$$f(x) = \begin{cases} ax^{\alpha} & 0 \le x \le c^*, \\ bx^{\gamma} & x > c^*, \end{cases} \qquad (8)$$

де $c^* = (a/b)^{1/\gamma-\alpha}$, не є розв'язком нерівності (1).

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що функція вигляду (8) є розв'язком нерівності (1). Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \ne y$) відносно точки c^*.

Нехай $x \in (0;c^*)$, $y \in (c^*;+\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0;c^*)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $a(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x)f(y) = ax^{\alpha}by^{\gamma}$. Звідси отримаємо, що $(y/c^*)^{\gamma-\alpha}a \ge 1$. Останнє співвідношення виконується, якщо $\alpha \le \gamma$. Припустимо, що $xy \in (c^*;+\infty)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо $b(xy)^{\gamma} = f(xy) \le f(x)f(y) = ax^{\alpha}by^{\gamma}$. Звідси маємо, що $(x/c^*)^{\gamma-\alpha}\, 1/b \le 1$. Якщо останнє співвідношення виконується, то $\alpha \le \gamma$.

Нехай $x, y \in (c^*;+\infty)$. Припустимо, що $xy \in (0;c^*)$. Легко зрозуміти, що у цьому випадку $c^* \le 1$. Звідси, оскільки $a > b$, одержуємо нерівність $\alpha \ge \gamma$. Маємо протиріччя.

Висновки. Досліджено клас неперервних розв'язків нерівності $f(xy) \le f(x)f(y)$, отримано опис загального вигляду функцій, визначених для всіх $x \in [0;+\infty)$, неперервних і таких, що для всіх значень $x, y \in [0;+\infty)$ справедлива нерівність $f(xy) \le f(x)f(y)$.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с імпульсним воздействием. К.: Вища школа, 1987. – 288с. 2. *Борисенко С.Д., Самойленко А.М., Матараццо Дж., Тоскано Р., Ясінський В.В.* Диференціальні моделі. Стійкість. К.:Вища школа, 2000. – 329с. 3. *Фіхтенгольц Г.М.* Курс диференціального і інтегрального числення: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.2.

Надійшла до редколегії 28.09.09

УДК 517.51

Л. Ющенко, асп.

НЕГАТИВНІ РЕЗУЛЬТАТИ У КУСКОВО-ОПУКЛОМУ НАБЛИЖЕННІ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ

Доведено, що для кусково-q-опуклого, $q > 3$, наближення алгебраїчними многочленами, нерівності типу Джексона-Стєчкіна є невірними навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують, якщо гладкість функції вище двох.

We prove that for the q-coconvex, $q > 3$, approximation by the algebraic polynomials, the Jackson-Stechkin estimates are invalid even with a constant which depends on the function, if the smoothness of a function is over the two.

1. Вступ. Основні означення та формулювання

Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$функцій f , з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

$C^{(r)}$ визначає простір r разів неперервно-диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Для кожної функції $f \in C[a,b]$ і кожного $q \in \mathbb{N}$, позначимо через $\Delta_h^q(f,x) := \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} f(x + jh)$, q -ту різницю у точці x з кроком h .

Нехай Y_s , $s \in \mathbb{N}$ – фікований набір з $s+1$ -єї точки $y_i \in [a,b]$, $a = y_s < ... < y_1 < y_0 = b$; $\Delta(Y_s[a,b])$ – множина функцій $f \in C[a,b]$, неспадних на $[y_{i+1}, y_i]$ для i - парних та незростаючих на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції з $\Delta(Y_s[a,b])$ називаються кусково-монотонними.

Нехай $\Delta^2(Y_s[a,b])$ множина функцій $f \in C[a,b]$, таких що $\Delta_h^2(f,x) \ge 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для i - парних та $\Delta_h^2(f,x) \le 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції з $\Delta^2(Y_s[a,b])$ називаються кусково-опуклими.

Більш загально, якщо $q \ge 2$, тоді множина $\Delta^q(Y_s[a,b])$ є множиною функцій $f \in C[a,b]$, таких що $\Delta_h^q(f,x) \ge 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для i - парних та $\Delta_h^q(f,x) \le 0$ на $[y_{i+1}, y_i]$ для непарних i . Функції $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$ називаються кусково - q - опуклими.

