2. Обчислюються спектральні коефіцієнти $b_k \quad (k = 0, 1, 2,..., N)$ для кореляційної функції, що моделюється за відповідною аналітичною формулою з таблиці, або за виразом для інтеграла (8) від кореляційної функції.

Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{ \zeta_k, \quad k = 0, 1, 2,..., N \}$ та $\{ \eta_k, \quad k = 0, 1, 2,..., N \}$.

3. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(\varphi) = \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\nu_k \, b_k} \ [\zeta_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi].$$

4. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції $B_N(\varphi)$ по отриманій реалізації випадкового процесу $\xi(\varphi)$ (наприклад, за допомогою пакета Statistica) і порівнюється із заданою кореляційною функцією $B(\varphi)$), а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гауссівським.

За допомогою методів статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів вирішена проблема з генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера, коли їх неможливо отримати на практиці із заданою детальністю в деяких ділянках. Наведений спосіб моделювання дозволяє із вказаною точністю генерувати значення даних, яких не вистачає, при умові, що результати вимірювань мають властивість стаціонарності, або коли їх можна звести до стаціонарної та детермінованої складових.

3. Висновки

Отримано спектральні коефіцієнти у вигляді аналітичних формул для деяких основних практично важливих кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів, а також наведено спосіб їх обчислення засобами пакета програм MathCad у випадку, коли такі аналітичні формули знайти не вдається. Наведено модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів з використанням цих коефіцієнтів. За допомогою розробленого методу вирішена проблема генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера.Це дає можливість із значною економією затрат отримати карти високої кондиційності та проводити дослідження на виявлення магнітних аномалій.

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматиз, 1961, 936 с 2. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2003. – Вип.10. – С.85-91. 3. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка.- 2004. – Вип. 11-12. – С.20-24. 4. Вижва З.О. Математичні моделі в природознавстві. Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про Землю. Навчальний посібник з дисципліни "Математичні моделі в природознавстві" для студентів мех.-мат. ф.-ту/ К.: ВГЛ "Обрії", 2007, 160 с. 5. Вижва З.О., Зражевський О.Г. Про статистичне моделювання випадкових полів на площині //Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2008. – Вип.19-20. – С. 43 – 47. 44. 6. Вижва З.О., Вижва А. С., Демидов В.К. Статистичне моделювання випадкових процесів та двовимірних полів в аеромагнітометрії // Вісн. Київ. ун-ту. Геологія. – 2010. – Вип.17. – С.57-59. 7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979 – 408 с.. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971. 8. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 280 с. 9. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К., 1980. 10. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto, 1999, 695 p.

Надійшла до редколегії 24.11.09

УДК 519.21

А. Мороз, асп., Г. Шевченко, канд. фіз.-мат. наук

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ФУНКЦІЇ ВАРТОСТІ АМЕРИКАНСЬКОГО ОПЦІОНУ У МОДЕЛІ ЛЕВІ ПРИ НЕОБМЕЖЕНОМУ РОЗШИРЕННІ ЧАСОВОГО ІНТЕРВАЛУ

У роботі розглянуто функцію вартості $V_T(x)$ Американського опціону у моделі Леві на обмеженому інтервалі, і доведено, що вона збігається до функції вартості $V(x)$ на необмеженому інтервалі. Досліджено швидкість цієї збіжності, і показано, що у випадку, коли момент оптимальної зупинки платіжного зобов'язання є першим моментом досягнення ціновим процесом деякого рівня, швидкість збіжності $V_T(x) \to V(x)$, $T \to \infty$ не менша за експоненційну.

The value function $V_T(x)$ for an American type perpetual contingent claim is considered in a finite interval Lévy model, and it is shown that it converges to the corresponding value function $V(x)$ in the infinite interval model. We consider the rate of this convergence and show that in the case when the optimal stopping time is the first time of crossing a certain level, the rate of convergence $V_T(x) \to V(x)$ is not worse than exponential.

1. Вступ

У даній роботі досліджуються функції вартості для задачі оптимальної зупинки платіжного зобов'язання американського типу на скінченному часовому інтервалі. Для випадку нескінченного горизонту часто вдається повністю описати структуру цін опціонів американського типу і відповідних областей зупинки та продовження спостережень. Ситуація ускладнюється, коли часовий параметр належить обмеженому часовому інтервалу.

