Якщо $a = c = 1$, то відображення $f(z) = z + b$ та $g(z) = z + d$, b, $d \in C$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли вони є або одночасно тотожними відображеннями, або одночасно відмінними від тотожних (бо інакше відображення будуть мати різну кількість нерухомих точок). Тобто $f(z) = z + b \overset{t}{\sim} g(z) = z + d$, b, $d \in C$ тоді і тільки тоді, коли b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Отже, $f(z) = az + b \overset{t}{\sim} g(z) = cz + d$, a, b, c, $d \in C$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови: або $\begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases}$ або $a = c$, або $a = \overline{c}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Теорему доведено.

5. Висновки

У роботі дана класифікація, з точністю до топологічної спряженості, відображень вигляду $f(z) = az + b$, a, $b \in C$, що діють з C в C. Тобто знайдено необхідні та достатні умови коли два довільні афінні відображення з C в C будуть топологічно спряженими. Доведено теорему про топологічну спряженість такого афінного відображення з відповідним лінійним.

1. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп: Пер. с англ. -- М., 1986. 2. *Будницька Т.В.* Класифікація топологічно спряжених афінних відображень // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.61, № 1. – с. 134–139. 3. *Будницька Т.В.* Топологічна класифікація афінних відображень з R^2 в R^2 // Нелінійні коливання. – 2008. – Т.11, № 4. – с. 472–480. 4. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. – М., 1986. 5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. -- М.-Л., 1947. 6. *Cappell S.E., Shaneson J.L.* Non-linear similarity // Ann. of Math. – 1981. – Vol. 113. – P. 315–355. 7. *Kuiper N.H., Robbin J.W.* Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. – 1973. – Vol. 19, №2. – P. 83–106. 8. *Robbin J.W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 78, №6. – P. 923–952.

Надійшла до редколегії 19.09.08

УДК 517.91

Н. Лукова, асп., О. Пришляк, д-р фіз.-мат.наук
Email: prishlyak@yahoo.com

ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ З МЕЖЕЮ

***Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з меже**ю.*
We construct the complete topological invariant of functions in general position on 3-manifolds with boundary.

1. Вступ

Якщо *M* – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину у просторі всіх функцій. За лемою Морса [2], для невиродженої критичної точки *p* існує локальна система координат $(x_1,\dots,x_n)$, в якій функція має вигляд $f(x_1,\dots,x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

Нехай *M* – гладкий компактний *n*-вимірний многовид з межею ∂M. Функція $f\colon M \to \mathbf{R}$ є функцією загального положення, якщо

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на межі ∂M,

б) обмеження f_∂ функції *f* на ∂M є функцією Морса загального положення,

в) критичний рівень функції *f* містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції f_∂.

Нехай $x \in \partial M$ – критична точка f_∂. Індексом ind *x* цієї критичної точки називається пара (λ, δ), де λ – звичайний індекс, а $\delta = +1$, якщо вектор gradf_x спрямований назовні і $\delta = -1$, якщо gradf_x спрямований в усередину многовиду *M.* Якщо $x \notin \partial M$ – критична точка *f*, то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невиродженої критичної точки f_∂ існує локальна система координат $(x_1,\dots,x_n)$, $x_n \geq 0$, в якій функція *f* має вигляд $f(x_1,\dots,x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n$ [4].

Нехай $f, g\colon M \to \mathbf{R}$ - гладкі функції. Функції *f* і *g* називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi\colon M \to M$, $\zeta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такі, що $f\zeta = g\psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морса на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1,5,6], а тривимірних у [3].

Основна мета роботи – дати топологічну пошарову класифікацію функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею.

2. m-діаграми Хегора

Нехай $H \cup H' = M$ – розбиття многовиду *M* таке, що $H = M^1$ – об'єднання ручок, індекси яких дорівнюють 0, 1, (0, -1), (0, +1), (1, -1), $F = L^1 = \partial H = \partial H'$ – загальна поверхня з краєм многовидів *H* и *H′*. Набір $u = \{u_1, u_2,\dots, u_n, u_1^m, u_2^m,\dots, u_s^m\}$ правильно вкладених кривих, що не перетинаються, на поверхні *F* таких, що кожне u_i - косередня сфера ручки індексу 1, а u_j^m – перетин косередньої сфери ручки індексу (1, -1) з *F*, називається узагальненою системою меридіан кренделя *H.* Набір $v = \{v_1, v_2,\dots, v_m, v_1^m, v_2^m,\dots, v_k^m\}$, що складається із середніх сфер ручок індексу 2 і перетинів середніх сфер індексу (1, +1) з *F*, називається узагальненою системою меридіан кренделя *H′.*

Трійка (*F, u, v*) називається m-діаграмою Хегора многовиду *M*, а поверхня *F* – поверхнею Хегора. М-діаграми (*F, u, v*) і (*F′, u′, v′*) називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h\colon F \to F'$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$.

