Доведення. Нехай, навпаки, твердження теореми не виконується і $R = A + B$ – лієва проста алгебра Лі над полем K, яка задовольняє умови теореми. Тоді за лемою 6 для довільного ненульового елемента $z \in Z(B)$ виконується рівність $R = [A,z] + B$ і $B = [A,z]^2$.

Візьмемо довільний ненульовий елемент $0 \neq [a,z] \in [A,z]$ і розглянемо підалгебру $C = < z,[a,z] >$ із R , породжену елементами z і $[a,z]$. За умовою теореми ця підалгебра скінченновимірна і тому $V = C \cap [A,z]$ – скінченновимірний K – підпростір із $[A,z]$ і $V \neq 0$, оскільки $[a,z] \in V$. Оскільки, очевидно, $[V,z] \subseteq V$, то з огляду на алгебраїчну замкненість поля K існує власний вектор лінійного оператора $\varphi_z : v \mapsto [v,z]$, для $v \in V$. Це означає, що існує ненульовий елемент $[a,z] \in [A,z]$ такий, що $[[a,z],z] = \lambda[a,z]$ для деякого $\lambda \in K$. Зауважимо, що $\lambda \neq 0$. Дійсно, якщо $\lambda = 0$, то $[a,z,z] = 0$ і тому підпростір $A_0 = \{a \in A \mid [a,z,z] = 0\}$ ненульовий. Раніше доведено, що $A_0 + B$ – підалгебра із R і тому за лемою маємо $A_0 + B = R$. Але тоді $[A,z,z] = 0$, що неможливо. Це протиріччя показує, що $\lambda \neq 0$.

Розглянемо підмножину $W_\lambda = \{v \in [A,z] \mid [v,z] = \lambda v\}$. За доведеним вище $W_\lambda \neq 0$. Покажемо, що $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$. Дійсно, для довільних елементів $w \in W_\lambda$ і $b \in B$ маємо $[wb,z] = [w,z] \cdot b = \lambda(wb)$, що означає, що $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$.

Розглянемо суму $W_\lambda + B$. Оскільки $W_\lambda \cdot W_\lambda \subseteq B$ (див., лему 1) і $W_\lambda \cdot B \subseteq W_\lambda$, $B \cdot W_\lambda \subseteq W_\lambda$, то $W_\lambda + B$ – підкільце кільця R . Повторюючи міркування з фільтраціями із леми 6, неважко переконатися, що B – максимальна підалгебра із R . З урахуванням $W_\lambda \neq 0$, $W_\lambda \not\subset B$ маємо $W_\lambda + B = R$.

Візьмемо тепер довільні елементи $[a_1,z]$ і $[a_2,z] \in [A,z] = W_\lambda$. Тоді $[[a_1,z],z] = \lambda[a_1,z]$, $[[a_2,z],z] = \lambda[a_2,z]$. Тому $[[a_1,z]\cdot[a_2,z],z] = [[a_1,z],z]\cdot[a_2,z] + [a_1,z]\cdot[[a_2,z],z] = \lambda[a_1,z][a_2,z] + [a_2,z]\cdot\lambda\cdot[a_2,z] = 2\lambda[a_1,z][a_2,z] = 0$ (оскільки $[a_1,z][a_2,z] \in B$, то $[[a_1,z][a_2,z],z] = 0$). За доведеним вище $\lambda \neq 0$ і за умовою теореми $char\ K \neq 2$. Тому із останніх співвідношень отримаємо $[a_1,z][a_2,z] = 0$. Це означає, що $[A,z]^2 = 0$. Останнє неможливо за лемою 6. Теорему доведено.