Ми розглядаємо безарбітражний ринок з єдиним безризиковим активом та сталою безризиковою відсотковою ставкою, яка дорівнює $q \geq 0$, у випадку дискретного або неперервного часу. Нехай $\{X_t, t \in T\}$ – процес з незалежними приростами, що моделює ціновий процес цього активу, $T = \mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,...\}$ або $T = \mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, $X_0 = x \in \mathbf{R} = (-\infty,\infty)$, $\{X_t, t \in T\}$ визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ з натуральною фільтрацією $\Im_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, $\Im_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Задача оптимальної реалізації довічного платіжного зобов'язання американського типу з функцією виплат $g(x)$ формулюється так [1,4]: максимізувати очікувану дисконтовану виплату $\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$ у класі М всіх марковських моментів τ відносно $(\Im_t)$ зі значеннями в $[0,\infty]$. Іншими словами, задача полягає у відшуканні функції "вартості"

$$V(x)=\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0. \tag{1}$$

Оптимальним називатимемо такий момент зупинки τ^*, для якого

$$V(x)=\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\}),\ x\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

У даній роботі ми доводимо, що за певних умов функцію вартості на обмеженому проміжку [0,T], яка має вигляд

$$V_T(x)=\sup_{\tau\in M,\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{3}$$

можна наблизити функцією вартості $V(x)$, і даємо оцінку швидкості збіжності $V_T(x)$ до $V(x)$ у випадку, коли оптимальний момент зупинки має вигляд

$$\tau^*=\tau_a=\inf\{t\ge 0: X_t\ge a\}, \tag{4}$$

де оптимальне значення параметра a залежить від вигляду функції $g(x)$.

2. Збіжність функції вартості на обмеженому часовому проміжку до $V(x)$

Нехай $\{X_t, t\in T\}$ – однорідний процес з незалежними приростами, всі моменти якого скінченні і $X_0=0$, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,P)$ з натуральною фільтрацією $\Im_t=\sigma\{X_s, s\le t\}$, $\Im_0=\{\varnothing,\Omega\}$. Розглядаємо одночасно з функцією вартості

$$V(x)=\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{5}$$

наступну функцію:

$$V_T(x)=\sup_{\tau\in M_T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{6}$$

де $g(x)$ – вимірна функція, M, M_T – класи усіх марківських моментів зі значеннями відповідно в $[0,\infty]$ і $[0,T]$ відносно $(\Im_t)$.

Нехай τ^* – оптимальний момент зупинки,

$$V(x)=\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\}),\ x\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

У [1] показано, що для функції виплат $g(x)=(x^+)^\upsilon=(\max(x,0))^\upsilon$ момент оптимальної зупинки τ^* є першим моментом виходу на деякий рівень a, який було знайдено у явному вигляді. Аналогічний результат для функції виплат $g(x)=(1-e^{-x})^+$ було одержано в [3].

Доведемо тепер, що за певних припущень має місце збіжність

$$V_T(x)\to V(x),\quad T\to\infty, \tag{8}$$

і з'ясуємо, з якою швидкістю $V_T(x)\to V(x)$, $T\to\infty$ у випадку, коли τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень.

Надалі нам знадобиться наступна теорема [8].

Теорема (Нерівність Буркхольдера–Ганді–Девіса). Якщо $(X_t,\Im_t)$ – мартингал, то для довільного $1\le p<\infty$ існують такі сталі $c(p), C(p)$, що для всіх скінченних марківських моментів T виконується:

$$\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t^p\right|^{1/p}\le c(p)(\mathbf{E}\left|[X,X]_T^{p/2}\right|)^{1/p}\le C(p)(\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t^p\right|)^{1/p}, \tag{9}$$

де $[X,X]_t=X_t^2-\int X_{t-}dX_t$ – квадратична варіація процесу X_t, $X_{t-}=\lim_{s\uparrow t}X_s$, $X_{0-}=X_0=0$.

Доведемо спочатку допоміжну лему:

Лема 1. Нехай X_t – процес Леві, всі моменти якого скінченні і $X_0=0$. Тоді для всіх $\alpha>0$ має місце нерівність:

$$\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t\right|^\alpha\le c(\alpha)T^\alpha\vee T \tag{10}$$

для всіх $T\ge 0$, де $a\vee b$ – максимум чисел a і b.

