УДК 512.44

Ю. Варварюк, асист., В. Лучко, канд. фіз.-мат. наук, А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук

ПРО ЛІЄВУ НЕПРОСТОТУ СУМИ КОМУТАТИВНОГО КІЛЬЦЯ І КІЛЬЦЯ З НЕНУЛЬОВИМ ЦЕНТРОМ

Вивчаються асоціативні кільця R (не обов'язково з 1), які розкладаються в суму $R = A + B$ комутативного підкільця A і підкільця B з ненульовим центром. У випадку, коли $R = A + B$ є асоціативною локально скінченновимірною алгеброю над алгебраїчно замкненим полем характеристики $\neq 2$ доведено, що приєднана алгебра Лі $L(R)$ є непростою.

Associative rings R (not necessarily with identity) are studied which are decomposable into a sum $R = A + B$ of a commutative subring A and a subring B with nonzero center. In case, when $R = A + B$ is an associative locally finite dimensional algebra over an algebraically closed field of characteristic $\neq 2$ it is proved that the adjoint Lie algebra $L(R)$ is nonsimple.

1. Вступ

Вивченню асоціативних кілець, які розкладаються в суму двох своїх підкілець з певними властивостями присвячено багато праць різних авторів (див., наприклад, огляд [1]). По аналогії з теорією груп, де вивчалися добутки абелевих груп в теорії кілець досліджувалися суми комутативних кілець, тобто асоціативні кільця R, які розкладаються в суму $R = A + B$ двох своїх комутативних підкілець A і B. В [2] доведено, що кільце R є лієво розв'язним ступеня не більше *2*). В [3] ці результати узагальнено і доведено, що сума комутативного і лієво нільпотентного кільця лієво розв'язна.

Зауважимо, що в загальному випадку будова суми $R = A + B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B може бути суттєво складнішою ніж будова B. Тому на інший доданок при дослідженні таких сум потрібно накладати додаткові умови. Природною тут є умова наявності ненульового центру в підкільці B суми $R = A + B$ з комутативним підкільцем A. Чи буде центр $Z(B)$ підкільця B міститися в деякому розв'язному ідеалі приєднаного кільця $L(R)$ – є відкритим питанням. Зауважимо, що ця тематика походить із теорії груп, де були давно поставлені аналогічні питання, розв'язанню яких присвячено ряд робіт різних авторів (див., наприклад, [4]); в теорії алгебр Лі над полями характеристики 0 ряд результатів в цьому напрямі було отримано в роботі [5].

В даній статті вивчаються асоціативні кільця і алгебри R, які розкладаються в суму $R = A + B$ комутативного підкільця A і підкільця B з ненульовим центром. Для приєднаного кільця $L(R)$ встановлено ряд властивостей і у випадку, коли R – локально скінченновимірна алгебра над алгебраїчно замкненим полем характеристики $\neq 2$, доведено, що приєднана алгебра Лі $L(R)$ непроста. Зауважимо, що в загальному випадку невідомо, чи буде непростим кільце Лі L, яке є сумою $L = A + B$ свого абелевого підкільця A і деякого підкільця B з ненульовим центром.

Позначення в роботі стандартні. Всі кільця є асоціативними, не обов'язково з одиницею. Під розкладом кільця R в суму $R = A + B$ своїх підкілець A і B ми розуміємо розклад адитивної групи $(R,+)$ кільця R в суму адитивних підгруп $(A,+)$ і $(B,+)$. Це означає, що для довільного елемента $r \in R$ існують такі елементи $a \in A$, $b \in B$, що $r = a + b$. Через $Z(R)$ позначається центр кільця R. Нагадаємо, що приєднане кільце $L(R)$ утворюється із асоціативного кільця R шляхом заміни операції множення на операцію комутування, тобто $(a,b) \mapsto [a,b] = ab - ba$ для довільних $a, b \in R$. Ми використовуємо лівонормовані комутатори в $L(R)$, тобто $[a_1,...,a_n] = [[,...[a_1,a_2],a_3]...,a_{n-1}],a_n]$ для довільних $a_1,...,a_n \in R$.

