Доведення. Якщо $\|A\| < re^r$, то $\forall s \in \mathbf{R}$: $\left|(is-r)e^{r-is}\right| = \sqrt{s^2+r^2}e^r \geq re^r > |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(A)$, отже виконується умова (3). Згідно теореми 2 розв'язок існує і єдиний. Покажемо, що його можна задати формулою (2). Якщо $y \in E_r$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}\|y(s-k)\|ds \leq \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}e^{r(s-k)}ds = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}e^{-r(s+k)}ds =$$

$$= \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}k!}\int_0^{+\infty}\tau^k e^{-\tau}d\tau = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r\left(1-\frac{\|A\|e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r - \|A\|},\ t \in \mathbf{R}.$$

Тому вираз (2) має сенс і задана ним функція x належить класу E_r. Крім того, почленно продиференційований ряд (2) абсолютно та рівномірно на кожному відрізку збіжний:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\|y(s-k)\|ds \leq \|y\|_r \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}e^{r(s-k)}ds = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k \int_{0}^{+\infty}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}e^{-r(s+k)}ds =$$

$$= \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}(k-1)!}\int_0^{+\infty}\tau^{k-1} e^{-\tau}d\tau = \|y\|_r e^{rt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k e^{-rk}}{r^{k+1}} = \frac{\|y\|_r e^{rt}}{r\left(1-\frac{\|A\|e^{-r}}{r}\right)} = \frac{\|y\|_r e^{r(t+1)}}{re^r - \|A\|},\ t \in \mathbf{R}.$$

Тому перевірка того, що (2) є розв'язком рівняння (1) аналогічна доведенню теореми 1.

Остання теорема показує, що диференціальні властивості довільного розв'язку рівняння (1), визначеного на всій вісі, визначаються властивостями виразу (2).

Теорема 4. Нехай рівняння (1) має розв'язок $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$. Позначимо через $x_N(t)$ N-ту часткову суму ряду (2). Тоді x має ті ж особливості похідних до порядку N, що і x_N, тобто $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

Доведення. Для похідної різниці $x - x_N$ правильна формула

$$\left(x(t) - x_N(t)\right)' = Ax(t-1) + y(t) - \left(y(t) + \sum_{k=1}^{N}A^k \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}y(s-k)ds\right) =$$

$$= A\left(x(t-1) - \sum_{k=0}^{N-1}A^k\int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}y(s-k-1)ds\right) = A\left(x(t-1) - \sum_{k=0}^{N-1}A^k\int_{-\infty}^{t-1}\frac{(t-1-s)^k}{k!}y(s-k)ds\right) =$$

$$= A\left(x(t-1) - x_{N-1}(t-1)\right),\ t \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N}.$$

Тому за індукцією маємо

$$\left(x(t) - x_N(t)\right)^{(N)} = A^N\left(x(t-N) - x_0(t-N)\right) = A^N\left(x(t-N) - \int_{-\infty}^{t-N}y(s)ds\right),\ t \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N},$$

і $x - x_N \in C^{N+1}(\mathbf{R}, B)$.

3. Висновки. В роботі описано нові класи визначених на всій осі розв'язків, диференціальних рівнянь з запізненням аргументу відносно функцій зі значеннями в банановому просторі у випадку обмеженого операторного коефіцієнта. Встановлено диференціальні властивості всіх таких розв'язків.

1. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – К., 1990. – 600 с. 2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., 1972. – 352 с. 3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984. – 421 с. 4. *Чайковський А.В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – №8 – С. 33-37.

Надійшла до редколегії 29.09.08

УДК 515.126, 517.91

Т. Будницька, асп.
Email:Budnitska_T@ukr.net

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З C В C

Отримано необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінних відображень, що діють з C в C.
Necessary and sufficient conditions for topological conjugacy of affine maps from C to C are obtained.

1. Вступ

Всюди в роботі розглядаються матриці над полем дійсних чисел. Нехай $X = R^n$ або C.

