УДК 532.595

В. Губська, асп.

ДИНАМІКА РЕЗЕРВУАРА З РІДИНОЮ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРИ ОБМЕЖЕННІ РУХУ ПРУЖНІМ ЗАКРІПЛЕННЯМ

Розглянуто задачу про коливання рідини в рухомому резервуарі у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною під дією імпульсної сили при наявності пружного закріплення. Досліджено хвильові рухи рідини і рух резервуару.

We consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of conic shape under action of impulse force and the presence of elastic fixing. Wave motion of liquid and reservoir motion were investigated.

1. Вступ

Розглянемо задачу динаміки рідини з вільною поверхнею при обмеженні руху пружнім закріпленням. Припускаємо, що рідина ідеальна однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. У цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками. Обмежуємось випадком поступального руху резервуара.

У відомих працях Г. С. Нариманова, Б. І. Рабиновича, Л. В. Докучаева, І. О. Луковського, Дж. Майлса, Г. Бауера, О. М. Тимохи, П. С. Ковальчука, О. Фалтінсена, О. С. Лимарченка та інших. розглядалися нелінійні задачі коливань рідини в резервуарах. Так було показано, що варіаційні методи в застосуванні до такого роду задач дають ефективні результати. Дослідження таких задач пов'язані також і з тим, що ці задачі є одним з різновидів некласичних задач Неймана для рівняння Лапласа. Незважаючи на численні публікації в цій галузі задачі динаміки сумісного руху резервуарів з рідиною досліджувалися в недостатній мірі.

Метою статті є побудова ефективної математичної моделі для дослідження нелінійної задачі динаміки сумісного руху системи, що складається з резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею, а також дослідження характерних режимів розвитку коливань системи, рух якої обмежено пружнім закріпленням.

2. Метод дослідження

Розглянемо резервуар у формі усіченого конуса. Рух рідини описується в системі координат, незмінно зв'язаної з резервуаром. Нехай τ – область, яку займає рідина; $\frac{\partial}{\partial n}$ – зовнішня нормаль до поверхні; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x,y,z,t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини, U – потенціальна енергія зовнішніх сил. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$.

Постановка задачі [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S. \tag{4}$$

Тут рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об'ємі рідини τ, (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло – рідина Σ, (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини S, (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини. .

З точки зору аналітичної механіки задача складається з кінематичних умов (механічних в'язей) (1) – (3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Потенціал швидкостей рідини можна представити у наступному вигляді: $\Phi = \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точок області τ, а $\vec{\varepsilon}$ – параметр поступального руху тіла, що несе рідину. Перший член у виразі відповідає хвильовому руху рідини, другий – поступальному руху резервуару.

У випадку порожнин нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає з незбуреною вільною поверхнею. Ця додаткова складність (геометрична нелінійність) не дозволяє в декартовій чи циліндричній системі координат сформулювати задовільний алгоритм розв'язання нелінійних задач для порожнини довільної форми. Оскільки розв'язок задачі динаміки рідини в такій області ускладнено, для опису руху рідини вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина τ:

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \beta = \frac{z}{H}, \tag{5}$$

де через $r = f(z)$ позначимо рівняння твірної порожнини, задане в циліндричній системі координат, H – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає з незбуреною вільною поверхнею рідини S_0.

Система циліндричних координат (r,θ,z) введеною параметризацією замінюється на нову недекартову (криволінійну) (α,θ,β) ($\alpha \in [0,1]$, де $\theta \in [0,2\pi]$, причому в незбуреному стані $\beta \in [-1,0]$. Головна позитивна якість введення нової параметризації полягає в тому, що в новій параметризації внаслідок циліндричності області можливе представлення рівняння вільної поверхні в розв'язаному відносно координати β вигляді: $\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)$. Надалі це дозволяє ефективно застосувати методи теорії збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки резервуара з рідиною.