М-діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують такі ізотопії φ_t, ψ_t : $F \to F$, що $\varphi_0 = \psi_0 = id$, $\varphi_1(u) = u'$, $\psi_1(v) = v'$.

Визначимо операцію додавання меридіан: під сумою $u_1\# u_2$ двох меридіан u_1 і u_2 уздовж простої кривої α, яка з'єднує u_1 і u_2 , називається та компонента краю околу об'єднання $\partial U(u_1 \cup u_2 \cup \alpha)$, яка в цьому околі неізотопна ні u_1, ні u_2. Якщо один чи обидва меридіани є m-меридіани, сума визначається аналогічно. При цьому, якщо обидва меридіани є m-меридіанами, то крива $\alpha \subset \partial F$.

Позначимо через $u_1^{\partial}, \ldots, u_p^{\partial}$ компоненти $\partial F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} u_i^m$, $v_1^{\partial}, v_2^{\partial}, \ldots, v_q^{\partial}$ – компоненти $\partial F \setminus \bigcup_{i=1}^{k} v_i^m$. М-діаграма називається упорядкованою, якщо задане відображення σ множини $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1^m, u_2^m, \ldots, u_s^m, u_1^{\partial}, \ldots, u_p^{\partial}, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_1^m, v_2^m, \ldots, v_k^m, v_1^{\partial}, v_2^{\partial}, \ldots, v_q^{\partial}\}$ на множину $\{0, 1, 2, \ldots, N+1\}$.

Упорядковані m-діаграми Хегора (УmДХ) називаються еквівалентними, якщо одну з іншої можна одержати за допомогою послідовності гомеоморфізмів, напівізотопій діаграм (пальчикових рухів, трюків Уітні між u і v меридіанами, скорочень або введень трикутників, сторони яких складаються з дуг u_i^m, v_j^m, ∂F), а також таких замін меридіанів: 1) u_i на $u_i\# u_j$, при $\sigma(u_i) < \sigma(u_j)$, 2) u_i^m на $u_i^m \# u_j$, при $\sigma(u_i^m) < \sigma(u_j)$, 3) u_i^m на $u_i^m \# u_j^m$, при $\sigma(u_i^m) < \sigma(u_j^m)$, 4) v_i на $v_i\# v_j$, при $\sigma(v_i) > \sigma(v_j)$, 5) v_i^m на $v_i^m \# v_j$, при $\sigma(v_i^m) > \sigma(v_j)$, 6) v_i^m на $v_i^m \# v_j^m$, при $\sigma(v_i^m) > \sigma(v_j^m)$, 7) u_i^m на $u_i^m \# v_j^m$, при $\sigma(u_i^m) > \sigma(v_j^m)$.

При цьому порядок σ суми дорівнює порядку першого доданку. В сьомій операції змінюється поверхня F, як на рис. 1/ (u_i^m зображено суцільною лінією, а v_j^m – штрихованою).

Рис. 1.

Для задання порядку на множині меридіанів, побудуємо граф Ріба функції Морса. Це орієнтований граф, що отриманий з многовида, стягненням кожної компоненти рівня в точку. При цьому, якщо компонента містить критичну точку функції, то їй відповідає вершина графа, інакше точка на ребрі. Орієнтація ребер задається напрямком зростання функції. Порядок меридіана визначається як довжина максимального орієнтованого шляху, що закінчується у вершині, яка відповідає цьому меридіану. Наприклад, якщо ручка індексу 1 або 2 приклеюється до об'єднання тільки ручок індексу 0, то порядок відповідного меридіана і цієї ручки рівний 1. Якщо вона приклеюється до об'єднання ручок, у яких максимальний порядок k, то приклеєна ручка і відповідний меридіан мають порядок k+1. Порядок u_i^{∂} дорівнює 0, якщо вони лежать (хоча б частково) у межі ручки індексу (0, +1) і більший за 0, для ручок індексу (0, -1). Аналогічно, порядок v_i^{∂} дорівнює N+1, якщо вони лежать (хоча б частково) у межі ручки індексу (2, -1) і менший за N+1, для ручок індексу (2, +1). Число N будемо називати висотою функції.

3. Геометрична пошарова еквівалентність.

