

3. Висновки

Для системи різницевих рівнянь (1) знайдено клас єдиного розв'язку і встановлено, якою має бути поведінка норм $\|f_k\|_{C^n}$ при $k \rightarrow \infty$, щоб ця система мала єдиний розв'язок у тому самому класі. Знайдено спектр різницевого оператора $L(A)$, встановлено локальні асимптотичні розвинення для розв'язку системи, які істотно спрощують знаходження наближеного розв'язку.

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с. 2. Городний М. Ф. Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – Том 51, вып. 4. – С. 17–22. 3. Городний М. Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі: автореферат дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К., 2004. – 32 с. 4. Дороговец А. Я. Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 35–42. 5. Дороговец А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992. – 319 с. 6. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 7. Кашпіровський О. І., Семенів О. В., Яценко В. О. Про локальні апроксимації обмежених розв'язків нескінченних систем різницевих рівнянь // Наук. зап. Нац. ун-ту "Києво-Могилянська академія". Фіз.-мат. науки. – 2007. – Т. 61. – С. 17–22. 8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с. 9. Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I. Boundary-value problems for operator-differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 364 p.

Надійшла до редколегії 24.03.2011 р.

УДК 517.54

Т. Жеребко, асп.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ В ОБЛАСТЯХ З КУСКОВО-ГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ.

Отримано поточкову та рівномірну оцінки наближення конформного відображення многочленами в областях з кутами у випадку довільної кількості кутів.

Pointwise and uniform estimates of conformal mapping polynomial approximation in domains with corners are obtained for any number of angles.

1. Вступ

Нехай $G \subset \mathbb{C}$ – обмежена область з жордановою межею ∂G , яка складається з l гладких кривих Γ_j таких, що $\{z_j\} := \Gamma_{j-1} \cap \Gamma_j \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, l$, де $\Gamma_0 := \Gamma_l$. Позначимо через $\alpha_j \pi$, $0 < \alpha_j < 2$, кути в точках z_j між кривими Γ_{j-1} і Γ_j , які є зовнішніми відносно області G . Також позначимо через $\bar{G} := G \cup \partial G$ замикання множини G . Покладемо

$$\alpha := \min\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}.$$

Для функції $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ позначимо $\|g\|_G := \sup_{z \in G} |g(z)|$. Нехай \mathbb{P}_n є простором алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$. Метою статті є наближення многочленами функції Рімана f , яка здійснює конформне відображення внутрішності області G в круг $\{\omega: |\omega| < 1\}$ і нормована умовами $f(0) = 0$ та $f'(0) > 0$. У статті [3] ми дослідили наближення такої функції у випадку однієї кутової точки $z_1 = 1$ з зовнішнім кутом $\alpha_1 \pi$, $0 < \alpha_1 < 2$. Зокрема, для величини найкращого наближення

$$E_n(f, G) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|_G \quad (1)$$

в [3] отримана оцінка $E_n(f, G) \leq \frac{c(G)}{n^{\gamma_0}}$, де $\gamma_0 = \min\left\{\frac{\alpha_1}{2 - \alpha_1}, 1\right\}$. Нагадаємо, ця оцінка є посиленням та узагальненням оцінки Гайера [6], яка випливає з одного результату Кореваара [6, с.287]. Більше того, ми отримали точніші, поточкові оцінки різниці $|f(z) - P_n(z)|$. У даній статті узагальнимо ці оцінки на випадок, коли $l > 1$.

Будемо вважати, що мають місце нерівності

$$c \leq |f'(z)| \prod_{j=1}^l |z - z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}} \leq C, \quad z \in \bar{G} \setminus \{z_j\}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (2)$$

Тут і надалі $c = c(G)$ і $C = C(G)$ сталі, які залежать тільки від G . Нагадаємо (див. [1]), що умова (2) виконується, якщо гладкі криві Γ_j , $j = 1, \dots, l$, є, скажімо, кривими Ляпунова, або навіть такими, що задовольняють умову Діні. Справедлива

Теорема 1. Для кожного $n \geq 1$ має місце оцінка

$$E_n(f, G) \leq cn^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Будемо позначати через $j(z)$ індекс найближчої кутової точки до точки z ; якщо таких точок декілька, тоді, для визначеності, через $j(z)$ будемо позначати найменший з таких індексів. Теорема 1 є простим наслідком точнішої теореми 2, яка є основним результатом роботи.