Постановка задачі Неймана для рівняння Лапласа про рух рідини в нових змінних набуває вигляду

$$\Delta\varphi = 0\,; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - f'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0 \text{ при } r = f(z)\,; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \underline{\frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\text{, при } \beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)\,. \tag{8}$$

Підкреслені члени з'являються внаслідок нециліндричності форми порожнини, яку займає рідина, що відображає недекартовий тип нової параметризації.

Для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського

$$\delta I = 0\text{, де } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt\,,\ \ \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0\,, \tag{9}$$

узагальнена функція Лагранжа може бути записана у вигляді:

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_p(\dot{\varepsilon})^2 - \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - (M_p + M_f)\varepsilon_z g\,, \tag{10}$$

де ρ – густина рідини, M_p – маса резервуара, M_f – маса рідини, g – прискорення вільного падіння.

Наведена постановка задачі про рух обмеженого об'єму рідини в нових змінних по відношенню до варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського являє собою сукупність кінематичних в'язей, які для ефективного застосування варіаційного принципу необхідно виключити до розв'язання варіаційної задачі.

За своїм змістом вихідна задача є задачею Неймана для рівняння Лапласа і вона має бути доповнена умовами розв'язності, які можуть бути записані у вигляді

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma + \int_{\Delta\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma + \int_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = 0\,. \tag{11}$$

З точки зору аналітичної механіки варіації в об'ємі і на різних границях області вважаються незалежними, тому кожен з доданків умови (11) має обертатися в нуль. Фізичний зміст умови (11) полягає у збереженні об'єму рідини у її збуреному русі, які мають виконуватися для довільного закону руху. Перший доданок означає виконання в слабкому сенсі умови неперетікання через незмочену в незбуреному стані стінку баку. Другий доданок означає виконання умови неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребені хвиль. Третя умова відповідає вимозі збереження об'єму рідини в збуреному русі вільної поверхні. Тобто умови розв'язності задачі Неймана приводять до виникнення додаткових кінематичних обмежень руху системи, причому задовольнити ці умови слід на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Слід відзначити, що в класичну постановку задачі (1) – (4) продовження змоченої поверхні $\Delta\Sigma$, куди можуть досягати гребені хвиль, не входить. Проте в збуреному русі системи рідина має не перетікати через поверхню $\Delta\Sigma$. Тому при застосовуванні такої постановки класичного методу, для розв'язання поставленої задачі, виконання цих умов може бути порушене. Для розв'язання нелінійної задачі для подолання такого недоліку був розроблений метод допоміжної області [1]. За методом допоміжної області вводиться додаткове збільшення глибини заповнення резервуару. Далі на основі класичного методу розв'язується задача для області $\tau + \Delta\tau$, де $\Delta\tau$ вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні стінки бака $\Delta\Sigma$ з урахуванням очікуваних амплітуд збурення вільної поверхні. У цьому випадку сингулярні властивості одержаних розв'язків будуть проявлятись в околі максимального підйому поверхні хвилі біля стінки резервуара. Проте, в околі точки рівноважного положення вихідної поверхні, яка тепер є внутрішньою точкою поверхні $\Sigma + \Delta\Sigma$ для області $\tau + \Delta\tau$, розв'язок має регулярні властивості. За допомогою такого прийому особлива точка "піднімається" над реальною поверхнею. Розв'язки для такого положення рідини зносяться на вихідну поверхню.