Нехай M – ріманoвий многовид. Дві функції f, g: $M \to \mathbf{R}$ називаються *геометрично пошарово еквівалентними,* якщо існує гомеоморфізми h: $M \to M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g, а траєкторії поля grad f в траєкторії поля grad g, зберігаючи напрямок руху за ними.

Теорема 1. *Дві функції загального положення на тривимірних ріманових многовидах з межею геометрично пошарово еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує гомеоморфізм між їх m-діаграми Хегора, що зберігає упорядкування.*

Доведення. Необхідність. За побудовою m-діаграми Хегора на рімановому многовиді, вона за функцією Морса-Смейла визначається однозначно, з точністю до гомеоморфізма.

Достатність. Гомеоморфізм діаграм задає взаємно-однозначну відповідність між траєкторіями полів градієнтів згідно їх перетинів з поверхнею Хегора. Рівність упорядкувань меридіанів забезпечує однаковий порядок приклейки ручок, а отже, і гомеоморфність відповідних компонент критичних рівнів. Якщо викинути компоненти рівнів, що містять критичні точки, то отримаємо незв'язне об'єднання циліндрів. При цьому кожному циліндру однієї функції відповідає циліндр іншої. Задамо гомеоморфізм між відповідними областями значень на прямій і такий, що зберігає орієнтацію прямої. Тоді цей гомеоморфізм у сукупності з відповідністю між траєкторіями задає гомеоморфізм між циліндрами. Тоді гомеоморфізми циліндрів, разом з побудованими раніше гомеоморфізмами компонент критичних рівнів задають шуканий гомеоморфізм тривимірних многовидів.

4. Топологічна пошарова еквівалентність.

Дві функції f, g: $M \to \mathbf{R}$ називаються *(топологічно) пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізми h: $M \to M$, який відображає компоненти рівнів функції f в компоненти рівнів функції g.

Теорема 2. *Дві функції загального положення на тривимірних многовидах з межею будуть топологічно пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли побудовані за ними упорядковані m-діаграми Хегора будуть еквівалентні.*

Доведення. За функцією загального положення побудуємо нову функцію загального положення, у якої критичні значення сідлових точок збігаються з порядком, а всі локальні мінімуми і точки індексу (0,+1) мають значення 0, а локальні максимуми і точки індексу (2,-1) мають значення N+1. Таку функцію назвемо зведеною.

Нехай $y_0 = \min f$. Для кожного локального мінімуму x_i і досить малого $\varepsilon > 0$ і околу U точки x_i змінимо функцію в цьому околі, взявши композицію функції f з дифеоморфізмом прямої, що тотожній при $y > f(x_i) + \varepsilon$ і відображає $f(x_i)$ в y_0 . Тоді значення функції будуть однаковими для всіх локальних мінімумів і нова функція буде пошарово еквівалентна початковій. Аналогічно можна змінювати значення функції в сідлових точках використовуючи дифеоморфізми проміжків значень на компонентах рівнів функції, які на графі Ріба утворюють ребра суміжні з вершиною x_i . Отже, за допомогою такої процедури отримаємо зведену функцію, що пошарово еквівалентна функції *f*.

Покажемо, що топологічна пошарова еквівалентність функцій Морса рівносильна топологічній еквівалентності зведених функцій. З означення топологічної еквівалентності випливає пошарова. Навпаки, нехай пошарова еквівалентність задана. Тоді відображення шарів, в композиції з відображенням зсуву вздовж поля градієнта до шару з тим же значенням, задає відображення шарів з однаковими значеннями, а, отже, і топологічну еквівалентність.

Використання теореми з [5] до зведених функцій завершує доведення.

5. Реалізація інваріанта функцією.

Функція порядку σ має такі властивості:

1) порядок $\sigma(w_i)$ кожного меридіану w_i є цілим числом і $0<\sigma(w_i)<N+1$;

2) якщо $u_i \cap v_j \neq \varnothing$, то $\sigma(u_i)<\sigma(v_j)$.

Для доведення цієї властивості досить помітити, що через точку перетину меридіанів проходить траєкторія поля градієнта, яка починається в критичній точці, яка відповідає u_i, і закінчується в точці, яка відповідає v_j. Оскільки функція зростає вздовж цієї траєкторії і траєкторія проектується на граф Ріба в ребро або орієнтований маршрут, то $\sigma(u_i)<\sigma(v_j)$;

3) якщо порядок $\sigma(w_i)>1$, то існує меридіан w_j такий, що $\sigma(w_i) = \sigma(w_j)+1$ і меридіани w_i та w_j можна з'єднати шляхом, який не перетинає інших меридіанів u_k, порядок яких $\sigma(u_k) > \sigma(w_j)$ і меридіанів v_k, порядок яких $\sigma(v_k) < \sigma(w_j)$. Тут w_i та w_j можуть бути меридіанами як одного типу, так і різних типів. Наприклад, $w_i=u_i$, $w_j = v_j$.