2. Допоміжні леми

Доведенню основної теореми роботи передує ряд лем, деякі з них мають самостійний інтерес.

Лема 1. Нехай R – асоціативне кільце, яке розкладається в суму $R = A + B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B. Тоді виконуються співвідношення:

1) $[A, Z(B)] \cdot [A, Z(B)] \subseteq [B, B]$;

2) $[A, Z(B)] \cdot B \subseteq [A, Z(B)]$, $B \cdot [A, Z(B)] \subseteq [A, Z(B)]$.

Доведення. 1) Див. [6], лема 1.

2) Візьмемо довільні елементи $a \in A$, $z \in Z(B)$, $b \in B$. Тоді мають місце рівності:

$$[a,z] \cdot b = (az - za)b = azb - zab = abz - zab = [ab, z] = [a' + b', z] = [a', z],$$

де $ab = a' + b'$ – запис добутку ab у вигляді суми елементів, який виконується з огляду на розклад $R = A + B$. Звідси, очевидно, випливає співвідношення $[A, Z(B)] \cdot B \subseteq [A, Z(B)]$. Аналогічно доводиться інше включення із 2). Лему доведено.

Лема 2 ([7], лема 2). Нехай I – односторонній або двосторонній ідеал кільця R. Тоді R містить такий ідеал J, що $J^2 = 0$ і $(I + J)/J \subseteq Z(R/J)$.

Лема 3. Нехай R – асоціативне кільце, адитивна група якого не має 2–скруту і яке розкладається в суму $R = A + B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B. Тоді для довільного елемента $z \in Z(B)$ перетин $[A, z] \cap B$ є комутативним нільпотентним ідеалом підкільця B і $([A, z] \cap B)^8 = 0$.

Доведення. Якщо $[A,z]\cap B=0$, то все доведено. Тому надалі вважаємо, що $[A,z]\cap B\neq 0$. Позначимо через A_0 підмножину елементів a із A таких, що $[a,z,z]=0$. Покажемо, що сума A_0+B є підкільцем кільця R. Дійсно, для довільних елементів $a_1,a_2\in A_0$ маємо $[a_1+a_2,z,z]=[a_1,z,z]+[a_2,z,z]=0$ і тому $a_1+a_2\in A_0$. Візьмемо тепер довільні елементи $a\in A_0$, $b\in B$ і розглянемо комутатор $[ab,z,z]$. Отримаємо співвідношення $[ab,z,z]=[[a,z]b+a[z,b],z]=[a,z,z]b=0$ (тут ми врахували, що $[b,z]=0$). Це означає, що при розкладі добутку ab в суму $ab=a_1+b_1$, $a_1\in A$, $b_1\in B$ для елемента a_1 маємо $[a_1,z,z]=0$. Тому $ab\in A_0+B$ і таким чином A_0+B – підкільце кільця R.

Покажемо тепер, що для довільних елементів $a_1,a_2\in A_0$ виконується рівність $[[a_1,z],[a_2,z]]=0$.

Для цього визначимо відображення $\varphi_z: A_0+B\to A_0+B$ за правилом: $\varphi_z(g)=g+[g,z]$ для довільного елемента $g\in A_0+B$. Оскільки елемент g може бути записаний у вигляді: $g=a+b$, $a\in A_0$, $b\in B$, то $\varphi_z(g)=(a+b)+[a+b,z]=a+[a,z]+b$.