Доведення: Запишемо розклад Леві–Іто для процесу X_t:

$$X_t=at+\sigma W_t+\int_0^t\int_{\{|x|\le 1\}}x(\mu-\lambda\otimes\nu)(ds,dx)+\int_0^t\int_{\{|x|>1\}}x\mu(ds,dx), \tag{11}$$

де λ – міра Лебега, μ – пуассонівська міра на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $\mu = \sum_{t \ge 0} \varepsilon_{(t, \Delta X_t)} \mathbf{I}\{\Delta X_t \ne 0\}$, ε_z – міра Дірака, ν – міра Леві процесу X_t.

Має місце наступний ряд нерівностей:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|X_t\right|^\alpha \le \mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}(at + \int_0^t \int_{\{|x|\le1\}} x(\mu - \lambda\otimes\nu)(ds,dx) + \int_0^t \int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds,dx))\right|^\alpha + \sigma\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} W_t\right|^\alpha. \quad (12)$$

Оцінимо спочатку $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} W_t\right|^\alpha$. Оскільки $P(\sup_{s\le T}|W_s| \ge y) \le 2P(\sup_{s\le T} W_s \ge y) = 4P(W_t \ge y) = 2P(|W_t| \ge y)$ та $\mathbf{E}|W_t|^\alpha = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}+1} t^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція, то справедлива наступна нерівність:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}|W_t|^\alpha \le h(\alpha) t^{\frac{\alpha}{2}} \le h(\alpha) T^{\frac{\alpha}{2}} \vee T$$

для деякого $h(\alpha) \in R$.

Перейдемо тепер до оцінки другого доданку у правій частині (12). Розглянемо процес

$$Y_t = at + \int_0^t \int_{\{|x|\le1\}} x(\mu - \lambda\otimes\nu)(ds,dx) + \int_0^t \int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds,dx)).$$

Для нього справджується:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|Y_t\right|^\alpha = \mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|(Y_t - t\mathbf{E}Y_1) + t\mathbf{E}Y_1\right|^\alpha \le \gamma_1(\alpha)T^\alpha + \gamma_2(\alpha)\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|Y_t - t\mathbf{E}Y_1\right|^\alpha.$$

Розглянемо окремо випадки, коли $\alpha < 1,\ 1 \le \alpha < 2$ і $\alpha > 2$. Так як Y_t –процес з незалежними приростами, то $M_t = Y_t - t\mathbf{E}Y_1 = \int_0^t \int x(\mu - \lambda\otimes\nu)(ds,dx)$ – мартингал, і для нього справедлива нерівність Буркхольдера–Ганді–Девіса. Для випадків $\alpha < 1,\ 1 \le \alpha < 2$, як показано в [9], виконується:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^\alpha \le c(\alpha)T, \quad (13)$$

і $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} X_t\right|^\alpha \le c(\alpha)T^\alpha \vee T.$

Для $\alpha > 2$ в [9] було доведено, що

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^\alpha \le c(\alpha)T \text{ для всіх } T\in[0,1]. \quad (14)$$

Нехай тепер $T \ge 1$. Будемо позначати $[t],\ \{t\}$ — відповідно цілу і дробову частину t. Тоді завдяки однорідності приростів процесу X_t, існують такі дійсні сталі $c_1(\alpha),\ c_2(\alpha),\ c_3(\alpha)$, для яких виконано:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^\alpha = \mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|(M_t - M_{[t]}) + (M[_{[t]} - M_{[t-1]}) + \ldots + (M_1 - M_0)\right|^\alpha \le$$

$$\le c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t - M_{[t]}\right|^\alpha + \sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\left|M_k - M_{k-1}\right|^\alpha\right) \le$$

$$\le c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\sup_{k-1\le t\le k}\left|M_t - M_{[t]}\right|^\alpha + c_2(\alpha)T\right) = c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\sup_{0\le t\le 1}\left|M_t\right|^\alpha + c_2(\alpha)T\right) \le c_3(\alpha)T^\alpha.$$

Остаточно, в цьому випадку маємо $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} X_t\right|^\alpha \le c(\alpha)T^\alpha \vee T.$

Таким чином, лему доведено.