Відображення f, $g : X \to X$ називаються *лінійно спряженими* (будемо позначати $f \overset{l}{\sim} g$), якщо існує бієктивне лінійне відображення $h : X \to X$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Відображення f, $g : X \to X$ називаються *топологічно спряженими* (будемо позначати $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h : X \to X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Афінним відображенням, що діє з R^n в R^n, називається відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де A – $n \times n$ матриця, $b \in R^n$ – фіксований вектор, матриця A називається *лінійною частиною* відображення f.

Афінним відображенням, що діє з C в C, називається відображення вигляду $f(z) = az + b$, де a, $b \in C$.

У роботах [2] та [3] розпочато класифікацію афінних відображень, що діють з R^n в R^n, з точністю до топологічної спряженості.

Основний результат цієї роботи – аналогічна класифікація афінних відображень, що діють з C в C,

2. Топологічна класифікація лінійних відображень з R^2 в R^2

Для класифікації афінних відображень з C в C, з точністю до топологічної спряженості, буде використана аналогічна класифікація лінійних відображень з R^2 в R^2, тому нагадаємо деякі відомі результати.

Якщо $f : R^2 \to R^2$ лінійне відображення, $f(x) = Ax$, то R_A – дійсна канонічна форма (ДКФ) матриці A, має вигляд однієї з матриць [4]: $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, де a, $b \in R$.

Для матриці R_A визначимо матриці A_α, $\alpha = +, -, \infty, 0$ – для яких має місце така таблиця:

Якщо матриця A_α є:	то її характеристичні числа λ задовольняють:
A_+	$0 < \|\lambda\| < 1$
A_-	$\|\lambda\| > 1$
A_∞	$\lambda = 0$
A_0	$\|\lambda\| = 1$

Відображення $f : R^2 \to R^2$ називається *періодичним*, якщо існує таке $k \in N$, що $f^k = id_{R^2}$. Найменше таке число k називається *періодом* відображення f. N.H. Kuiper, J.W. Robbin [7], [8] дали топологічну класифікацію тих лінійних відображень, що діють з R^n в R^n, відповідні матриці яких не мають характеристичних чисел, що є коренями з 1. Сформулюємо даний результат для випадку $n = 2$.

Теорема. 2.1. [7], [8]. Нехай $f, g : R^2 \to R^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ – лінійні відображення, де матриці A та C не мають характеристичних чисел, що є коренями з 1.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(\det(A_+)) = sign(\det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(\det(A_-)) = sign(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

А також довели [7], що проблема класифікації лінійних відображень, з точністю до топологічної спряженості, заводиться до випадку, коли A та C – періодичні матриці. А. Пуанкаре [5] показав, що для періодичних лінійних відображень, що діють з R^2 в R^2, топологічна спряженість співпадає з лінійною спряженістю. З курсу лінійної алгебри відомо, що необхідною та достатньою умовою лінійної спряженості двох лінійних відображень є рівність дійсних канонічних форм матриць, що відповідають цим лінійним відображенням. Тому два періодичні лінійні відображення, що діють з R^2 в R^2, $f(x) = Ax$ та $g(x) = Cx$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$.

Об'єднуючи результати, що отримали А. Пуанкаре, N.H. Kuiper та J.W. Robbin, маємо наступне твердження.

Твердження. 2.1. Нехай $f, g : R^2 \to R^2$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ – лінійні відображення.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(\det(A_+)) = sign(\det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(\det(A_-)) = sign(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

3. Топологічна класифікація лінійних відображень з *C* в *C*

З топологічної класифікації лінійних відображень з R^2 в R^2 випливає топологічна класифікація лінійних відображень з C в C. Тобто має місце наступна лема.

Лема. 3.1. Нехай $f, g : C \to C$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, a, $c \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \text{ або } a = c, \text{ або } a = \bar{c}.$$

(Тобто коли $|a|$, $|c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$).

Доведення. Відображення $f, g : C \to C$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a = a_1 + ia_2$, $c = c_1 + ic_2 \in C$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні лінійні відображення з R^2 в R^2, тобто коли

$$f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } a_1,\ a_2 \in R,\ \lambda_A^{(1)} = a,\ \lambda_A^{(2)} = \overline{a}, \text{ та}$$

$$g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } c_1,\ c_2 \in R,\ \lambda_C^{(1)} = c,\ \lambda_C^{(2)} = \overline{c},$$

топологічно спряжені.