За умовою $[a,z,z]=0$ і тому елемент $[a,z]$ може бути записаний у вигляді $[a,z]=a_1+b_1$, $a_1\in A_0$, $b_1\in B$. Звідси отримаємо $\varphi_z(g)=a+a_1+b+b_1\in A_0+B$, тобто відображення φ_z переводить підкільце A_0+B в самого себе. Легко бачити, що φ_z – автоморфізм приєднаного кільця Лі $L(A_0+B)$. Дійсно, оскільки $[g,z,z]=0$ для довільного елемента $g\in A_0+B$, то для відображення $ad\,z: g\mapsto[g,z]$, яке є диференціюванням кільця Лі $L(A_0+B)$, виконується рівність $(adz)^2=0$. За умовою леми адитивна група кільця R не має 2–скруту (тобто із рівності $2x=0$ випливає, що $x=0$ для довільного $x\in R$) і тому лінійне відображення $\varphi_z=E+adz$ (E – тотожне відображення $L(A_0+B)$ на себе) є автоморфізмом кільця Лі $L(A_0+B)$ (див., наприклад, [8, с.17]). Але тоді $\varphi_z(A_0)$ – абелеве підкільце кільця Лі $L(A_0+B)$. Це означає, що для довільних елементів $a_1,a_2\in A_0$ має місце рівність $[\varphi_z(a_1),\varphi_z(a_2)]=0=[a_1+[a_1,z],a_2+[a_2,z]]$. Звідси легко випливає, що $[[a_1,z],[a_2,z]]=0$ бо має місце рівність $[a_1,[a_2,z]]+[[a_1,z],a_2]=[[a_1,a_2],z]=0$.

Далі, із співвідношення $[a,z]\in B$ для деяких елементів $a\in A$, $z\in Z(B)$ випливає, що $[a,z,z]=0$, тобто $a\in A_0$. Тому, за доведеним вище, отримаємо рівність $[[A,z]\cap B,[A,z]\cap B]=0$. Далі, за лемою 1 маємо включення $[A,z]\cdot[A,z]\subseteq B$, $[A,z]\cdot B\subseteq[A,z]$, $B\cdot[A,z]\subseteq[A,z]$ і тому, як неважко переконатися, із доведеного вище випливає, що $[A,z]\cap B$ – комутативний ідеал підкільця B. За лемою 2 існує ідеал I підкільця B такий, що $I^2=0$ і в фактор–кільці B/I ідеал $([A,z]\cap B)+I/I$ лежить в центрі $\overline{B}=B/I$. Використовуючи такі ж міркування як і в лемі 2 із [7], неважко переконатися, що комутатор $[\overline{B},\overline{B}]$ анулює ідеал $([A,z]\cap B)+I/I$ кільця $\overline{B}=B/I$. За лемою 1 в фактор-кільці $\overline{B}=B/I$ має місце включення $([A,z]\cap B)^2+I/I\subseteq[B,B]+I/I$. Це означає, що $([A,Z(B)]\cap B)^2+I/I\subseteq[\overline{B},\overline{B}]$ і тому з урахуванням попереднього отримаємо, що $([A,z]\cap B)^4+I/I=\overline{0}$ в фактор кільці $\overline{B}=B/I$. Звідси, з урахуванням рівності $I^2=0$ випливає, що $([A,z]\cap B)^8=0$. Лему 3 доведено.

Лема 4. Нехай асоціативне кільце R розкладається в суму $R=A+B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B. Якщо адитивна група кільця R не має 2–скруту і для деякого елемента $z\in Z(B)$ виконується співвідношення $[A,z,z]=0$, то $[A,z]^2=0$ і $[A,z]$ – ідеал підкільця $[A,z]\cap B$.

Доведення. Для довільних елементів $a_1,a_2\in A$ маємо за правилом Лейбніца $[a_1a_2,z]=a_1[a_2,z]+[a_1,z]a_2$. Звідси, прокомутувавши ще раз з елементом z, отримаємо співвідношення

$$[a_1a_2,z,z]=[a_1,z][a_2,z]+[a_1,z][a_2,z]=0. \tag{1}$$

Тут ми скористалися умовою $[A,z,z]=0$. Оскільки із рівності $2x=0$ в кільці R випливає, що $x=0$, то із (1) отримаємо $[a_1,z][a_2,z]=0$ і тому $[A,z]^2=0$.