4. Висновки

Наведені в роботі загальні підходи до вивчення суми комутативного кільця і кільця з ненульовим центром дають можливість будувати ідеали в сумах асоціативних кілець і більш широких класів. Зокрема, якщо один з доданків є лієво нільпотентним, то при деяких обмеженнях на центр іншого доданку можна будувати підалгебри і ідеали з певними властивостями. Зауважимо також, що обмеження на характеристику основного поля для асоціативних алгебр пов'язано саме з наведеним вище доведенням і, взагалі кажучи, може бути несуттєвим при інших підходах (доведення лієвої розв'язності суми комутативної алгебри і лієво нільпотентної алгебри не залежить від характеристики основного поля). Тому цікавою є задача дослідження суми лієво нільпотентної алгебри і алгебри з ненульовим центром над довільним полем.

Третій автор автор частково підтриманий ДФФД України, грант F028/01.9.

1. *Puczylowcki E. R.* Some results and questions of rings which are sums of two subrihgs // Trends in theory of Rings and Modules / Eds. S. Tariq Rizvi and S. M. Zaidi. – 2005. – P. 125–138. 2. *Bahturin Yu. A., Giambruno A.* Identities of sums of commutative subalgebras // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1994. – Vol. 43, No. 2. – P. 250–258. 3. *Петравчук А. П.* О лиевой разрешимости суммы комутативного и лиево нильпотентного ассоциативных колец // Вісник Київського університету. Сер. Фіз.–мат. – 1999. – № 1. – С. 78–81. 4. *Казарин Л. С.* О проблеме Сенна // Известия АН СССР, Сер. Матем. – 1986. – Т. 54, № 3. – С. 479–507. 5. *Білун С. В.* Про суму абелевої алгебри Лі та алгебри Лі з ненульовим центром // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія матем. і інформ. – 2008. – № 16. – С. 25–30. 6. *Петравчук А. П.* Про суму комутативного та лієво нільпотентного асоціативних кілець // Вісник Київського університету. Матем. Мех. – 1998. – Вип. 1. – С. 33–35. 7. *Petravchuk A. P.* On associative algebras which are sum of two almost commutative subalgebras // Publicationes Mathematicae (Debrecen). – 1998. – Vol. 53, No. 1–2. – P. 191–206. 8. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. 9. *Kegel O. H.* Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe // Math. Ann. – 1962/1963. – Vol. 149. – P. 258–260. 10. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.,* Радикалы алгебр и структурная теория. – М.: Наука, 1979. – 495 с.

Надійшла до редколегії 18.10.2010 р.

УДК 515.146

Ю. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф., П. Колесник, асп.

ПРО ПОЛІЕДРИ, ЯКІ НАЛЕЖАТЬ ОДНОМУ РОДУ

Розглядається стабільна гомотопічна категорія поліедрів (скінченних клітинних комплексів). Два поліедра належать одному роду, якщо є ізоморфними їхні образи у локалізаціях стабільної гомотопічної категорії за кожним первинним числом. Доведено, що це рівносильно ізоморфізму їх букетів з фіксованим букетом сфер. Встановлено умови для того, щоб для об'єктів гомотопічної категорії виконувалось правило скорочення.

Stable homotopy category of polyhedra (finite cell complexes) is considered. Two polyhedra belong to the same genus, if their images in localizations of stable homotopy category with respect to each prime number are isomorphic. It is proved that it is equivalent to the isomorphism of their wedges with certain wedge of spheres. Some conditions are found in order that the cancellation law hold for objects of the stable homotopy category.

1. Вступ

Розглянемо зв'язні топологічні простори з відміченою точкою. Через S^n позначимо n–вимірну сферу, а через $X \vee Y$ – букет топологічних просторів X та Y Категорію топологічних просторів з відміченою точкою будемо позначати Hot . Морфізмами в цій категорії є гомотопічні класи неперервних відображень $f : X \to Y$. Через CW позначимо її повну підкатегорію, яка складається із поліедрів, де під поліедром розуміємо скінченний клітинний комплекс (CW - комплекс). Нагадаємо, що підвіскою топологічного простору X називається подвійний конус над ним, тобто $SX = CX/(X\times 0)$. Через $S^n X$ позначимо n- ту підвіску простору X. Операція підвіски індукує функтор $S: Hot \to Hot$, а саме: $Hot(X,Y) \to Hot(SX,SY)$. При цьому множина $Hot(S^n X, S^n Y)$ є групою, яка комутативна для $n \ge 2$ [3]. Визначимо групу стабільних відображень $Hos(X,Y)$ із простору X у простір Y [4,5] за правилом:

