Теорема 2. *Нехай стаціонарні послідовності* $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ *є регулярними,* $\int_0^h |a(s)|\,ds < \infty$. *Тоді оптимальна у середньому квадратичному сенсі лінійна оцінка* $\hat{A}(t,h)$ *значення функціонала* $A(t,h)$ *у момент часу* $t>0$ *від стаціонарного процесу* $\{X_t : t\in R\}$ *за спостереженнями* $\{\dots, X_{-2}+Y_{-2}, X_{-1}+Y_{-1}\}$ *задається у вигляді*

$$\hat{A}(t,h)=\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\varphi}_{t,h}(\mu)(Z_X+Z_Y)(d\mu),\quad \hat{\varphi}_{t,h}(\mu)=\frac{[S(t,h,\mu)]_-}{F(\mu,0)+G(\mu,0)}.$$

Середньоквадратична похибка прогнозу визначається з (4).

Приклад 2. Розглянемо спектральну щільність з прикладу 1. Знайдемо прогноз значення функціоналів

$$A_1(t,h)=\int_t^{t+h}X_s ds,\quad h>0, t>0,\quad A_2(t,h)=\int_t^{t+h}X_s e^{-(s-t)}ds,\quad h>0,t>0.$$

Зі співвідношення (3) отримаємо $[S_1(t,h,\mu)]_- = \int_t^{t+h}[F(\mu,s)]_- ds$, $[S_2(t,h,\mu)]_- = \int_t^{t+h}[F(\mu,s)]_- e^{-(t-s)}ds$,

$$\hat{A}_1(t,h)=\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\varphi}^1_{t,h}(\mu)(Z_X+Z_Y)(d\mu),\quad \hat{\varphi}^1_{t,h}(\mu)=\frac{\int_t^{t+h}[F(\mu,s)]_- ds}{F(\mu,0)+G(\mu,0)},$$

$$\hat{A}_2(t,h)=\int_{-\pi}^{\pi}\hat{\varphi}^2_{t,h}(\mu)(Z_X+Z_Y)(d\mu),\quad \hat{\varphi}^2_{t,h}(\mu)=\frac{\int_t^{t+h}[F(\mu,s)]_- e^{t-s} ds}{F(\mu,0)+G(\mu,0)},$$

Тут використано функції $F(\mu,t)$, $F(\mu,0)$, що знайдені в прикладі 1, $G(\mu,0)=\frac{1}{2\pi}$.

4. Висновки

Отримано оптимальні в середньоквадратичному сенсі лінійні прогнози значенння X_t, $t>0$, стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу та функціонала

$$A(t,h)=\int_t^{t+h}X_s a(s-t)ds,\quad h>0,t>0.$$

за спостереженнями з забрудненням у дискретні моменти часу.

1. *Карташов М. В.* Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К.: ВПЦ "Київський ун-тет", 2008. – 494 с. 2. *Ширяев А. Н.* Вероятность: В 2-х кн. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2010 р.

УДК 519.21

В. Радченко, д-р фіз.-мат. наук, Д. Городня, асп.

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ ІЗ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

Розглядаються хвильові рівняння, що мають постійні коефіцієнти і містять доданок, заданий інтегралом із стохастичною мірою. Наведено розв'язки цих рівнянь.

We consider wave equations having constant coefficients and also a term given by integral with respect to a stochastic measure. Solutions of the considered equations are presented.

1. Вступ

У [3] досліджено питання про існування та єдиність розв'язків задачі Коші для хвильового рівняння, яке містить доданок, заданий інтегралом із стохастичною мірою, у випадку однієї просторової змінної (при $d=1$). Мета цієї статті – довести існування розв'язків задач Коші для таких хвильових рівнянь при $d=2,3$. Про застосування таких рівнянь також див. [3] та наведені там посилання.

2. Необхідні теоретичні відомості

Нехай (Ω, F, P) – повний імовірнісний простір; L_0 – множина всіх випадкових величин на (Ω, F, P), які розглядаються з точністю до P-еквівалентності; збіжність в L_0 – це збіжність за ймовірністю. Нехай $D=D(R^d)$ – простір основних функцій з компактним носієм (див., наприклад, [1, с. 85]).

Означення 1 [3]. Узагальненою випадковою функцією (у. в. ф.) називається неперервне відображення $\xi : D\to L_0$.

Набір усіх у. в. ф. позначатимемо $D'_r = D'_r(R^d)$. Нехай $\mathrm{B}=\mathrm{B}(R^d)$ – σ-алгебра борельових множин простору R^d.