Далі за лемою 1 мають місце включення $[A,z]B\subseteq[A,z]$ і $B[A,z]\subseteq[A,z]$ і тому, як неважко переконатися, $[A,z]+B$ – підкільце із B. Очевидно, також, що $[A,z]$ – ідеал підкільця $[A,z]+B$.

Наслідок 1. Нехай асоціативне кільце R, адитивна група якого не має 2–скруту, розкладається в суму $R=A+B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B. Якщо для елемента $z\in Z(B)$ виконується включення $[A,z]\subseteq B$, то $[A,z]^2=0$.

Дійсно, оскільки за умовою $[A,z]\subseteq B$, то $[A,z,z]=0$ і тому за лемою 4 $[A,z]^2=0$.

Зауваження 1. Із леми 4 випливає, що у випадку включення $[A,Z(B)]\subseteq B$ ідеал $[A,Z(B)]$ підкільця B є локально нільпотентним.

Дійсно, достатньо застосувати лему 4 до довільної скінченної підмножини $\{g_1,...,g_n\}$ елементів ідеалу $[A,Z(B)]$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що ці елементи мають вигляд $[a_1,z_1],...,[a_n,z_n]$, де $a_i\in A$, $z_i\in Z(B)$,

$i=1,...,n$. Кожен комутатор $[a_i,z_i]$ лежить за лемою 4 в деякому ідеалі з нульовим квадратом підкільця B. Звідси випливає, що $[A,Z(B)]$ – локально нільпотентний ідеал підкільця B.

Лема 5. Нехай R – асоціативне кільце, яке розкладається в суму $R=A+B$ комутативного підкільця A і деякого підкільця B. Якщо для деякого елемента $z\in Z(B)$ виконується рівність $[A,z]^2=0$, то кільце R містить нільпотентний ідеал I такий, що елемент $\bar{z}=z+I$ фактор–кільця $\bar{R}=R/I$ лежить в центрі $\bar{R}$.

Доведення. Покажемо спочатку, що сума $[A,z]+[A,z]A$ є правим нільпотентним ідеалом кільця R. Дійсно, за лемою 1 справедливе співвідношення $[A,z]\cdot B\subseteq[A,z]$ і тому така сума, як неважко безпосередньо переконатися, $[A,z]+[A,z]R=[A,z]+[A,z](A+B)=[A,z]+[A,z]A$ – правий ідеал кільця R.

Доведемо тепер, що $([A,z]\cdot A)^2=0$. Дійсно, для довільних елементів $a_1,a_2,a_3,a_4\in A$ маємо за правилом комутування добутку $a_2[a_3,z]=[a_2a_3,z]-[a_2,z]a_3$. Тому звідси отримаємо співвідношення для елементів з $[A,z]A$ (з урахуванням рівності $[A,z]^2=0$) $[a_1,z]a_2[a_3,z]a_4=[a_1,z]([a_2a_3,z]-[a_2,z]a_3)a_4=0$. З останньої рівності зразу ж випливає рівність $([A,z]A)^2=0$.

Далі, правий ідеал $[A,z]+[A,z]A$ є сумою двох нільпотентних підкілець і тому за теоремою О. Кегеля [9] є також нільпотентним. Але тоді, як відомо (див., наприклад, [10]) правий ідеал $[A,z]+[A,z]A$ міститься в деякому двосторонньому нільпотентному ідеалі I кільця R. Звідси випливає, що в фактор–кільці $\bar{R}=R/I$ для елемента $\bar{z}=z+I$ виконується співвідношення $\bar{z}\in Z(\bar{R})$, що і потрібно було довести. Лему доведено.

Лема 6. Нехай R – асоціативне кільце, адитивна група якого не має 2-скруту і яке розкладається в суму $R=A+B$ комутативного підкільця A і підкільця B з $Z(B)\neq 0$. Якщо кільце R лієво просте, то для довільного елемента $z\in Z(B)$, $z\neq 0$ виконується рівність $[A,z]+[A,z]^2=R$ і $[A,z]^2=B$.