Теорема 2. Для кожного $n \geq l$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що для кожного $z \in G$ мають місце оцінки

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c |z - z_{j(z)}|^{-\frac{1}{2-\alpha_{j(z)}}}, \text{ якщо } |z - z_{j(z)}| \leq n^{-\alpha_{j(z)}} \text{ та } 0 < \alpha_{j(z)} \leq 1, \quad (3)$$

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c |z - z_{j(z)}| n^{\frac{\alpha_{j(z)}(1-\alpha_{j(z)})}{2-\alpha_{j(z)}}}, \text{ якщо } |z - z_{j(z)}| \leq n^{-\alpha_{j(z)}} \text{ та } 1 < \alpha_{j(z)} < 2, \quad (4)$$

$$|f(z) - P_n(z)| \leq \frac{c}{n} |z - z_{j(z)}|^{\frac{2(\alpha_{j(z)}-1)}{\alpha_{j(z)}(2-\alpha_{j(z)})}}, \text{ якщо } |z - z_{j(z)}| > n^{-\alpha_{j(z)}}. \quad (5)$$

2. Допоміжні результати

Для кожного $z \neq z_j$, якщо $\alpha_j \leq 1$, позначатимемо через

$$\varphi(z) := \prod_{j=1}^l |z - z_j|^{1-\alpha_j}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Pi(z) := \prod_{j=1}^l |z - z_j|^{2-\alpha_j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Означення 1. Для $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{C}$ позначимо

$$\rho_n(z) := \begin{cases} n^{-\alpha_{j(z)}}, & \text{якщо } |z - z_{j(z)}| \leq n^{-\alpha_{j(z)}}, \\ \frac{\varphi(z)}{n}, & \text{якщо } |z - z_{j(z)}| > n^{-\alpha_{j(z)}}. \end{cases}$$

Нагадаємо, що функція f здійснює конформне відображення внутрішності області G в одиничний круг $\{\omega: |\omega| < 1\}$ нормоване умовами $f(0) = 0$ та $f'(0) > 0$. Враховуючи теорему Каратеодорі, будемо вважати таку функцію неперервною на \bar{G} і $f(\partial G) = \{\omega: |\omega| = 1\}$.

Лема 1. Для кожного $z \in G$ і $z_0 \in G$ має місце оцінка

$$|f(z) - f(z_0)| \leq c |z - z_0| \Pi(z_0) \left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - z_{j(z_0)}|} \right)^{\frac{\alpha_{j(z_0)}}{2-\alpha_{j(z_0)}}}.$$

Доведення. Для визначеності нехай $j(z_0) = 1$. Зафіксуємо $z \in G$. Розглянемо два випадки. Нехай $j(z) = j(z_0) = 1$. Тоді лема 1 випливає з леми 1 статті [3] із врахуванням оцінки $\prod_{j=2}^l |z_0 - z_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2-\alpha_j}} \geq c$.

Тепер розглянемо другий випадок. Нехай $j(z) \neq 1$. Тоді пункт а) леми 3 статті [5] гарантує існування такої жорданової спрямованої кривої γ з кінцями в точках z_1 і $z_{j(z)}$, що $z \in \gamma$, $z_0 \in \gamma$ і $\gamma \setminus \{z_1, z_{j(z)}\} \subset G$, і для її натуральної параметризації $\zeta: [0; s^0] \rightarrow \gamma$ з умовами $\zeta(0) = z_1$, $\zeta(s^0) = z_{j(z)}$, виконується нерівність $|s' - s| \leq c |\zeta(s') - \zeta(s)|$, де $s', s \in [0; s^0]$.

Нехай $a \in [0; s^0]$ та $b \in [0; s^0]$ такі, що $z_0 = \zeta(a)$ та $z = \zeta(b)$. Позначимо через γ_0 дугу кривої γ з кінцями в точках z_0 і z . Нерівність $|\zeta - z_j| \geq c$, якщо $\zeta \in \gamma$, $j = 1, \dots, l$, $j \neq j(z)$, зумовлює оцінки

$$\Pi(z_0) \leq c |z_0 - z_{j(z)}|^{\frac{\alpha_{j(z)}-1}{2-\alpha_{j(z)}}} |z_0 - z_1|^{\frac{\alpha_1-1}{2-\alpha_1}} \leq c \Pi(z_0), \quad \zeta \in \gamma.$$