© Радченко В., Городня Д., 2011

Означення 2 [3]. Стохастичною мірою називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathrm{B} \to L_0$.

У [2] вивчаються властивості стохастичних мір, а також визначається та досліджується інтеграл вигляду $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathrm{B}$, f – дійсна вимірна функція. Наведемо формулювання встановлених в [2, 3] тверджень щодо властивостей цього інтеграла, які використовуються у подальшому.

Нехай $L(A, \mu)$ позначає набір функцій, інтегровних по множині $A \in \mathrm{B}$ за стохастичною мірою μ.

Теорема 1. Якщо $A \in \mathrm{B}, f : A \to R$ – вимірна і обмежена на A функція, то $f \in L(A, \mu)$.

Теорема 2 (аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [2])). Нехай $\{g; f_n : n \geq 1\}$ такий набір функцій з $L(A, \mu)$, що:

1) $\forall n \geq 1 \forall x \in A : |f_n(x)| \leq g(x);$

2) $f_n \to f$ поточково на A.

Тоді $f \in L(A, \mu)$ і $\int\limits_A f_n d\mu \xrightarrow{P} \int\limits_A f d\mu$.

Теорема 3 (про диференціювання інтеграла за параметром (див. лему 5 [3])). Нехай λ – стохастична міра і функція $h : R^d \times (a,b) \to R$ задовольняє такі умови:

1) $\forall t \in (a,b) : h(\cdot, t) \in L(R^d, \lambda);$

2) для кожного фіксованого $x \in R^d$ існує $\dfrac{\partial h(x, \cdot)}{\partial t}$ на (a,b);

3) $\exists g \in L(R^d, \lambda)\ \forall (x,t) \in R^d \times (a,b) : \left|\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x).$

Тоді для процесу $\eta(t) = \int\limits_{R^d} h(x,t) d\lambda(x),\ t \in (a,b)$ існує похідна в кожній точці інтервалу (a,b), причому

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \int\limits_{R^d} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} d\lambda(x),\ t \in (a,b).$$

Тут похідна від випадкового процесу $\eta : (a,b) \to L_0$ розглядається у сенсі збіжності за ймовірністю.

Стохастична міра λ визначає у. в. ф. $\dot{\lambda}$ за правилом $(\dot{\lambda}, \phi) = \int\limits_{R^d} \phi(x) d\lambda(x),\ \phi \in D,$ (див. формулу (4) [3]).

3. Основні результати

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x V_t + f\dot{\mu},\ t > 0, \quad \left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0+} = \dot{\zeta}, \quad V_t\big|_{t=0+} = \dot{\nu}, \tag{1}$$

для невідомого процесу $V_t, t > 0,$ що набуває значення в D_r'. Тут Δ – оператор Лапласа, μ, ν, ζ – стохастичні міри, $(f\dot{\mu}, \varphi) = \int\limits_{R^d} f(x,t)\varphi(x) d\mu(x),\ \varphi \in D,\ \ a \in R,\ a > 0,\ \ f(x,t)$ – вимірна дійсна функція, визначена на $[0, \infty) \times R^d$, яка при кожному фіксованому $x \in R^d$ належить класу $C^2((0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$. Також припускається, що функції $f(x,t)$, $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f^2(x,t)}{\partial t^2}$ обмежені на $R^d \times (0, \infty)$.

Процес $V_t, t > 0,$ будемо називати розв'язком задачі Коші (1), якщо для кожного $\phi \in D$:

$$\frac{d^2(V_t, \phi)}{dt^2} = a^2(V_t, \Delta\phi) + \int\limits_{R^d} f(x,t)\phi(x) d\mu(x),\ t > 0,$$

$$P - \lim_{t \to 0+} \frac{d(V_t, \phi)}{dt} = \int\limits_{R^d} \phi(x) d\zeta(x),\ \ P - \lim_{t \to 0+} (V_t, \phi) = \int\limits_{R^d} \phi(x) d\nu(x).$$

Для випадку $d = 2$ розв'язок задачі Коші (1) будується за допомогою формули Пуассона [1, с. 226] наступним чином. Використаємо позначення з [1] і покладемо при $\phi \in D$

$$r_1(y,t,\phi) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int\limits_{U(y, a(t-\tau))} \frac{f(y,\tau)\phi(\xi) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |y-\xi|^2}},$$

$$r_2(y,t,\phi) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{U(y,at)} \frac{\phi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |y-\xi|^2}},\ \ r_3(y,t,\phi) = \frac{\partial r_2(y,t,\phi)}{\partial t}.$$

Теорема 4. При $d=2$ випадковий процес

$$(V_t,\phi)=\int_{R^2} r_1(y,t,\phi)d\mu(y)+\int_{R^2} r_2(y,t,\phi)d\zeta(y)+\int_{R^2} r_3(y,t,\phi)d\nu(y),\ \phi\in D,$$

є розв'язком задачі Коші (1).