Теорема 1. Нехай $V_T(x) = \sup_{\tau\in M, \tau<T} \mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$, $x\in\mathbf{R},\ \ q\ge0$, існують такі сталі $c_1, c_2 > 0$, $\alpha > 0$, що

$$g(x) \le c_1|x|^\alpha + c_2,$$

і оптимальний момент зупинки τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень *а:*

$$\tau^* = \tau_a = \inf\{t \ge 0 : X_t \ge a\}.$$

Тоді $V_T(x) \to V(x)$, $T\to\infty,$ і існує невід'ємна константа c^*, така що

$$|V_T(x) - V(x)| \le c^* e^{-qT},\ \ T\to\infty.$$

Доведення. Запишемо наступний ряд нерівностей:

$$\begin{aligned}&\left|\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})-\sup_{\tau\in M,0<\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})\right|\le\\&\le\left|\mathbf{E}(g(X_{\tau^*\wedge T})e^{-q\tau^*\wedge T})-\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\})\right|=\\&=\left|\mathbf{E}\left(g(X_T)e^{-qT}-g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\right)\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|\le\\&\le\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|+\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|.\end{aligned}\tag{15}$$

Введемо позначення: $\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|=E_1$, $\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=E_2$.

Оскільки τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень a, то при виконанні умови $g(x)\le c_1|x|^\alpha+c_2$, мають місце нерівності:

$$E_1\le|g(a)|e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\})=c_1e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\}),$$
$$E_2\le c_2e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\}),$$

Звідки $E_1+E_2\le c^*e^{-qT}\to 0, T\to\infty,$ де c_1,c_2, c^* –деякі сталі.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли τ^* не є моментом виходу цінового процесу на деякий рівень.

Теорема 2. Нехай $V_T(x)=\sup_{\tau\in M,\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$, $x\in\mathbf{R}, q\ge 0$, і існують сталі $c_1,c_2>0$, $\alpha>0$, такі, що

$$g(x)\le c_1|x|^\alpha+c_2.$$

Тоді $V_T(x)\to V(x)$, $T\to\infty$.

Доведення. Так само, як і при доведенні теореми 1, запишемо нерівності:

$$\begin{aligned}&\left|\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})-\sup_{\tau\in M,0<\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})\right|\le\\&\le\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|+\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|.\end{aligned}\tag{16}$$

Введемо позначення:

$$\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=E_1,\quad \mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|=E_2.$$

Покажемо спочатку, що $E_1\to 0,\ \ T\to\infty$.

Очевидно, у випадку дискретного часу,

$$E_1=\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}\left|g(X_t)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\right|\le\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}(c_1\left|X_t\right|^\alpha+c_2)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\to 0,\ \ T\to\infty,$$

як хвіст збіжного ряду. Дійсно,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left|X_t\right|^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}=\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{t}\Delta X_k\right|^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\le\hat{c}(\alpha)t^\alpha\mathbf{E}\sum_{k=0}^{t}(\Delta X_k)^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}=\\&=\hat{c}(\alpha)t^\alpha\sum_{k=0}^{t}\mathbf{E}(\Delta X_k)^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\le\hat{c}(\alpha)t^{\alpha+1}e^{-qt}\end{aligned}$$

в силу однорідності процесу X_t і незалежності його приростів, і тому відповідний ряд збігається.

У випадку неперервного часу, має місце наступна нерівність:

$$E_1=\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|\le\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}\sup_{\zeta\in[t,t+1]}(c_1\left|X_\zeta\right|^\alpha+c_2)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}.\tag{17}$$

Згідно з лемою 1:

$$\mathbf{E}\sup_{\zeta\in[t,t+1]}\left|X_\zeta\right|^\alpha\le\mathbf{E}\sup_{\zeta\le t+1}\left|X_\zeta\right|^\alpha\le\gamma_1(\alpha)(t+1)^\alpha\vee(t+1),$$

де γ_1 – деяка стала.

Отже, $E_1\to 0, T\to\infty$, як хвіст збіжного ряду.

Аналогічно, можна довести, що $E_2\to 0,\ \ T\to\infty.$

Як для дискретного, так і для неперервного часу маємо :

$$E_2=\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|\le(c_1\mathbf{E}\left|X_T\right|^\alpha+c_2)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\le c_3(\alpha)\left(T^\alpha\vee T+1\right)\cdot e^{-qT}\to 0,\ \ T\to\infty.$$

Таким чином, ми показали,що $E_1 + E_2 \to 0,\ \ T \to \infty$.

Теорему 2 доведено.

3. Висновки

Розглянуто задачу оптимальної зупинки процесів із незалежними приростами і доведено, що в умовах безарбітражного ринку функцію вартості на скінченному інтервалі можна при виконанні певних умов наблизити функцією вартості на нескінченному інтервалі. Отримано оцінку швидкості цієї збіжності і показано, що у випадку, коли оптимальний момент зупинки є моментом першого виходу цінового процесу на деякий рівень, швидкість збіжності не менша за експоненційну.