$$\text{Тому } |f(z) - f(z_0)| = \left| \int_{z_0}^z f'(\zeta) d\zeta \right| \leq c \int_{\gamma_0} |\zeta - z_1|^{\frac{\alpha_1-1}{2-\alpha_1}} |\zeta - z_{j(z)}|^{\frac{\alpha_{j(z)}-1}{2-\alpha_{j(z)}}} |d\zeta| \leq \left| \int_a^b \frac{1}{s^{2-\alpha_1-1}} (s^0 - s)^{\frac{\alpha_{j(z)}-1}{2-\alpha_{j(z)}}} ds \right| =: \tau.$$

$$\text{Неважко перевірити, що } \tau \leq |s^0 - a|^{\min\left(\frac{\alpha_{j(z)}-1}{2-\alpha_{j(z)}}, 0\right)} |b - a| a^{\frac{\alpha_1-1}{2-\alpha_1}} \left(1 + \frac{|b - a|}{a} \right)^{\frac{\alpha_1}{2-\alpha_1}},$$

$$\text{тоді } \tau \leq |z - z_0| |z_{j(z)} - z_0|^{\frac{\alpha_{j(z)}-1}{2-\alpha_{j(z)}}} |z_1 - z_0|^{\frac{\alpha_1-1}{2-\alpha_1}} \left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - z_1|} \right)^{\frac{\alpha_1}{2-\alpha_1}} \leq c |z - z_0| \Pi(z_0) \left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - z_1|} \right)^{\frac{\alpha_1}{2-\alpha_1}}.$$

Лему 1 доведено.

Негайним наслідком леми 1, означення 1 та нерівності $|z_0 - z_{j(z_0)}| \geq c \frac{\varphi(z_0)}{n} = c \rho_n(z_0)$, якщо $|z_0 - z_{j(z_0)}| \geq n^{-\alpha_{j(z_0)}}$,

є наступна лема.

Лема 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in G$ і $j^0 := j(z_0)$. Тоді

а) якщо $|z - z_0| \geq n^{-\alpha_{j^0}}$, то $|f(z) - f(z_0)| \leq cn^{\frac{\alpha_{j^0}}{2-\alpha_{j^0}}} \rho_n^{\frac{\alpha_{j^0}}{2-\alpha_{j^0}}}(z_0) |z - z_0| \left(1 + \frac{|z - z_0|}{\rho_n(z_0)}\right)^{\frac{\alpha_{j^0}}{2-\alpha_{j^0}}}$, $z \in \bar{G}$,

б) якщо $z \in G$ і $|z - z_{j^0}| \leq |z_0 - z_{j^0}| = n^{-\alpha_{j^0}}$, то $|f(z) - f(z_0)| \leq cn^{\frac{-\alpha_{j^0}}{2-\alpha_{j^0}}}$.

Надалі позначатимемо через $r^* = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil + 1$, де $[x]$ - ціла частина числа, де α визначене в (1). Сформулюємо ще одну лему.

Лема 3. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує такий многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$, що для кожного $z \in G$ виконуються нерівності

$$|f(z) - P_n(z)| \leq cn^{\frac{\alpha_{j(z)}}{2-\alpha_{j(z)}}} \rho_n^{\frac{2}{2-\alpha_{j(z)}}}(z) \tag{6}$$

та для кожного $p = 1, \dots, r^*$ має місце оцінка $|P_n^{(p)}(z)| \leq cn^{\frac{\alpha_{j(z)}}{2-\alpha_{j(z)}}} \rho_n^{\frac{2}{2-\alpha_{j(z)}}-p}(z)$.

Ця лема є узагальненням леми 3 статті [3]. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 9 статті [5] на основі властивостей многочленних ядер Дзядика [2,4], лише замість оцінок леми 5 статті [5] використовуються оцінки з леми 2 даної статті.

3. Доведення теореми 2

З леми 7 статті [5] для кожного $n \geq lr^*$ існує такий многочлен $Q_{j^*,0} \in \mathbb{P}_n$, що виконуються умови $Q_{j^*,0}(z_j) = 0$, коли $j = 1, \dots, l$, $q = 0, 1$, окрім випадку $(j = j^*, q = 0)$ (у цьому випадку $Q_{j^*,0}(z_{j^*}) = 1$) і для кожного $q \in \{0, 1\}$ має місце нерівність

$$|Q_{j^*,0}^{(q)}(z)| \leq c \rho_n^{r^*}(z_{j^*}) \rho_n^*(z) \left(|z - z_{j^*}| + \rho_n(z)\right)^{-(2r^* - p + q)}, \quad z \in \bar{G}. \tag{7}$$