$$Hos(X,Y) = \lim_{\to n} Hot(S^n X, S^n Y). \tag{1}$$

Якщо $\alpha \in Hot(S^m X, S^m Y)$, а $\beta \in Hot(S^n Y, S^n Z)$, то визначено добуток $S^m\beta \circ S^n\alpha \in Hot(S^{m+n}X, S^{m+n}Z)$, образ якого в групі $Hos(X,Y)$ називається добутком образів α та β у відповідних групах стабільних гомоморфізмів. У такий спосіб ми отримуємо стабільну гомотопічну категорію Hos [4,5]. Hos є цілком адитивною категорією. Букет просторів відіграє роль прямої суми. Позначимо через $\pi_n^S(X) = Hos(S^n, X)$ n- ту стабільну гомотопічну групу простору X. Як і у випадку категорії Hot операція підвіски індукує функтор $S: Hos \to Hos$, який відображає ізоморфізми (тобто, якщо $S\,f$ є ізоморфізмом, то таким є і f).

З узагальненої теореми Фройденталя [4, теорема 1.21], випливає, що для поліедрів стабілізація у формулі (1) настає вже на скінченному кроці. Має місце теорема.

Теорема 1 (Фройденталь). Якщо $\dim(X) \le m$, а Y є $(n-1)$- зв'язним, причому $m < 2n-1$, то відображення $Hot(X,Y) \to Hot(SX,SY)$ є бієкцією, де $(n-1)$- зв'язність означає, що $\pi_k(X) = 0$ для всіх $k \le n-1$. Якщо $m = 2n-1$, то це відображення є сур'єкцією.

Зокрема, відображення $Hot(S^k X, S^k Y) \to Hos(X,Y)$ є бієктивним, якщо $k < m-2n+1$, і сур'єктивним, якщо $k = m-2n+1$.

Наслідок 1. Для всіх поліедрів розмірності щонайбільше d відображення $Hot(S^m X, S^m Y) \to Hos(X,Y)$ є бієктивним, якщо $m \ge d$, і сур'єктивним, якщо $m = d-1$. Зокрема, $\pi_m^S(Y) \cong \pi_{2(m-n+1)}(S^{m-n+2}Y)$.

Позначимо через $\mathbb{S}$ образ в Hos категорії поліедрів CW. Надалі будемо ототожнювати поліедри та неперервні відображення між ними з їхніми образами в $\mathbb{S}$.

2. Роди поліедрів та закони скорочення

Нехай p – первинне число. Позначимо через $\mathbb{S}_p$ локалізацію категорії $\mathbb{S}$ за числом p, тобто категорію, в якій об'єктами є об'єкти $\mathbb{S}$, а множинами морфізмів – $Hos_p(X,Y) = Hos(X,Y) \otimes \mathbb{Z}_p$, де $\mathbb{Z}_p$ – кільце цілих p- адичних чисел. Зауважимо, що з наступних результатів легко виводиться, що всі твердження залишаться вірними, якщо замість $\mathbb{Z}_p$ взяти підкільце поля раціональних чисел, яке складається з усіх дробів $\frac{a}{b}$, в яких $p \nmid b$. Для зручності позначатимемо через X_p образ поліедра X у категорії $\mathbb{S}_p$.

Означення 1. Кажуть, що поліедри X та Y належать одному роду і пишуть $X \sim Y$, якщо $X_p \cong Y_p$ для всіх первинних чисел p.