Якщо $d=3$, то для побудови розв'язку задачі Коші (1) використовується формула Кірхгофа [1, с. 226]. А саме, покладемо при $\phi\in D$

$$w_1(y,t,\phi)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{U(y,at)}\frac{f(y,t-\left|\frac{y-\xi}{a}\right|)\phi(\xi)d\xi}{|y-\xi|},\quad w_2(y,t,\phi)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S(y,at)}\phi(\xi)dS,\quad w_3(y,t,\phi)=\frac{\partial w_2(y,t,\phi)}{\partial t}.$$

Теорема 5. При $d=3$ випадковий процес

$$(V_t,\phi)=\int_{R^3} w_1(y,t,\phi)d\mu(y)+\int_{R^3} w_2(y,t,\phi)d\zeta(y)+\int_{R^3} w_3(y,t,\phi)d\nu(y),\ \phi\in D,$$

є розв'язком задачі Коші (1).

Доведення теореми 4. Згідно з [1, с. 226] при фіксованому $\phi\in D$ функція r_3 є класичним розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=a^2\Delta_y r,\ r|_{t=0}=\phi(y),\ \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (2)$$

Оскільки $r_3(y,t,\phi)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{U_1}\frac{\phi(y+at\eta)d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{U_1}\frac{\phi d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}}+\frac{t}{2\pi}\int_{U_1}\frac{(a\eta_1\phi_1'+a\eta_2\phi_2')d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}}$, де $\eta=(\eta_1,\eta_2)$, то з урахуванням фінітності ϕ $\exists c_{\phi,1}>0\ \forall(y,t)\in R^2\times(0,1]:|r_3(y,t,\phi)|\le c_{\phi,1}$.

Тому внаслідок (2) та аналога теореми Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_{R^2} r_3(y,t,\varphi)d\nu(y)\xrightarrow{P}\int_{R^2}\varphi(y)d\nu(y),\ t\to 0+. \qquad (3)$$

Використавши теорему про диференціювання інтеграла за параметром, аналогічно до (3) можна переконатися, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{R^2} r_3(y,t,\phi)d\nu(y)\right)=\int_{R^2}\frac{\partial r_3(y,t,\phi)}{\partial t}\partial\nu(y)\xrightarrow{P}0,\ t\to 0+, \qquad (4)$$

а також, з урахуванням (2),

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{R^2} r_3(y,t,\phi)d\nu(y)\right)&=\int_{R^2}\frac{\partial^2 r_3(y,t,\phi)}{\partial t^2}d\nu(y)=\\ &=a^2\int_{R^2}\Delta_y r_3(y,t,\phi)d\nu(y)=\int_{R^2}\left(a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{U_1}\frac{\Delta_y\phi(y+at\eta)d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\right)\right)d\nu(y).\end{aligned} \qquad (5)$$

Внаслідок (3) – (5) процес $\int_{R^2} r_3(y,t,\phi)d\nu(y)$, $\phi\in D,$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}=a^2\Delta_x V_t,\ t>0,\ \left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0+}=0,\ V_t|_{t=0+}=\dot{\nu}. \qquad (6)$$

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що процес $\int_{R^2} r_2(y,t,\phi)d\zeta(y),\ \phi\in D,$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}=a^2\Delta_x V_t,\ t>0,\ \left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0+}=\dot{\zeta},\quad V_t|_{t=0+}=0. \qquad (7)$$

Відзначимо тепер, що згідно [1, с. 226] при кожному фіксованому $y\in R^2$ задача Коші

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\Delta_x u(x,t)+f(y,t)\phi(x),\ t>0,\ u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

має класичний розв'язок

$$u_y(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{U(x,a(t-\tau))}\frac{f(y,\tau)\phi(\xi)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}=\frac{t^2}{2\pi}\int_0^1\int_{U_\alpha}\frac{f(y,t-\alpha t)\phi(x+at\eta)d\eta d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-|\eta|^2}}.$$

Тут $U_\alpha=\{x\in R^2\,\big|\,|x|\le\alpha\}$. Тому при $x=y$ і фіксованому $\phi\in D$ дістанемо

$$\frac{\partial^2 r_1(y,t,\phi)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_y(y,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{t^2}{2\pi}\int_0^1\int_{U_\alpha}\frac{f(y,t-\alpha t)(\phi_{11}(y+at\eta)+\phi_{22}(y+at\eta))d\eta d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-|\eta|^2}}+f(y,t)\phi(y),$$