Доведення цієї властивості прямо випливає з процесу побудови порядку.

Функцію порядку σ, яка задовольняє властивостям 1)-3), будемо називати *допустимою,* а УmДХ з допустимою функцією порядку – *допустимою* УmДХ.

Теорема 3. *Для кожної допустимої* УmДХ *існує функція загального положення, яка породжує цю* УmДХ.

Доведення. УmДХ задає розклад многовида на ручки. Функція σ визначає порядок приклеювання ручок. Після приклеювання кожної ручки будемо приклеювати комір. В результаті отримаємо розклад на ручки з комірами. Стискаючи кожну ручку в (критичну) точку, отримаємо многовид з функцією на ньому, що задається за допомогою проекцій комірів на відрізок в сумі з константами, такими щоб ці функції були узгоджені на краях комірів. Будь-яка функція загального положення, що топологічно еквівалентна побудованій функції, буде шуканою, оскільки обернена побудова приведе до заданої УmДХ.

6. Приклади підрахувань.

Розглянемо функції на тривимірному диску D^3, всі критичні точки яких лежать на краю. В цьому випадку порядок всіх u_i^∂ дорівнює 0, а порядок v_i^∂ дорівнює N+1. Оскільки ейлерова характеристика двовимірної сфери дорівнює 2, то число критичних точок парне. Існує одна m-функція з двома критичним точками. Діаграми функцій з 4 критичними точками зображено на рис. 2 (лінії *u* зображено суцільною лінією, а лінії *v* – штрихованою).

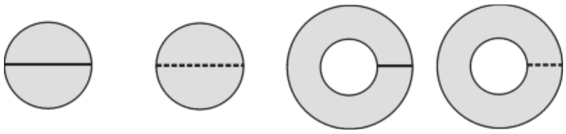

Рис. 2.

На всіх діаграмах існує по одному упорядкуванню, оскільки на них по одному меридіану.

На рис. 3 зображені дві інші m-діаграми функцій з 4 критичними точками на краю.

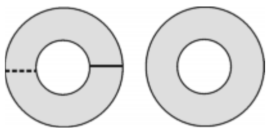

Рис. 3.

Перша діаграма має три різні упорядкування і задає функції на $S^1 \times D^2$, друга має два упорядкування і задає m-функції на $S^2 \times D^1$.

Діаграми функцій з 6 критичними точками на границі тривимірного диску зображено на рис.4.

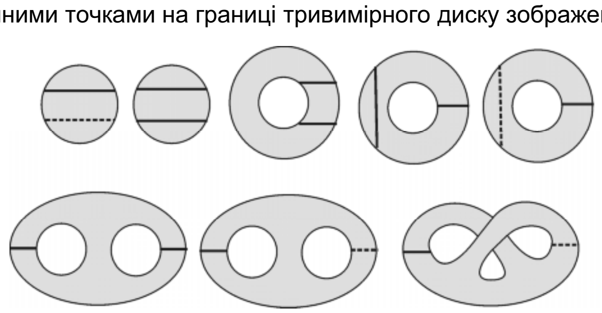

Рис. 4.

Ще 5 діаграм можна отримати, якщо в кожній із діаграм, крім першої і останніх двох , замінити суцільні лінії на штриховані, а штриховані на суцільні. Для першої діаграми можливі 3 функцій порядку σ, для другої - 2, третьої – 2, четвертої – 3, п'ятої – 3, шостої – 2, сьомої – 3. Для одного оснащення четвертої діаграми можливі додавання меридіан, які призводять до третьої діаграми. Для восьмої діаграми, тільки дві функції порядку дають діаграми нееквівалентні сьомій діаграмі. Отже, всього існує 3+2x2+2x2+2x3+2x3+2x2+3+2-1=31 функція загального положення на тривимірному диску з 6 критичними точками на границі.

Нехай T – тор з виколотим відкритим диском (як остання діаграма на рис.4) і діаграма на T містить по два меридіани кожного типу, які негомотопні між собою і негомотопні 0 (при гомотопії кінці меридіан ковзають по краю T). Стягнувши край T в точку, отримаємо, що кожна система меридіанів є системою твірних фундаментальної групи тору. Матриця переходу від однієї системи до другої є матрицею з SL(2,**Z**). Отже, існує нескінченно багато топологічно нееквівалентних функцій загального положення з 6 критичними точками на границі многовиду $T\times[0,1]$.