Доведення. Візьмемо довільний елемент $z\in Z(B)$. Позначимо через $A_o=A\cap([A,z]+B)$. Неважко переконатися, що має місце рівність $[A,z]+B=A_0+B$. Використовуючи комутаторні співвідношення із леми 1, легко бачити, що сума $[A,z]+B=A_0+B$ є підкільцем із кільця R. Припустимо спочатку, що $[A,z]+B$ – власне підкільце кільця R.

Розглянемо спочатку випадок, коли $[A,z]+B=B$. Тоді $[A,z]\subseteq B$ і за лемою 5 кільце R містить нільпотентний ідеал I такий, що $z+I$ лежить в центрі фактор–кільця R/I. Оскільки R лієво просте, то $I=0$ і тоді $z\in Z(R)$. Оскільки $Z(R)=0$, то останнє неможливе і отримане протиріччя доводить, що $[A,z]+B=A_0+B\neq B$. В лієвому кільці $L(R)$ побудуємо фільтрацію за лієвим підкільцем $L(A_0+B)$

$$L(R)\supset L(A_0+B)\supseteq L_1\supseteq L_2\supseteq ...\supseteq L_k\supseteq ...,$$

де $L(R)=L_{-1}$, $L(A_0+B)=L_0$ і $L_{i+1}=\{x\in L\,|\,[x,L]\subseteq L_i\}$. Неважко переконатися, що кожен член цієї фільтрації містить A_0 (нагадаємо, що $[A_0,A_0]=0$) і тому перетин $J=\bigcap_{i\geq 0}L_i$ також містить A_0. Безпосередньо перевіряється, що J є ідеалом лієвого кільця $L(R)$ і, оскільки $A_0\neq 0$, то $J\neq 0$. При цьому ідеал J лежить в лієвому підкільці $L(A_0+B)$ і тому є власним ідеалом кільця Лі $L(R)$. Останнє суперечить припущенню леми і тому $[A,z]+B=A_0+B=R$.

Перетин $[A,z]\bigcap B$ за лемою 1 є ідеалом кільця $R=[A,z]+B$ і тому за умовою леми $[A,z]\bigcap B=0$. Розглянемо суму $T=[A,z]+[A,z]^2$. Покажемо, що T – двосторонній ідеал кільця R. Дійсно, за лемою 1 $TB\subseteq T$ і $BT\subseteq T$. Далі, $T\cdot[A,z]=([A,z]+[A,z]^2)[A,z]\subseteq[A,z]^2+[A,z]$, оскільки $[A,z]^3\subseteq B[A,z]\subseteq[A,z]$. Аналогічно доводиться, що $[A,z]T\subseteq T$ і тому з урахуванням рівності $R=[A,z]+B$ отримаємо, що T – двосторонній ідеал кільця R. Оскільки за умовою R лієво просте, то $R=T$ і тому $[A,z]+[A,z]^2=R$.

Покажемо ще, що $[A,z]^2=B$. Нехай, навпаки, $[A,z]^2\neq B$. За лемою 1 $[A,z]^2\subseteq B$ і тому $[A,z]^2\subset B$. Візьмемо довільний елемент $b\in B\setminus[A,z]^2$. Тоді $b=[a,z]+y$ для деяких елементів $a\in A$, $y\in[A,z]^2$. Тоді отримаємо $[a,z]=b-y\in B\cap[A,z]$. Оскільки за доведеним вище $B\cap[A,z]=0$, то $b-y=0$ і тому $b=y\in[A,z]^2$, що суперечить його вибору. Тому $[A,z]^2\subseteq B$. Лему доведено.

3. Основна теорема

Застосуємо отримані результати для вивчення локально скінченновимірних асоціативних алгебр над полем, які розкладаються в суму комутативної підалгебри і підалгебри з ненульовим центром. При цьому ми будемо використовувати результати з попереднього розділу, які доведені в більш загальному контексті.