Розглянемо многочлен $Q_n(z) = \sum_{j=1}^l (f(z_j) - P_n(z_j)) Q_{j,0}(z)$, де $P_n \in \mathbb{P}_n$ многочлен із леми 3. Застосовуючи

нерівності (6) та (7), і враховуючи, що $r^* \geq \frac{2}{2-\alpha}$, маємо, що для многочлена Q_n справедливі оцінки

$$|Q_n(z)| \leq c \sum_{j=1}^l n^{\frac{\alpha_{j(z)}}{2-\alpha_{j(z)}}} \rho_n^{\frac{2}{2-\alpha_{j(z)}}}(z_{j(z)}) c \rho_n^{r^*}(z_{j^*}) \rho_n^*(z) \left(|z - z_{j^*}| + \rho_n(z)\right)^{-2r^*} \leq cn^{\frac{\alpha_{j(z)}}{2-\alpha_{j(z)}}} \rho_n^{\frac{2}{2-\alpha_{j(z)}}}(z). \tag{8}$$

З нерівності (7) випливає оцінка

$$|Q'_n(z)| \leq c \sum_{j=1}^l n^{\frac{\alpha_{j(z)}}{2-\alpha_{j(z)}}} \rho_n^{\frac{2}{2-\alpha_{j(z)}}}(z_{j(z)}) c \rho_n^{r^*}(z_{j^*}) \rho_n^*(z) \left(|z - z_{j^*}| + \rho_n(z)\right)^{-(2r^* + 1)}. \tag{9}$$

Зауважимо також, що $Q_n(z_j) = f(z_j) - P_n(z_j)$.

Розглянемо многочлен $R_n(z) := Q_n(z) + P_n(z)$. Для цього многочлена проводимо міркування, аналогічні доведенню теореми 2 статті [3], використовуючи при цьому нерівності леми 3 даної статті замість нерівностей леми 3 статті [3], а також нерівності (8) та (9) замість відповідних нерівностей статті [3]. Як результат отримуємо нерівності

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c |z - z_{j(z)}| \frac{1}{|z - z_{j(z)}|^{2-\alpha_{j(z)}}} + c |z - z_{j(z)}| n^{\frac{\alpha_{j(z)}(1-\alpha_{j(z)})}{2-\alpha_{j(z)}}}, \quad \text{якщо } |z - z_{j(z)}| \leq n^{-\alpha_{j(z)}}$$

$$\text{та } |f(z) - P_n(z)| \leq \frac{c}{n} |z - z_{j(z)}| \frac{2(\alpha_{j(z)} - 1)}{|\alpha_{j(z)}(2-\alpha_{j(z)})|}, \quad \text{якщо } |z - z_{j(z)}| > n^{-\alpha_{j(z)}}.$$

Враховуючи, що

$$|z - z_{j(z)}| \frac{1}{|z - z_{j(z)}|^{2-\alpha_{j(z)}}} \leq |z - z_{j(z)}| n^{\frac{\alpha_{j(z)}(1-\alpha_{j(z)})}{2-\alpha_{j(z)}}}, \quad \text{якщо } 1 \leq \alpha_{j(z)} < 2,$$

і навпаки,

$$|z - z_{j(z)}| \frac{1}{|z - z_{j(z)}|^{2-\alpha_{j(z)}}} \geq |z - z_{j(z)}| n^{\frac{\alpha_{j(z)}(1-\alpha_{j(z)})}{2-\alpha_{j(z)}}}, \quad \text{якщо } 0 < \alpha_{j(z)} \leq 1,$$

отримаємо оцінки (3), (4), (5). Теорема 2 доведена.

4. Висновки

В роботі отримано рівномірну і поточкову оцінки для наближення конформного відображення многочленами в областях з кутами.

1. Алибеков Г. А. Свойства конформного отображения на областях с углами // Вопросы теории приближений функций и её приложение. – К.: Институт математики АН УССР, 1976. – С. 4–18. 2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с. 3. Жеребко Т. М. Про наближення функції Рімана многочленами в областях з ненульовими кутами // Укр. Мат. Журн. – 2011. – Т. 62, № 9. – С. 1357–1362. 4. Шевчук И. А. Приближение на отрезке и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наук. думка, 1992. – 224 с. 5. Abdullayev F. G., Shevchuk I. A. Uniform estimates for polynomial approximation in domains with corners // Journal of Approximation Theory. – 2005. – № 137. – P. 143–165. 6. Gaier D. On the convergence of the Bieberbach Polynomials in regions with corners // Constructive Approximation. – 1988. – № 4. – P. 289–305. 7. Korevaar J. Polynomial and rational approximation in the complex domain // Aspects of contemporary complex analysis (Brannan D. A., Clunie J. G., eds.). – New York: Academic Press. – 1980. – P. 251–292.