Нехай P_n – простір алгебраїчних многочленів степені $\le n$.

Для функції $f \in \Delta(Y_s[a,b])$ позначимо

$$E_n(f, Y_s[a,b]) := \inf_{P_n \in \mathrm{P}_n \cap \Delta(Y_s[a,b])} \|f - P_n\|_{C[a,b]}$$

величину найкращого кусково-монотонного наближення многочленами.

© Л. Ющенко, 2009

Аналогічно для $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$ позначимо

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) := \inf_{P_n \in \mathrm{P}_n \cap \Delta^q(Y_s[a,b])} \|f - P_n\|_{C[a,b]}$$

Величину найкращого кусково - q - опуклого наближення многочленами.

Нехай W_∞^r – клас функцій, які мають абсолютно-неперервну $(r-1)$-шу похідну на $[a,b]$ і таких, що $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[a,b]} < \infty$.

Починаючи з робіт G.G.Lorentz, K.L.Zeller [8] вивчаються питання про справедливість оцінок типу Джексона-Стєчкіна для q-опуклого та кусково q-опуклого наближення функції

$$f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap W^r_{L_\infty[a,b]},$$

а саме оцінок

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) \le c(q,r)\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[a,b]} \frac{(b-a)^r}{n^r}, \qquad n \ge N, \tag{1}$$

де $c(q,r)$ – стала, яка залежить лише від q і r, а N – деяке натуральне.

Зокрема, якщо $q=1$, або $q=2$, то оцінка (1) має місце для всіх r і s [6 ; 7], якщо $q=3$, $r \ge 4$, то це питання ще в стані дослідження [4]. Якщо $q>3$ і $s=1$, то (1) має місце для $r=1$ [3] і $r=2$ [2]. Якщо ж $q>3$, $s=1$ та $r>2$, Konovalov та Leviatan показали [5], що оцінка (1) є невірною з N не залежним від функції f, а А.В.Бондаренко та А.В.Примак [1] – що оцінка (1) є невірною навіть з c та N залежними від f. Користуючись результатами роботи [1] ми поширюємо відповідне твердження на всі $s \ge 2$.

Основним результатом роботи є

ТЕОРЕМА 1. Нехай $q>3$, $r>2$, $s \ge 1$ та $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Для кожного набору $Y_s[a,b]$ існує функція

$$f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap W^r_{L_\infty[a,b]}$$

така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^r E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) = \infty .$$

Теорема 1 є негайним наслідком теорем 2 і 3.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $q>3$, $r<q$, $s \ge 2$ та $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Для кожного набору $Y_s[a,b]$ існує функція

$$f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap W^r_{L_\infty[a,b]} \tag{2}$$

така, що

$$E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) \ge \frac{c(q, Y_s)}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

де $c(q, Y_s)$ — додатня стала, що залежить тільки від q та Y_s.

ТЕОРЕМА 3. Для будь-яких $r, q \in \mathbf{N}$, $r \ge q-1$, $q \ge 4$ та послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap C^{(r)}[a,b]$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) n^{r-q+3} = +\infty \tag{4}$$

2. Доведення теорем.

Позначимо $E_n^{(q)}(f)_{[-1,1]} = E_n^{(q)}(f, Y_1[-1,1])$.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $y_1 = -1$, $b=1$. Покажемо, що шуканою фцнкцією є:

$$f(x) = \frac{(q-r-1)!}{(q-1)!} x_+^{q-1} .$$

Справді, оскільки $f^{(q-2)}(x) = (q-r-1)! x_+$, то $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$. Крім того, $\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]} = 1$, отже (2) виконується.

За теоремою 2 із [1] маємо: $E_n^{(q)}\left(x_+^{q-1}\right)_{[-1,1]} \ge \dfrac{c_1(q)}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$. Звідси $E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) \ge E_n^{(q)}\left(x_+^{q-1}\right)_{[-1,1]} \ge \dfrac{c_1(q)}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$.

Отже і (3) виконується.

Теорема 2 доведена.