Теорема. Нехай R – асоціативна локально скінченновимірна алгебра над алгебраїчно замкнутим полем K характеристики $\neq 2$. Якщо R розкладається в суму $R=A+B$ комутативної підалгебри A і деякої підалгебри B з ненульовим центром, то алгебра R лієво непроста (тобто приєднана алгебра Лі $L(R)$ непроста).

Доведення. Нехай, навпаки, твердження теореми не виконується і $R = A + B$ – лієва проста алгебра Лі над полем K, яка задовольняє умови теореми. Тоді за лемою 6 для довільного ненульового елемента $z \in Z(B)$ виконується рівність $R = [A,z] + B$ і $B = [A,z]^2$.

Візьмемо довільний ненульовий елемент $0 \neq [a,z] \in [A,z]$ і розглянемо підалгебру $C = < z,[a,z] >$ із R, породжену елементами z і $[a,z]$. За умовою теореми ця підалгебра скінченновимірна і тому $V = C \cap [A,z]$ – скінченновимірний K – підпростір із $[A,z]$ і $V \neq 0$, оскільки $[a,z] \in V$. Оскільки, очевидно, $[V,z] \subseteq V$, то з огляду на алгебраїчну замкненість поля K існує власний вектор лінійного оператора $\varphi_z : v \mapsto [v,z]$, для $v \in V$. Це означає, що існує ненульовий елемент $[a,z] \in [A,z]$ такий, що $[[a,z],z] = \lambda[a,z]$ для деякого $\lambda \in K$. Зауважимо, що $\lambda \neq 0$. Дійсно, якщо $\lambda = 0$, то $[a,z,z] = 0$ і тому підпростір $A_0 = \{a \in A \mid [a,z,z] = 0\}$ ненульовий. Раніше доведено, що $A_0 + B$ – підалгебра із R і тому за лемою маємо $A_0 + B = R$. Але тоді $[A,z,z] = 0$, що неможливо. Це протиріччя показує, що $\lambda \neq 0$.

Розглянемо підмножину $W_\lambda = \{v \in [A,z] \mid [v,z] = \lambda v\}$. За доведеним вище $W_\lambda \neq 0$. Покажемо, що $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$. Дійсно, для довільних елементів $w \in W_\lambda$ і $b \in B$ маємо $[wb,z] = [w,z] \cdot b = \lambda(wb)$, що означає, що $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$.

Розглянемо суму $W_\lambda + B$. Оскільки $W_\lambda \cdot W_\lambda \subseteq B$ (див., лему 1) і $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$, $B \cdot W_\lambda \subseteq W_\lambda$, то $W_\lambda + B$ – підкільце кільця R. Повторюючи міркування з фільтраціями із леми 6, неважко переконатися, що B – максимальна підалгебра із R. З урахуванням $W_\lambda \neq 0$, $W_\lambda \not\subset B$ маємо $W_\lambda + B = R$.

Візьмемо тепер довільні елементи $[a_1,z]$ і $[a_2,z] \in [A,z] = W_\lambda$. Тоді $[[a_1,z],z] = \lambda[a_1,z]$, $[[a_2,z],z] = \lambda[a_2,z]$. Тому $[[a_1,z]\cdot[a_2,z],z] = [[a_1,z],z]\cdot[a_2,z] + [a_1,z]\cdot[[a_2,z],z] = \lambda[a_1,z][a_2,z] + [a_2,z]\cdot\lambda\cdot[a_2,z] = 2\lambda[a_1,z][a_2,z] = 0$ (оскільки $[a_1,z][a_2,z] \in B$, то $[[a_1,z][a_2,z],z] = 0$). За доведеним вище $\lambda \neq 0$ і за умовою теореми $char\ K \neq 2$. Тому із останніх співвідношень отримаємо $[a_1,z][a_2,z] = 0$. Це означає, що $[A,z]^2 = 0$. Останнє неможливо за лемою 6. Теорему доведено.