1. *Новиков А., Ширяев А.* Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий// Теория вероятности и применения. – 2004. – 373–382; 2. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математки.– М., 2004; 3. *Шевченко Г.М., Мороз А.Г.* Задача оптимальної зупинки для процесів з незалежними приростами// Український математичний вісник. – 2009. – Том 6. – №1. – 126–134; 4. *Novikov A., Shiryaev A.* On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments// An International journal of Probability and Stochastic processes.– 2007.– Vol. 79.– 393–406; 5. *Schoutens W.* Stochastic processes and orthogonal polynomials.– New–York, 2000; 6. *Darling A., Ligget T., Taylor H.* Optimal stopping for partial sums// The Annals of mathematical statistics. – 1972.– №43.– 1363–1368; 7. *Kyprianou A.* On the Novikov–Shiryaev optimal stopping problem in continuous time// Elect. Comm. In Probability. – 2005.– №10. – 146–154; *8. Protter P.E.* Stochastic integration and differential equations. – Springer. – 2004; *9. Harald Luschgy* Moment estimates for Levy processes// Elect. Comm. In Probab. – 2008. – 13. – 422–434.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 532.595

О. Лимарченко, І. Семенова

СОВМЕСТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ СИЛОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

На основі варіаційного алгоритму розглянуто задачу динаміки сумісного руху обмеженого об'єму рідини і резервуару параболічної форми. Досліджено хвильові рухи рідини і рух резервуару. Показано необхідність включення достатньо великої кількості форм коливань рідини в модель.

On the basis of variational algorithm we consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of parabolic shape. Wave motion of liquid and reservoir motion were investigated. The necessity of entraining of sufficiently great number of liquid oscillation modes into model was shown.

1. Вступ

Розглянемо задачу про перехідні процеси при сумісному русі параболічного резервуару і рідини з вільною поверхнею. Припускаємо, що рідина ідеальна однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей.

Відомо, що такі задачі є актуальними і активно досліджуються в останні роки. Насамперед слід відзначити праці Г.С. Нариманова, Б.І. Рабиновича, Л.В. Докучаева, І.О. Луковського, Дж. Майлса, Г. Бауера та інших авторов, включених до оглядів [2, 4-6]. Основну увагу в цих працях приділялося бакам циліндричної форми. Дослідження показали високу ефективність варіаційних методів для таких задач. Вивчення динаміки рідини з вільною поверхнею в нециліндричних баках проводилося в працях Г. Бауера, І.О. Луковського, О.С. Лимарченка, де було зосереджено увагу на необхідності введення недекартової параметризації і складності виконання умов розв'язності задачі. В той же час дотепер задачі про рух резервуарів нециліндричної форми з рідиною є мало дослідженими особливо у випадку сумісного руху системи.

Метою роботи є розробка ефективної нелінійної динамічної моделі системи резервуар параболічної форми – рідина з вільною поверхнею і її апробація на прикладі задачі про хвильовий рух рідини з вільною поверхнею при її сумісному русі з резервуаром, викликаним силовим імпульсним збудженням системи.

2. Метод дослідження

Будемо описувати рух рідини в системі координат, незмінно пов'язаною з резервуаром. Нехай φ – потенціал швидкостей; τ – область, яку займає рідина (τ_0 – незбурена область); $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – зовнішня норрмаль до поверхні; S_0 і S – відповідно незбурена та збурена вільні поверхні рідини; Σ і Σ_0 – збурена і незбурена змочувані границі області τ ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\eta(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні руху, U – потенціальна енергія зовнішніх сил. Припускаємо рух резервуару поступальним і опишемо його вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$.

Для опису руху рідини аналогічно роботам [1, 2, 4, 5] вводимо недекартову параметризацію області рідини τ: $\alpha = \dfrac{r}{f(z)}$; $\beta = \dfrac{z}{H}$. Тут через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної порожнини, яке задано в циліндричній системі координат r, θ, z; H – глибина заповнення рідини. Приймаємо що z=0 відповідає незбуреній вільній поверхні рідини S_0 . Центр системи координат знаходиться в центрі незбуреної поверхні рідини, вісь *Oz* направлена вгору. Система