З твердження 2.1 $f_{R^2}(x) = Ax$ та $g_{R^2}(x) = Cx$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $rank(A_+) = rank(C_+)$, $sign(\det(A_+)) = sign(\det(C_+))$, $rank(A_-) = rank(C_-)$, $sign(\det(A_-)) = sign(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

Зауважимо, що дійсні канонічні форми матриць A та C – це самі матриці A та C, відповідно, та ці матриці мають наступні властивості:

1) $rank(A) = 2 = rank(C)$, для будь-яких ненульових матриць A та C;

2) $sign(\det(A)) = sign({a_1}^2 + {a_2}^2) = sign({c_1}^2 + {c_2}^2) = sign(\det(C))$, для будь-яких ненульових матриць A та C;

3) $\left|\lambda_A^{(1)}\right| = \left|\lambda_A^{(2)}\right| = |a|$, $\left|\lambda_C^{(1)}\right| = \left|\lambda_C^{(2)}\right| = |c|$;

4) $a = c = 0$ тоді і тільки тоді, коли A та C – нульові матриці;

5) якщо $|a| = |c| = 1$, то $f_{R^2}(x) = Ax \overset{t}{\sim} g_{R^2}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли або $a = c$, або $a = \overline{c}$.

Доведення 5)-ї властивості випливає з того факту, що за твердженням 2.1 при $|a| = |c| = 1$ $f_{R^2}(x) = Ax \overset{t}{\sim} g_{R^2}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$. З рівності цих матриць випливає, що у них характеристичні числа співпадають, тобто $\{\lambda_A^{(1)}, \lambda_A^{(2)}\} = \{\lambda_C^{(1)}, \lambda_C^{(2)}\}$. Оскільки $\{\lambda_A^{(1)}, \lambda_A^{(2)}\} = \{a, \overline{a}\}$, а $\{\lambda_C^{(1)}, \lambda_C^{(2)}\} = \{c, \overline{c}\}$, тому або $a = c$, або $a = \overline{c}$. Та навпаки: якщо $a = c$, то очевидно, що $A = C$; якщо $a = \overline{c}$, то $f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ та $g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h : R^2 \to R^2$, $h(x) = Qx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, такий що $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Використовуючи властивості 1)-5) отримаємо:

$$f_{R^2}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } a_1,\ a_2 \in R,\ \lambda_A^{(1)} = a,\ \lambda_A^{(2)} = \overline{a} \text{ та}$$

$$g_{R^2}(x) = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ де } c_1,\ c_2 \in R,\ \lambda_C^{(1)} = c,\ \lambda_C^{(2)} = \overline{c},$$

топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \text{ або } a = c, \text{ або } a = \overline{c}.$$

Отже, ми отримали необхідні та достатні умови, коли лінійні відображення $f(z) = az$ та $g(z) = cz$, a, $c \in C$ будуть топологічно спряженими.

Лему доведено.

4. Топологічна класифікація афінних відображень з *C* в *C*

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінного відображення та відповідного лінійного.

Теорема 4.1. Нехай $f, g : C \to C$, $f(z) = az + b$, $g(z) = az$, a, $b \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли існує $q \in C$ таке, що $f(q) = q$.

Доведення. *Необхідність.* $f(z) = az + b \overset{t}{\sim} g(z) = az$, a, $b \in C$. Отже, відображення f та g мають однакову кількість нерухомих точок.

Оскільки $g(0) = 0$, то $g(z) = az$, $a \in C$ має принаймні 1 нерухому точку, а отже й відображення $f(z) = az + b$, a, $b \in C$ теж має принаймні 1 нерухому точку (бо інакше f та g не є топологічно спряженими).

Достатність. $f \overset{t}{\sim} g$, бо існує гомеоморфізм $h: C \to C$, $h(z) = z + q$ такий, що $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Справді, $f \circ h = h \circ g$ тоді і тільки тоді, коли $aq + b = q$, а ця рівність виконується, бо q є нерухомою точкою f.