Надійшла до редколегії 23.02.2011 р.

УДК 517

О. Пацюк, асп.

МНОЖИНИ J_α -САМОСПРЯЖЕНИХ РОЗШИРЕНЬ СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Досліджено властивості множин J_α -самоспряжених розширень для довільної фундаментальної симетрії J_α із алгебри Кліффорда $Cl_2(J, R)$. Показано існування унітарного відображення між довільними двома такими множинами.

Properties of sets of J_α -self-adjoint extensions for an arbitrary fundamental symmetry J_α of Clifford algebra $Cl_2(J, R)$ is studied. The existence of unitary mapping between two arbitrary such sets is proved.

1. Вступ

Останнім часом J -самоспряженим операторам (самоспряженим у просторі Крейна операторам) приділяється значна увага. Це пов'язане із застосуванням J -самоспряжених операторів із C -симетріями в PT -симетричній квантовій механіці [3], а також із тим, що такі оператори із C -симетріями допускають детальний спектральний аналіз, як і самоспряжені оператори у гільбертовому просторі [2].

У даній статті розглядаються властивості множин J_α -самоспряжених розширень симетричних операторів. Спочатку нагадаємо деякі поняття, пов'язані з J -самоспряженими операторами [1].

Позначимо через H гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) і нетривіальною фундаментальною симетрією J . Оператор J в H називається фундаментальною симетрією, якщо $J = J^*$ і $J^2 = I$. Фундаментальна симетрія J є нетривіальною, якщо $J \neq \pm I$.

Простір H із індефінітним скалярним добутком (індефінітною метрикою) $[\cdot, \cdot]_J := (J\cdot, \cdot)$ називається простором Крейна $(H, [\cdot, \cdot]_J)$.

Оператор A , що діє в H , називається J -самоспряженим, якщо він самоспряжений відносно індефінітної метрики $[\cdot, \cdot]_J$, тобто якщо $A^*J = JA$, де оператор A^* – спряжений до A відносно скалярного добутку (\cdot, \cdot) .

Як відомо, самоспряжені оператори в гільбертовому просторі мають суто дійсний спектр. А от J -самоспряжені оператори A , взагалі кажучи, мають спектр $\sigma(A)$, який лише симетричний відносно дійсної осі. Зокрема, можлива ситуація, коли A має порожню резольвентну множину (тобто $\sigma(A) = C$).

Ми розглядатимемо прості симетричні (відносно початкового скалярного добутку (\cdot, \cdot)) оператори S із індексами дефекту $\langle 2, 2 \rangle$ які комутовують із J :

$$SJ = JS. \tag{1}$$

Нещодавно С. Кужелем і К. Трунком було показано [4], що існування принаймні одного J -самоспряженого розширення A симетричного оператора S із порожньою резольвентною множиною ($\rho(A) = \emptyset$) **еквівалентне** існуванню додаткової фундаментальної симетрії R в H , такої, що

$$SR = RS, \quad JR = -RJ. \tag{2}$$

Фундаментальні симетрії J і R можуть трактуватися як породжуючі елементи комплексної алгебри Кліффорда $Cl_2(J, R) := \text{span}\{I, J, R, iJR\}$. Таким чином, існування J -самоспряжених розширень із порожньою резольвентною множиною для простого симетричного оператора S із властивістю (1) та індексами дефекту $\langle 2, 2 \rangle$ **еквівалентне** комутації S із довільним елементом алгебри Кліффорда $Cl_2(J, R)$.

Отже, для довільної нетривіальної фундаментальної симетрії K , що належить $Cl_2(J, R)$, можна розглядати множину всіх K -самоспряжених розширень S . Це пов'язане із застосуваннями до PT -симетричної квантової механіки, де властивість PT -симетрії псевдоермітових гамільтоніанів може не обов'язково інтерпретуватись у термінах P -самоспряжених операторів. У зв'язку з цим певний інтерес становить вивчення властивостей множин K -самоспряжених розширень оператора S для довільної фундаментальної симетрії K із $Cl_2(J, R)$. Зокрема, природно постає питання про існування унітарного відображення між довільними двома такими множинами.