Для розв'язання задачі скористаємось прямими методами математичної фізики, зокрема, методом Канторовича. При цьому розв'язок задачі на вільній поверхні розкладається в ряд по функціях, отриманих з розв'язку відповідної лінійної задачі, а розв'язок для потенціалу швидкостей будується з такими додатковими вимогами, щоб ці функції задовольняли умові неперетікання на $\Delta\Sigma$. Класична задача про визначення частот і форм коливань рідини має вигляд

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\varphi \text{ на } S_0\text{, або } \delta I = 0\text{, де } I = \int_{\tau_0}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau - \lambda\int_{S_0}\varphi^2 ds\,. \tag{12}$$

Для знаходження мінімуму функціоналу (12) скористаємось методом Рітца. Будемо шукати функцію φ у вигляді послідовності лінійних комбінацій координатних функцій w_k. Тобто для чисельної реалізації використаємо як координатні функції такі фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа $\varphi \sim w_k^{(m)}(r,z)\frac{\sin m\theta}{\cos m\theta}$, де $w_k^{(m)}(r,z)$ є системою гармонічних поліномів [3], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетворених до циліндричної системи. Функції $w_k^{(m)}$ взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення. Задача зводиться до розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення $Ax - \lambda Bx = 0,$ для якої коефіцієнти визначаються у вигляді квадратур від базисних функцій.

Для побудови координатних функцій для розв'язку нелінійної задачі був використаний метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу не враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні, враховує залежність розв'язку задачі від характеристик $\Delta\Sigma$. Для оцінки точності отриманого розв'язку приймалася похибка у вигляді $\delta = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} \Big/ \max\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_0}$. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняють умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. За умови використання методу допоміжної області, похибки умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів.

Розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини ξ і потенціалу швидкостей φ аналогічно [1, 2] подамо у вигляді:

$$\xi = \overline{\xi}(t) + a\overline{\psi}(\alpha)T(\theta)\,;\ \ \varphi = b\psi(\alpha,\beta)T(\theta)\,, \tag{13}$$

де $\overline{\psi}(\alpha) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$, $\psi(\alpha,\beta)$ отримуються з розв'язку лінійної задачі на власні значення. Кут θ відділено як співмножник $T_i(\theta)$ для вісесиметричної вихідної області. $\psi_i(\alpha,\beta)$ є гармонічними і згідно вимог умов розв'язності (6)–(8), уточнено задовольняють вимогу неперетікання на змоченій границі $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$.

За незалежні змінні обираються параметри ξ та $\vec{\varepsilon}$, а змінна φ вважається залежною. Сукупність амплітудних параметрів a_i розкладу збуреної вільної поверхні рідини в ряд за формами вільних коливань вважається незалежною, а параметри b_i розкладу в ряд потенціалу швидкостей, вважаються залежними від a_i, тобто $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$.

Згідно принципів аналітичної механіки задача вимагає виключення кінематичної крайової умови на вільній поверхні, що зумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Виключення кінематичної граничної умови і вимоги збереження об'єму рідини на вільній поверхні проводиться на основі методу Гальоркіна [5].

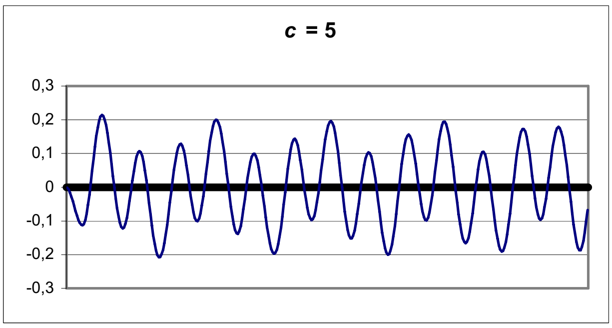
$$\begin{gathered} b_p^{(1)} = \dot{a}_p;\ b_p^{(2)} = \sum_{i,j}\dot{a}_i a_j \gamma^{\text{o}}_{ijp};\ b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k \delta^{\text{o}}_{ijkp};\ b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l}\dot{a}_i a_j a_k a_l h^{\text{o}}_{ijklp}. \\ \overline{\xi}_1 = 0;\quad \overline{\xi}_2 = -\frac{e_2}{e_1}\sum_{i,j} a_i a_j \beta^{\nu}{}_{ij};\quad \overline{\xi}_3 = -\frac{e_3}{e_1}\sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma^{\nu}_{ijk};\ \overline{\xi}_4 = -\frac{e_4}{e_1}\sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta^{\nu}_{ijkl}. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким чином, параметри $\overline{\xi}$ і b_i як залежні змінні виключаються з розгляду. Це дозволяє перейти до застосування варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського для вільної системи, рух якої визначається незалежними параметрами a_i і $\vec{\varepsilon}$. На основі рівнянь Лагранжа II роду одержимо таку математичну модель сумісного руху системи "резервуар-рідина" в амплітудних параметрах a_i та параметрах руху тіла, яке несе $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k,t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k,t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k,\dot{a}_l,t)\,,\ \ r = \overline{1, N+3}\,. \tag{15}$$