Для доведення теореми 3 необхідна

ЛЕМА 1. [1] Для кожного $h \in (0,1)$, r,q таких, що $r \ge q-1$, $q \ge 4$, існують сталі $c_1, c_2 > 0$ та функція $f_h = f_{h,r,q} \in C^{(r)}[-2,1] \cap \Delta^q[-2,1]$, що задовольняють співвідношення

1) $|f_h|_{[-2,0]} = 0$,

2) $\left\|f_h^{(i)}\right\|_{C[-2,1]} \le \begin{cases} \dfrac{c}{h^{i-q+1}}, & i = q-1,...,r, \\ 1, & i = 0,...,q-2. \end{cases}$,

3) якщо $h \le \dfrac{c_2 l^{\frac{q-1}{2}}}{n}$, $l \in (0,1)$, $\theta \in \left(0, \dfrac{l}{3}\right)$, то $E_n^{(q)}\left(f_h(\cdot-\theta);[-l,l]\right) \ge \dfrac{c_1 l^{q-1}}{n^2}$, де $E_n^{(q)}\left(f_h(\cdot-\theta);[-l,l]\right)$ – величина найкращого q - опуклого наближення функції $f_h(\cdot-\theta)$ многочленами степені $\le n$ на відрізку $[-l,l]$.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 3. Розглянемо функцію $g(x) := \sum\limits_{k=2}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k)$,

де f_{h_k} – функція з леми 1, $h_k := \dfrac{1}{c_2 n_k n_{k-1}^{q-1}}$, $\beta_k := \dfrac{1}{n_{k+1}^m n_k^{m(q-1)+2}}$, $x_k := \dfrac{1}{n_k}$.

Не втрачаючи загальності будемо вважати $y_1 = -1$, $b = 1$. Покажемо, що шуканою функцією є

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \in [a,-1] \end{cases}.$$

Справді, за лемою 1, $f_{h_k}(\cdot - x_k) \in \Delta^q[-1,1] \cap C^{(r)}[-1,1]$ та $f_{h_k}(-1) = 0$, $j = \overline{0,r}$, тому також $g \in \Delta^q[-1,1] \cap C^{(r)}[-1,1]$ та $g^{(j)}(-1) = 0$, $j = \overline{0,r}$. Враховуючи, що $f(x) = 0$ при $x \in [a,-1]$, маємо $f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap C^{(r)}[a,b]$.

Нарешті маємо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s[a,b]) n^{r-q+3} \ge \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n E_n^{(q)}(g)_{[-1,1]} n^{r-q+3} = +\infty$, де остання рівність доведена в [1].

Отже (4) виконується.
Теорема 3 доведена.

ВИСНОВОК

В данній роботі ми розглянули питання про неможливість отримати класичну оцінку Джексона-Стєчкіна при q – опуклому наближенні многочленами з $q > 3$, $r > 2$, навіть із сталою, що залежить від функції. Точніше – встановлено, що замість очікуваної швидкості наближення n^{-r} можливою є не краще ніж n^{-r+q-3} .

1. *Бондаренко А.В., Примак А.В.* Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 812–823. 2. *Шведов А.С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 1. С. 117–130. 3. *Beatson R.K.* The Degree of Monotone Approximation // Pacific I. Math.1978. V.74. № 1. P. 5–14. 4. *Bondarenko A.V.* Jackson type inequality in 3-convex approximation. // East I. Approx. 2002. V. 8. №3. P. 291–302. 5. *Konovalov V.N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Israel I. Math. 2003. V. 133. P. 239–268 6. *Leviatan D., Shevchuk I.A.* Coconvex polynomial approximation. // I. Approx. Theory 2003. V. 121. № 1. P. 100–118. 7. *Leviatan D., Shevchuk I.A.* Constants in comonotone polynomial approximation // New developments in approximation theory. Dortman. 1998. P. 145–158. 8. *Lorentz G.G., Zeller K.L.* Degree of Approximation by Monotone Polynomials // I. Approx. Theory. 1968. V. 1. № 4. P. 501–504.

Надійшла до редколегії 28.10.08

УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, канд. фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution of non-stationary problems of heat conductivity in the limited piece-homogeneous space areas.

1. Вступ

Нестаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багатошарових) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [6,8,15,16]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [9-11, 13]. Зокрема в [11] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові та тришарові середовища розглянуто у працях [3-5,12]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

© А. Громик, І. Конет, 2009