Позначимо через rX букет r копій простору X. Будемо писати $X \mid Z$, якщо існують число r та поліедр Z' такі, що $rX \cong Z \vee Z'$ (у категорії $\mathbb{S}$).

Сформулюємо основний результат статті..

Теорема 2. У категорії $\mathbb{S}$:

(1) $X \sim Y$ тоді й лише тоді, коли існує такий поліедр B, що $X \vee B \cong Y \vee B$, причому B є букетом усіх сфер, які входять до побудови X як клітинного комплекса.

(2) Якщо $X \vee Z \cong Y \vee Z$ і $X \mid Z$, то $X \cong Y$.

Доведення цієї теореми ґрунтується на теорії родів цілочисельних зображень [1,2,6]. Нагадаємо відповідні означення.

Нехай Λ – кільце, адитивна група якого є скінченно породженою абелевою групою. Розглядатимемо ліві скінченно породжені Λ- модулі. Кажуть, що два такі модулі M та N належать одному роду та пишуть $M \sim N$, якщо $M_p \cong N_p$ для всіх первинних p, де $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$. Позначимо через $g(M)$ кількість модулів у тому ж роді, що й M. Як правило, розглядають лише роди Λ-ґраток, тобто таких модулів, адитивна група яких не має скруту. Втім, легко бачити, що $M \sim N$ тоді й лише тоді, коли $\widetilde{M} \sim \widetilde{N}$, де через $\widetilde{M}$ позначено фактормодуль модуля M за підмодулем $\tau(M)$, який складається з усіх періодичних елементів. Зокрема, $g(M) = g(\widetilde{M})$, а теорія родів над кільцем Λ збігається з теорією родів над його факторкільцем $\widetilde{\Lambda} = \Lambda/\tau(\Lambda)$. Будемо позначати через rM пряму суму r копій модуля M і писати $M \mid N$, якщо існують таке число r і модуль N', що $rM \cong N \oplus N'$. Рід, який містить саме кільце Λ, розглянуте як Λ-модуль, називається головним родом кільця Λ.

У [1,2,6] одержано наступні результати.

Теорема 3. Нехай адитивна група кільця Λ – вільна абелева скінченного рангу, причому Λ не містить нільпотентних ідеалів. Нехай, крім того, M та N – деякі Λ - ґратки.

(1) Якщо N – точний Λ - модуль, то $g(M+N) \le g(N)$. Зокрема, якщо $g(N)=1$, а $M \sim M'$, то $M \oplus N \cong M' \oplus N$.

(2) Припустимо, що алгебра $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ не має прямих множників H таких, що $H \otimes \mathbb{R}$ є прямим добутком тіл кватерніонів. Якщо $M \oplus N \cong M' \oplus N$, а $M \mid N$, то $M \cong M'$.

Нехай тепер $X \in \mathbb{S}$, а $\Lambda = End(X)$. Із [4] відомо, що адитивна група кільця Λ є скінченно породженою, а тому до нього застосовна теорія родів цілочисельних зображень. При цьому виконується стандартне твердження, яке зводить теорію родів для X до теорії родів для Λ.

Твердження 1. Відображення $Y \mapsto Hos(X,Y)$ індукує бієктивне відображення множини класів ізоморфізму поліедрів, які належать тому ж роду, що й X, та множини класів ізоморфізму модулів головного роду кільця Λ. При цьому, якщо $X \mid Z$, то $Hos(X,X) \mid Hos(X,Z)$ як Λ - модуль.

Скористаємося також відомим фактом з теорії поліедрів [4], який легко доводиться за індукцією.

Твердження 2. Нехай X – деякий поліедр. Тоді існує така точна послідовність $X \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} X$, що $\beta\alpha = k \cdot Id_X$ для деякого натурального k, де $B = \bigvee_{i=0}^{s} \gamma_i S^i$ – букет усіх сфер, які зустрічаються у побудові поліедра X як клітинного комплекса.