і, аналогічно до (6) можна переконатися, що $\int_{R^2} r_1(y,t,\phi)d\mu(t),\ \ t>0,$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x V_t + f\dot{\mu},\ t>0,\quad \left.\frac{\partial V_t}{\partial t}\right|_{t=0+} = V_t\big|_{t=0+} = 0. \tag{8}$$

Залишилось зауважити, що сума розв'язків задач (6) – (8) є розв'язком задачі Коші (1) при $d=2$.

Теорему 4 доведено.

Доведення теореми 5 проводиться аналогічно, якщо врахувати, що

$$w_2(y,t,\phi) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \phi(y_1 + at\cos\psi\sin\theta, y_2 + at\sin\psi\sin\theta, y_3 + at\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$w_1(y,t,\phi) = \frac{t^2}{4\pi}\int_{U_1} \frac{f(y,t(1-|\eta|))\phi(y-at\eta)d\eta}{|\eta|}.$$

4. Висновок

У статті за допомогою формули Пуассона при $d=2$ та формули Кірхгофа при $d=3$ побудовано розв'язки задачі Коші для хвильових рівнянь із стохастичними мірами. Для доведення основних результатів суттєво використовуються властивості розв'язків спеціально підібраних задач Коші для відповідних детермінованих хвильових рівнянь.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М., 1981. 2. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам – К., 1999. 3. *Радченко В. Н.* Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1675–1685.

Надійшла до редколегії 10.11.2010 р.

УДК 519.21

О. Стецюк, асп.

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА З ВИПАДКОВИМ ЗБУРЕННЯМ

Досліджується поведінка при $t \to \infty$ математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора без тертя при випадковому зовнішньому збуренні пуассонівським процесом.

The behavior of the mean of the oscillator without friction as $t \to \infty$ is studied in the case when the oscillator is being effected perturbed by a Poisson process.

1. Вступ

Під гармонічним осцилятором без тертя розуміють тіло маси 1, рух якого описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t) + k^2 u(t) = q(t),\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{1}$$

де $q(t)$ – зовнішня збурна сила; u_0, $\dot{u}_0$ – початкове положення і початкова швидкість осцилятора; $u(t)$, $\dot{u}(t)$ – положення і швидкість осцилятора в момент часу $t>0$; $k>0$ – параметр осцилятора (характеризує жорсткість пружини осцилятора); $E(t) = \frac{1}{2}[\dot{u}^2(t) + k^2u^2(t)]$ – повна енергія осцилятора.

У детермінованому випадку [5], коли зовнішня збурююча сила в системі (1) $q(t)$ невипадкова неперервно – диференційовна і періодична з періодом $2l$ функція, відомо,що:

1) повна енергія $E(t) \le C < \infty$ для всіх $t \ge 0$, якщо $k \ne n\pi/l$ при всіх $n = 1,2,\ldots$;

2) $E(t) \sim t^2$ при $t \to \infty$, якщо існує таке n_0, що $k = n_0\pi/l$ і $\int_{-l}^{l} q(t)\cos\frac{n_0\pi}{l}tdt$ та $\int_{-l}^{l} q(t)\sin\frac{n_0\pi}{l}tdt$ одночасно не рівні нулю.

Модель гармонічного осцилятора з неперервним випадковим збуренням, у якому $ME(t) \sim t^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$, при $t \to \infty$, розглядалась у роботі [6], а випадок $ME(t) \sim t^{\alpha}$, $\alpha > 1/2$, – у [1,4].

У даній статті досліджується поведінка з часом ($t \to \infty$) математичного сподівання повної енергії осцилятора з випадковим зовнішнім збуренням пуассонівським процесом, тобто осцилятора вигляду

$$\ddot{u}(t) + k^2 u(t) = \xi(t)(a\sin\alpha t + b\cos\beta t),\ t>0,\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \tag{2}$$

де $\xi(t)$ – пуассонівський процес.

Відомо [2], що пуассонівський процес з ймовірністю 1 має розривні траєкторії ($\xi(0) = 0$). Оскільки траєкторії процесу $\xi(t)$ розривні, то для збереження явного вигляду запису розв'язку $u(t)$ через праву частину рівняння (2) похідні в рівнянні (2) розглядаються як похідні у середньоквадратичному. Для спрощення вважається що у (2) $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$.

© Стецюк О., 2011