Вирази для p_{rn}, q_r, де p_{rn} – квадратна матриця, q_r – вектор розмірності $N+3$, записуються [1] через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей $\dot{a}_j$.

Розглянемо тестові приклади сумісного руху резервуару з рідиною під дією імпульсної сили при наявності пружного закріплення у вигляді пружини. На рис. 1 – 4 подано графіки зміни амплітуди коливань рідини за першою формою під дією імпульсної сили для двох випадків жорсткості пружини c: а) при наявності поновлюючої сили і відсутності тертя (рис. 1); 2. При наявності і поновлюючої сили і сили тертя (рис. 2). Імпульсна сила, величиною 0,9 Н, діє протягом 0,5 с. Розглянуто випадки для жорсткості пружини 5 і 10. Часовий проміжок розвитку коливань становив 15 с. Тестові приклади розглянуто для усіченого конуса з радіусом нижньої основи 0,2 м і верхньої – 1 м.



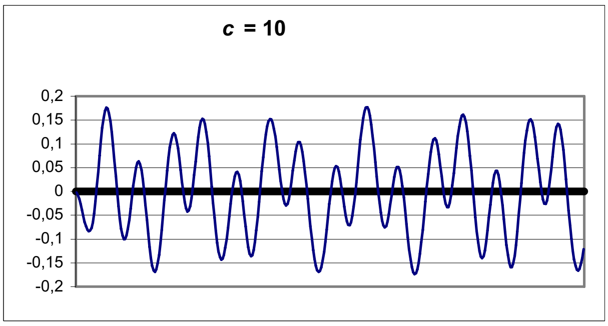
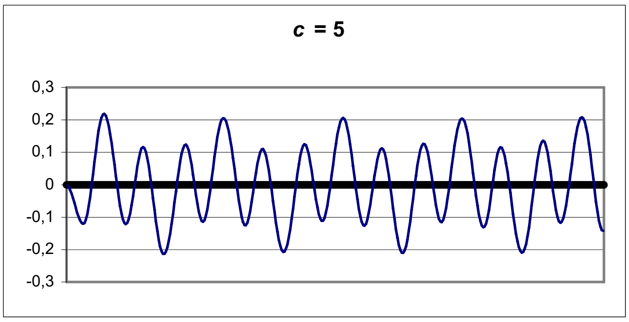


Рис. 1. Зміна амплітуди коливань рідини a_1 з часом при наявності поновлюючої сили



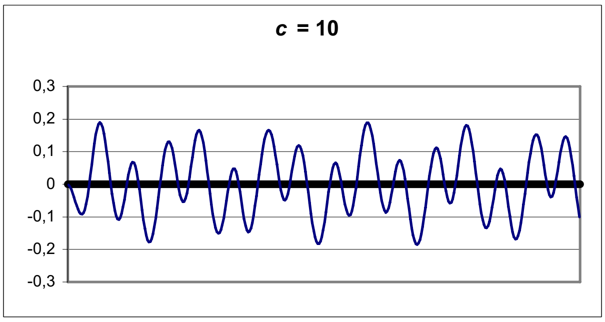


Рис. 2. Зміна амплітуди коливань рідини a_1 з часом при наявності поновлюючої сили і сили тертя

Результати тестових прикладів показали, що в обох випадках при дії імпульсної сили на резервуар амплітуди хвиль на вільній поверхні зменшуються зі збільшенням жорсткості пружини. Відбувається процес енергообміну між формами коливань, в законі зміни амплітуди присутня часова модуляція. Для випадку звичайного конуса з напівкутом 45^o отримані розв'язки співпадають з відомими розв'язками [1].