4. Висновки

Наведені в роботі загальні підходи до вивчення суми комутативного кільця і кільця з ненульовим центром дають можливість будувати ідеали в сумах асоціативних кілець і більш широких класів. Зокрема, якщо один з доданків є лієво нільпотентним, то при деяких обмеженнях на центр іншого доданку можна будувати підалгебри і ідеали з певними властивостями. Зауважимо також, що обмеження на характеристику основного поля для асоціативних алгебр пов'язано саме з наведеним вище доведенням і, взагалі кажучи, може бути несуттєвим при інших підходах (доведення лієвої розв'язності суми комутативної алгебри і лієво нільпотентної алгебри не залежить від характеристики основного поля). Тому цікавою є задача дослідження суми лієво нільпотентної алгебри і алгебри з ненульовим центром над довільним полем.

Третій автор автор частково підтриманий ДФФД України, грант F028/01.9.

1. *Puczylowcki E. R.* Some results and questions of rings which are sums of two subrihgs // Trends in theory of Rings and Modules / Eds. S. Tariq Rizvi and S. M. Zaidi. – 2005. – P. 125–138. 2. *Bahturin Yu. A., Giambruno A.* Identities of sums of commutative subalgebras // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1994. – Vol. 43, No. 2. – P. 250–258. 3. *Петравчук А. П.* О лиевой разрешимости суммы комутативного и лиево нильпотентного ассоциативных колец // Вісник Київського університету. Сер. Фіз.–мат. – 1999. – № 1. – С. 78–81. 4. *Казарин Л. С.* О проблеме Сенна // Известия АН СССР, Сер. Матем. – 1986. – Т. 54, № 3. – С. 479–507. 5. *Білун С. В.* Про суму абелевої алгебри Лі та алгебри Лі з ненульовим центром // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія матем. і інформ. – 2008. – № 16. – С. 25–30. 6. *Петравчук А. П.* Про суму комутативного та лієво нільпотентного асоціативних кілець // Вісник Київського університету. Матем. Мех. – 1998. – Вип. 1. – С. 33–35. 7. *Petravchuk A. P.* On associative algebras which are sum of two almost commutative subalgebras // Publicationes Mathematicae (Debrecen). – 1998. – Vol. 53, No. 1–2. – P. 191–206. 8. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. 9. *Kegel O. H.* Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe // Math. Ann. – 1962/1963. – Vol. 149. – P. 258–260. 10. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.,* Радикалы алгебр и структурная теория. – М.: Наука, 1979. – 495 с.

Надійшла до редколегії 18.10.2010 р.

УДК 515.146

Ю. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф., П. Колесник, асп.

ПРО ПОЛІЕДРИ, ЯКІ НАЛЕЖАТЬ ОДНОМУ РОДУ

Розглядається стабільна гомотопічна категорія поліедрів (скінченних клітинних комплексів). Два поліедра належать одному роду, якщо є ізоморфними їхні образи у локалізаціях стабільної гомотопічної категорії за кожним первинним числом. Доведено, що це рівносильно ізоморфізму їх букетів з фіксованим букетом сфер. Встановлено умови для того, щоб для об'єктів гомотопічної категорії виконувалось правило скорочення.

Stable homotopy category of polyhedra (finite cell complexes) is considered. Two polyhedra belong to the same genus, if their images in localizations of stable homotopy category with respect to each prime number are isomorphic. It is proved that it is equivalent to the isomorphism of their wedges with certain wedge of spheres. Some conditions are found in order that the cancellation law hold for objects of the stable homotopy category.

1. Вступ

Розглянемо зв'язні топологічні простори з відміченою точкою. Через S^n позначимо n–вимірну сферу, а через $X \vee Y$ – букет топологічних просторів X та Y Категорію топологічних просторів з відміченою точкою будемо позначати Hot. Морфізмами в цій категорії є гомотопічні класи неперервних відображень $f : X \to Y$. Через CW позначимо її повну підкатегорію, яка складається із поліедрів, де під поліедром розуміємо скінченний клітинний ком-