Із цього твердження маємо очевидний наслідок.

Наслідок 2. У позначеннях твердження 2, нехай $\Omega = End(B)$, $\Gamma = End(X \oplus B)$, $\overline{\Lambda} = \widetilde{\Lambda} / Nil(\widetilde{\Lambda})$, де $Nil(\widetilde{\Lambda})$ – ніль-радикал кільця $\widetilde{\Lambda}$, і аналогічно визначені $\overline{\Omega}$ та $\overline{\Gamma}$.

(1) $\overline{\Gamma}$ ізоморфне кільцю матриць $\begin{pmatrix} \Lambda & U \\ V & \Omega \end{pmatrix}$, у якому $UV \supseteq k\Lambda$.

(2) $\overline{\Gamma}$-модуль $\begin{pmatrix} U \\ \Omega \end{pmatrix}$ є точним.

(3) Алгебра $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ ізоморфна прямому добутку матричних алгебр $Mat(m_i, \mathbb{Z})$ для деяких m_i.

Перші два твердження очевидні, а третє випливає з того, що такий вигляд має алгебра $\Omega \otimes \mathbb{Q}$.

Очевидно, що з твердження 1 і наслідку 2 разом із теоремою 3 безпосередньо випливає теорема 2.

3. Висновки

Впроваджено теорію родів для стабільних гомотопічних класів поліедрів. Доведено, що два поліедри X та Y належать одному роду тоді й лише тоді, коли $X \vee B \cong Y \vee B$ для букета сфер B. Встановлено, що з ізоморфізму $X \vee Z \cong Y \vee Z$ випливає ізоморфізм $X \cong Y$, якщо існує такий поліедр Z', що $rX \cong Z \vee Z'$, де rX позначає букет r екземплярів поліедра X. Доведення ґрунтується на теорії цілочисельних зображень.

1. *Дрозд Ю. А.* Адели и целочисленные представления // Изв. Акад. наук СССР, Серия математическая. – 1969. – Т. 33. – С. 1080–1088. 2. *Ройтер А. В.* О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду // Изв. Акад. наук СССР, Серия математическая. – 1966. – Т. 30. – С. 1315–1324. 3. *Свитцер Р. М.* Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии: Пер. с англ. – М., 1985. 4. *Cohen J. M.* Stable Homotopy. -- Berlin, Heidelberg, 1970. 5. *Freyd P.* Stable Homotopy: Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. -- Berlin, Heidelberg, New York, 1966. 6. *Jacobinski H.* Genera and decompositions of lattices over orders // Acta Math. – 1968. – Vol. 121.– P. 1–29.

Надійшла до редколегії 21.12.2010 р.

УДК 512.6

І. Раєвська, асп.

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА НЕМЕТАЦИКЛІЧНІЙ *P*-ГРУПІ МІЛЛЕРА-МОРЕНО

В даній роботі отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на неметациклічній p-групі Міллера-Морено.

Necessary and sufficient conditions of existence of local near-rings on non-metacycle p -group of Miller-Moreno are given.

1. Вступ

Майже-кільце – це узагальнення кільця, в якому додавання $+$ не обов'язково комутативне та пов'язане з множенням $*$ лише одним (лівим) дистрибутивним законом. Майже-кільце R називається локальним, якщо $(R,\cdot)$ є моноїдом, множина L всіх необоротних елементів якого утворює підгрупу в адитивній групі $(R,+)$.

Локальні майже-кільця із скінченними абелевими адитивними p -групами вивчались в [5]. В [3] описані всі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^2, які не є майже-полями. Також у [6] доведено існування локальних майже-кілець на неабелевій групі порядку p^n та експоненти p^{n-1}. У даній наводяться статті отримано необхідні та достатні умови існування локальних майже-кілець на неметациклічній p -групі Міллера-Морено.