1)$, переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі $G(\omega_2)$*
- *додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні - у від'ємні;*

2) для кожної з областей з $M \setminus G(\omega_i)$, що містить хоча б одну незамкнену рекурентну траєкторію, виконувалися умови:

• *для областей роду $p = 1$ числа обертання півтраєкторій замкнених 1-форм ω_1 і ω_2 мають бути сумірними;*

• *для областей роду $p \geq 2$ існує по одній незамкненій рекурентній півтраєкторії замкнених 1-форм ω_1 і ω_2, що мають сумірні гомотопічні класи обертання.*

Доведення. *Необхідність* прямо випливає з побудови та означень.

Достатність. За умовою теореми існує ізоморфізм f між вкладеними в M графами $G(\omega_1)$ і $G(\omega_2)$. Треба задати продовження даного ізоморфізму f до гомеоморфізму $h: M \to M$.

Аналогічно, як і в теоремі 2 роботи [3], встановлюємо траєкторну еквівалентність між областями типу 1).

Умова відображення в областях 1-го типу додатних підобластей в додатні, від'ємних - у від'ємні задана в теоремі.

З умови 1) f задає відповідність між областями через їх межі. Зокрема, f задає відповідність і між областями, межі яких містять хоча б ребро з вершиною валентності 1. Тобто, якщо існує область V, така, що $\partial\overline{V}$ має хоча б одне ребро з вершиною валентності 1, то $\exists!\ \widetilde{V} : f(V) = \widetilde{V}$ і $\partial\overline{\widetilde{V}}$ має таку ж кількість ребер з вершинами валентності 1, які є образами відповідних ребер з $\partial\overline{V}$. Як і при доведенні необхідності розглянемо окремо області V і $\widetilde{V}$, позаклеюємо петлі в $\partial\overline{V}$ і $\partial\overline{\widetilde{V}}$ дисками, які постягуємо в точки, задамо орієнтації на кривих і будемо розглядати ці криві як потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$, задані на V і $\widetilde{V}$.

Якщо рід областей V і $\widetilde{V}$ $p = 1$, то зауважимо, що перебудовані області будуть містити незамкнені рекурентні траєкторії, які мають одне й те ж число обертання, тобто траєкторії в R^2 будуть паралельними між собою. Бо якщо траєкторії не паралельні, а відомо, що кожна така траєкторія щільно заповнює R^2, то між траєкторіями виникали б самоперетини, що неможливо. Тому f_t і $\widetilde{f}_t$ будуть транзитивними потоками у яких, за умовою теореми, числа обертання сумірні, тоді між ними існує гомеоморфізм $V \to \widetilde{V}$, який відображає траєкторії f_t в траєкторії $\widetilde{f}_t$.

Якщо рід областей V і $\widetilde{V}$ $p \geq 2$, то потоки f_t і $\widetilde{f}_t$ $(t \in R)$ будуть належати до класу T і, за умовою теореми, існують дві незамкнені рекурентні півтраєкторій цих потоків, що мають сумірні гомотопічні класи обертання. Тоді існує гомеоморфізм $V \to \widetilde{V}$, який відображає траєкторії f_t в траєкторії $\widetilde{f}_t$. Розглянувши аналогічно всі області, що містять незамкнені рекурентні траєкторії, знайдемо між ними гомеоморфізми.

За необхідності, змінюючи гомеоморфізми областей в околах їх меж (графів) так, щоб гомеоморфізми при обмеженні на межі збігалися з гомеоморфізмами графів, отримаємо в сукупності шуканий гомеоморфізм поверхні. Теорему доведено.

4.Висновок.

У даній роботі сформульована і доведена теорема про топологічну еквівалентність двох замкнених 1-форм на замкненій орієнтованій поверхні.

1. Арансон С.Х., Грінес В.З. Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях: УМН, 1986 Т.41, вып.1(247), С. 149-169. 2. Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісник КНУ. – 2002. . - №8. 3. Будницька Н.В., Пришляк О.О.. Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісник КНУ. - 2007. - №18. 4. Кессон Е., Блейлер С. Теорія автоморфізмів по Нільсону і Тьорстону. М.: ФАЗИС, 1998.

Надійшла до редколегії 20.09.2007