Висновок. Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на тривимірних многовидах з межею. Ефективність цього інваріанту продемонстровано на конкретних прикладах підрахування числа не еквівалентних функцій.

1. *Максименко С.І.* Еквівалентність m-функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Ки]в, 1998,- С.128-134. 2. *Милнор Дж.* Теория Морса. - М.: Мир, 1964. - 184 с. 3. *Пришляк А.О.* Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Киев, 1998,- С.94-103. 4. *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. 5. *Kulinich E.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.– P.22–28. 6. *Sharko V.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.–P.19–23.

Надійшла до редколегії 26.09.08

УДК 519.21

О. Курченко, д-р.фіз.-мат.наук

ТЕОРЕМА БАКСТЕРОВОГО ТИПУ ДЛЯ СТРОГО СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Отримані достатні умови збіжності у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

Sufficient conditions of convergence in square mean and with probability one of Baxter sums for jointly strong subgaussian random fields are obtained.

1. Вступ

Граничні теореми бакстерового типу для випадкових процесів та полів полягають у встановленні умов збіжності у певному сенсі до невипадкової сталої послідовності сум від приростів випадкових процесів чи полів. Цей напрямок започаткував Леві [21], коли встановив такий результат для стандартного броунівського руху. Бакстер [14] узагальнив цей результат для більш широкого класу гауссових випадкових процесів. Впродовж останніх десятиліть збіжність бакстерових сум для випадкових процесів і полів досліджувалася багатьма математиками. У припущеннях гауссовості теореми бакстерового типу (відомі також під назвою теореми Леві-Бакстера) для випадкових процесів отримали Гладишев [6], Рижов [11, 12], Ібрагімов та Розанов [7], Гіне та Клейн [18], Врубель [24]. Персі [22] довів теорему бакстерового типу без припущення гауссовості за рахунок умов на мішані моменти четвертого порядку випадкового процесу. Для гауссових випадкових полів (випадкових функцій кількох змінних) та випадкових полів із гауссовими приростами збіжність послідовності бвкстерових сум досліджували Краснитський [8], Берман [15], Арак [1], Стрет [23], Кавада [20], Део та Уонг [17], Шкляр [13], Чен Ксьонг та Пан Ксіа [16], Гійон [19], Курченко [9]. Проводилися також дослідження умов збіжності послідовності бакстерових сум для окремих класів випадкових функцій. Так теореми Леві-Бакстера для строго передгауссових процесів отримали Бесклінська та Козаченко [2]. Булдигін, Мельник, Шпортюк [3,4] встановили необхідні й достатні умови збіжності послідовності бакстерових сум для дробових полів на фіксованій та зростаючій параметричних множинах. Булдигін і Козаченко отримали теорему Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів [5].

У цій статті теорема Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів, що отримали Булдигін і Козаченко [5], узагальнена для сумісно строго субгауссових випадкових полів. При цьому розглянуті досить загальні прирости сумісно строго субгауссового поля на багатовимірному паралелепіпеді. Одночасне обчислення бакстерових сум із приростами різних типів можна застосувати для побудови консистентних оцінок параметрів коваріаційних функцій випадкових полів. У підрозділі 2 наведено означення сумісно строго субгауссового випадкового поля. У підрозділі 3 описаний клас розгляданих приростів функцій кількох змінних на багатовимірному паралелепіпеді. Підрозділ 4 містить теорему бакстерового типу, в якій встановлена збіжність у середньому квадратичному або з імовірністю одиниця послідовності бакстерових сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів.

2. Сумісно строго субгауссові випадкові поля

Строго субгауссові випадкові вектори та сумісно строго субгауссові випадкові процеси описані у монографії Булдигіна і Козаченка [5, гл. 7]. Нехай $(\Omega,\ F,\ P)$ – імовірнісний простір.

Означення 2.1. ([5]) Випадковий вектор $\xi:\Omega\to R^n$ називається строго субгауссовим, якщо для всіх $u\in R^n$ виконується нерівність $E\exp\{(u,\xi)\}\le\exp\left\{\frac{1}{2}(Bu,u)\right\}$, де $B=E\left(\xi\xi^t\right)$ – коваріаційна матриця випадкового вектора – стовпця ξ (верхній індекс t означає транспонування).

Сукупність строго субгауссових n-вимірних векторів позначають символом $\mathrm{SSub}\left(\Omega,R^n\right)$. Відмітимо, що строго субгауссовий випадковий вектор є субгауссовим ([5]). Центрований гауссовий випадковий вектор є строго субгауссовим.