3. Висновки

Дослідження показали, що розроблена модель дає результати з придатною точністю для випадку усіченого конічного резервуару і більш повно враховує нелінійний характер розвитку процесів і енергообміну між формами коливань рідини і рухом рідини і резервуару. Виконано контроль точності отриманих розв'язків. Для задач кінематичного і динамічного збудження руху резервуару з рідиною показано як жорсткість пружини впливає на енергообмін між формами коливань і розвиток динамічних процесів.

1. *Лимарченко О. С., Ясинский В. В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ "КПИ", 1997. – 348 с. *2. Лимарченко О. С., Семенова И. Ю.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2006. – Т. 3, № 4. – С. 374–388. *3. Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. *4. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с. *5. Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge University Press, 2005. – 950 p.

Надійшла до редколегії 25.02.2011 р.

УДК 532.5

К. К. Косткін, асп.

РУХ РІДИНИ В ОКОЛІ ВИХРОВОЇ ДОРІЖКИ ФОН КАРМАНА

Розглянуто дві нескінченні вихрові структури, кожна з яких складається з точкових вихорів, що розташовані на двох паралельних прямих. Досліджено рух вихрових структур та рідини в їх околі. Отримано рівняння ліній току та побудовано зображення ліній току.

Consider two infinite vortex structure. Each of which consists of point vortices are located on two parallel lines. Studied the movement of vortex structures and movement of fluids in their vicinities. Obtained the equations of the streamlines and built their image.

1. Вступ

В 1906 році Бернаром були проведені перші досліди, спрямовані на вивчення вихрових явищ поза рухомими тілами. Зазвичай рухомим тілом був циліндр, чи криловий профіль. При достатньо великій швидкості руху, поза тілом починають утворюватися вихори, почергово справа та зліва, рідше парами. На початку вони віддаляються від тіла з деякою швидкістю, поступово ця швидкість зменшується, в той час як вихори дещо розходяться. На деякій відстані поза тілом встановлюється певна усталена відстань між вихорами, вихори розташовуються в шаховому, чи в лінійному порядку. Також вихори обох рядів мають протилежній напрямок обертання. Відстань між рядами вихорів не залежить від швидкості, а лише від ширини тіла. Надалі подібні досліди проводились Карманом, Рубахом та рядом інших вчених.

Вихрова доріжка Кармана складається з двох паралельних вихрових ланцюжків, що розташовані на відстані b один від одного, відстань між сусідніми вихорами дорівнює a. Один ланцюжок складається з вихорів інтенсивності χ, інший – з вихорів інтенсивності $-\chi$. Комплексний потенціал руху рідини поза вихором інтенсивності χ, центр якого знаходиться в точці z_0, можна відшукати за рівнянням:

$$\omega = i\chi \ln(z - z_0) \quad (1)$$

Комплексний потенціал $2n+1\,(n \to \infty)$ вихорів, що розташовані у один ланцюжок, використовуючи (1) можна обрахувати як:

$$\omega_n = i\chi \ln(z) + i\chi \ln(z \pm a) + \ldots + i\chi \ln(z \pm na)$$

Спрощуючи цей вираз, можемо записати:

$$\omega_n = i\chi \ln \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).$$

Досліджуючи рух, будемо користуватися основною теоремою Томсона. У роботі [2] було показано що, ланцюжок не рухається, так як в силу симетрії всі вихорі знаходяться в стані спокою.