Теорему доведено.

У топологічній класифікації афінних відображень з C в C основною є наступна теорема.

Теорема 4.2. Нехай $f, g: C \to C$, $f(z) = az + b$, $g(z) = cz + d$, a, b, c, $d \in C$.

Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

(Тобто коли $|a|$, $|c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0).

Доведення. Відомо, що у топологічно спряжених відображень однакова кількість нерухомих точок. Тому доведемо теорему для кожного класу афінних відображень, у яких кількість нерухомих точок однакова.

Оскільки довільне афінне відображення з C в C може мати або 1 нерухому точку, або нескінченно багато (тобто бути тотожнім відображенням), або взагалі їх не мати, то маємо 3 випадки:

1) Афінні відображення, що мають тільки по 1 нерухомій точці.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C, $\phi(z) = mz + n$ має тільки 1 нерухому точку, (а саме $z = \frac{n}{1-m}$) тоді і тільки тоді, коли $m \neq 1$, $n \in C$.

Отже, відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, за теоремою 4.1 топологічно спряжені з відповідними лінійними відображеннями, тобто:

$$f(z) = az + b \overset{t}{\sim} r(z) = az,\ a \in C \setminus \{1\},\ b \in C, \qquad g(z) = cz + d \overset{t}{\sim} s(z) = cz,\ c \in C \setminus \{1\},\ d \in C.$$

Очевидно, що відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені $r(z) = az$ та $s(z) = cz$, a, $c \in C \setminus \{1\}$.

За лемою 3.1 відображення $r(z) = az$ та $s(z) = cz$, a, $c \in C \setminus \{1\}$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли.

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

Отже, $f(z) = az + b \overset{t}{\sim} g(z) = cz + d$, де a, $c \in C \setminus \{1\}$, b, $d \in C$, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

2) Афінні відображення, що мають нескінченно багато нерухомих точок.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C, $\phi(z) = mz + n$ має нескінченно багато нерухомих точок, тобто є тотожнім відображенням, тоді і тільки тоді, коли $m = 1$ та $n = 0$.

Отже, відображення $f(z) = az + b$ та $g(z) = cz + d$, що мають нескінченно багато нерухомих точок, топологічно спряжені, бо $f(z) = g(z) = id_C(z)$.

3) Афінні відображення, що не мають нерухомих точок.

Зауважимо, що довільне афінне відображення з C в C, $\phi(z) = mz + n$ не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $m = 1$ та $n \neq 0$. Тобто афінне відображення з C в C, що не має нерухомих точок, має вигляд $\phi(z) = z + n$, $n \in C \setminus \{0\}$.

Відображення $f(z) = z + b$ та $g(z) = z + d$, b, $d \in C \setminus \{0\}$, які не мають нерухомих точок, завжди топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h: C \to C$, $h(z) = \frac{d}{b} z$, b, $d \in C \setminus \{0\}$ такий, що $h \circ f = g \circ h$.

Об'єднуючи результати цих 3 випадків, отримаємо:

$f(z) = az + b \overset{t}{\sim} g(z) = cz + d$, a, $c \in C \setminus \{1\}$, b, $d \in C$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \bar{c}$.

Якщо $a = c = 1$, то відображення $f(z) = z + b$ та $g(z) = z + d$, b, $d \in C$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли вони є або одночасно тотожними відображеннями, або одночасно відмінними від тотожних (бо інакше відображення будуть мати різну кількість нерухомих точок). Тобто $f(z) = z + b \overset{t}{\sim} g(z) = z + d$, b, $d \in C$ тоді і тільки тоді, коли b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Отже, $f(z) = az + b \overset{t}{\sim} g(z) = cz + d$, a, b, c, $d \in C$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови: або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \overline{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Теорему доведено.

5. Висновки

У роботі дана класифікація, з точністю до топологічної спряженості, відображень вигляду $f(z) = az + b$, a, $b \in C$, що діють з C в C. Тобто знайдено необхідні та достатні умови коли два довільні афінні відображення з C в C будуть топологічно спряженими. Доведено теорему про топологічну спряженість такого афінного відображення з відповідним лінійним.

1. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп: Пер. с англ. -- М., 1986. 2. *Будницька Т.В.* Класифікація топологічно спряжених афінних відображень // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.61, № 1. – с. 134–139. 3. *Будницька Т.В.* Топологічна класифікація афінних відображень з R^2 в R^2 // Нелінійні коливання. – 2008. – Т.11, № 4. – с. 472–480. 4. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. – М., 1986. 5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. -- М.-Л., 1947. 6. *Cappell S.E., Shaneson J.L.* Non-linear similarity // Ann. of Math. – 1981. – Vol. 113. – P. 315–355. 7. *Kuiper N.H., Robbin J.W.* Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. – 1973. – Vol. 19, №2. – P. 83–106. 8. *Robbin J.W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 78, №6. – P. 923–952.

Надійшла до редколегії 19.09.08

УДК 517.91

Н. Лукова, асп., О. Пришляк, д-р фіз.-мат.наук
Email: prishlyak@yahoo.com

ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ З МЕЖЕЮ

Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею.
We construct the complete topological invariant of functions in general position on 3-manifolds with boundary.

1. Вступ

Якщо *M* – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину у просторі всіх функцій. За лемою Морса [2], для невиродженої критичної точки *p* існує локальна система координат $(x_1,\ldots,x_n)$, в якій функція має вигляд $f(x_1,\ldots,x_n) = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2$.

Нехай *M* – гладкий компактний *n*-вимірний многовид з межею ∂M. Функція $f\colon M \to \mathbf{R}$ є функцією загального положення, якщо

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на межі ∂M,

б) обмеження f_∂ функції *f* на ∂M є функцією Морса загального положення,

в) критичний рівень функції *f* містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції f_∂.

Нехай $x \in \partial M$ – критична точка f_∂. Індексом ind *x* цієї критичної точки називається пара (λ,δ), де λ – звичайний індекс, а $\delta = +1$, якщо вектор gradf_x спрямований назовні і $\delta = -1$, якщо gradf_x спрямований в усередину многовиду *M.* Якщо $x \notin \partial M$ – критична точка *f,* то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невиродженої критичної точки f_∂ існує локальна система координат $(x_1,\ldots,x_n)$, $x_n \geq 0$, в якій функція *f* має вигляд $f(x_1,\ldots,x_n) = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \delta x_n$ [4].

Нехай $f,g\colon M \to \mathbf{R}$ - гладкі функції. Функції *f* і *g* називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi\colon M \to M$, $\zeta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такі, що $f\zeta = g\psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морса на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1,5,6], а тривимірних у [3].

Основна мета роботи – дати топологічну пошарову класифікацію функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею.

2. m-діаграми Хегора

Нехай $H \cup H' = M$ – розбиття многовиду *M* таке, що $H = M^1$ – об'єднання ручок, індекси яких дорівнюють 0, 1, (0, -1), (0, +1), (1, -1), $F = L^1 = \partial H = \partial H'$ – загальна поверхня з краєм многовидів *H* и *H′.* Набір $u = \{u_1, u_2,\ldots, u_n, u_1^m, u_2^m,\ldots, u_s^m\}$ правильно вкладених кривих, що не перетинаються, на поверхні *F* таких, що кожне u_i - косередня сфера ручки індексу 1, а u_j^m – перетин косередньої сфери ручки індексу (1, -1) з *F*, називається узагальненою системою меридіан кренделя *H.* Набір $v = \{v_1, v_2,\ldots, v_m, v_1^m, v_2^m,\ldots, v_k^m\}$, що складається із середніх сфер ручок індексу 2 і перетинів середніх сфер індексу (1, +1) з *F*, називається узагальненою системою меридіан кренделя *H′.*

Трійка (*F, u, v*) називається m-діаграмою Хегора многовиду *M*, а поверхня *F* – поверхнею Хегора. M-діаграми (*F, u, v*) і (*F′, u′, v′*) називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h\colon F \to F'$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$.