стору послідовностей обмежених функцій. Доведення існування розв'язку задачі Коші таких рівнянь ґрунтується на методі переходу до термодинамічної границі. Зауважимо, що асимптотика побудованого розв'язку для виділеної частинки (7.а) в скейлінговій дифузійній границі [13] описуються кінетичним рівнянням Фоккера-Планка.

1. *Боголюбов Н. Н.* О стохастических процессах в динамических процесах // Физика елементарных частиц и атомного ядра. – 1978. – Т. 9, Вип. 4. – С. 501–579. 2. *Герасименко В. И.* О решениях уравнений Боголюбова для одномерной системы упругих шаров // ТМФ. – 1992. – Т. 91, № 1. – С. 120–128. 3. *Герасименко В. І., Сташенко М. О.* Нерівноважні кластерні розклади несиметричних систем частинок // Наук. Вісник ВДУ. – 2002. – № 4. – С. 5. 4. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Записки кафедри математичної фізики АН УРСР. – 1939. – Т. 4. – С. 5. 5. *Лебовиц Л., Синай Я., Чернов Н.* Динамика масивного поршня, погруженного в идеальный газ // УМН. – 2002. – Т. 57, Вып. 6. – С. 3–85. 6. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // УМН – 1990. – Т. 45, Вып.3. – С. 135–182. 7. *Синай Я. Г.* Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц // ТМФ. – 1999. – Т. 121, № 1. – С. 110–116. 8. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – P. 252. 9. *de Smedt P., Dürr P. Lebowitz J. L., Liverani C.* Quantum system in contact with a thermal environment rigorous treatment of a simple model // Commun. Math. Phys. – 1988. – Vol. 120. – P. 195–231. 10. *Erdös L.* Classical and quantum Brownian motion // Ann. Inst. H. Poincare. – 2007. – Vol. 8. – P. 621–685. 11. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 9861–9872. 12. *Petrina D. Ya.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. – Kyiv: Inst. Math., 2008. – P. 400. 13. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Review of Modern Physics. – 1980. – Vol. 53. – P. 569–615.

Надійшла до редколегії 21.10.2010 р.

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, проф., Ю. Ю. Федчун, студ.

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОХІДНИХ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ

Ієрархія рівнянь ББГКІ та дуальна ієрархія еволюційних рівнянь, якими описується еволюція нескінченночастинкових систем, сформульовані як еволюційні рівняння в функціональних похідних. На основі такого підходу побудовано розв'язки задач Коші для ієрархій таких рівнянь. Отримані результати узагальнено для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

The BBGKY hierarchy and the dual BBGKY hierarchy which describe the evolution of infinite–particle systems are formulated as evolution equations in the functional derivatives. On the base of such approach solutions of the Cauchy problem of these hierarchies are constructed. The obtained results are generalized on systems with many–particle interaction potential.

1. Вступ

Як відомо, підхід до формулювання рівнянь, якими описуються системи з нескінченним числом ступенів вільності, наприклад, в квантовій теорії поля, у формі рівнянь у функціональних похідних та їх розв'язків за допомогою функціональних інтегралів виявився адекватним і продуктивним. Витоки цей підхід бере з [1 – 4], де рівняння у функціональних похідних використовувались при дослідженні багатокомпонентних систем. В фундаментальних працях М. Боголюбова [1], [2] ієрархію рівнянь ББГКІ сформульовано у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних (s –частинкових) функцій розподілу, що дозволило обґрунтувати рівняння еволюції станів та існування рівноважних станів нескінченночастинкових систем. Пізніше на основі цих праць в [5] вперше було знайдено представлення для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ побудоване не за теорією збурень [6].

У даній статті дуальна ієрархія рівнянь ББГКІ [7] сформульована у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних і на основі такого підходу побудовано розв'язок задачі Коші для ієрархії таких рівнянь. У статті також за допомогою твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу побудовано загальне представлення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ, яке в інший спосіб було встановлено в [6], [8], [9].

2. Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних

Розглянемо систему нефіксованого числа однакових частинок в просторі $\mathbb{R}^3$, з гамільтоніаном $n \geq 0$ частинкової системи $H_n = \sum_{i=1}^{n} K(x_i) + \sum_{i<j=1}^{n} \Phi(q_i - q_j)$, де $K(x_i) = \frac{p_i^2}{2m}$ (великий нерівноважний канонічний ансамбль [6]). Нехай u – гладка дійсна інтегровна функція. Розглянемо функціонал

$$(F(t),u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int F_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \dots dx_n, \tag{1}$$

який є твірним функціоналом для маргінальних функцій розподілу, тобто s –частинкова функція розподілу $F_s(t, x_1, \dots, x_s)$ визначається як функціональна похідна (похідна Ґато) s –го порядку цього функціоналу

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \frac{\delta^s (F(t),u)}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_s)} |_{u=0} \; . \tag{2}$$

Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу має вигляд [1],[5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(t),u) = \int \left\{ K(x_1), \frac{\delta (F(t),u)}{\delta u(x_1)} \right\} (u(x_1)+1) dx_1 + \frac{1}{2!} \int \int \left\{ \Phi(q_1 - q_2), \frac{\delta^2 (F(t),u)}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} \right\} \prod_{i=1}^{2} (u(x_i)+1) dx_1 dx_2 \tag{3}$$

де $\{\cdot,\cdot\}$ – дужки Пуассона.

Встановимо зв'язок між твірним функціоналом

$$(D(t),\omega) \doteq (D(t),1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_n(t,x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\omega(x_i)dx_1\ldots dx_n \tag{4}$$

для послідовності густин функцій розподілу $D(t)=(D(t),1)^{-1}(1,D_1(t,x_1),\ldots,D_n(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots)$, які визначаються задачею Коші для рівнянь Ліувілля, і твірним функціоналом для маргінальних функцій розподілу (1), які визначаються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Справедлива рівність

$$(F(t),u)=(D(t),u+1), \tag{5}$$

де послідовність $F(t)=e^{a}D(t)$ покомпонентно має вигляд

$$F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=(e^{a}D(t))_s(x_1,\ldots,x_s)\doteq(D(t),1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_{s+n}(t,x_{s+1},\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}.$$

Дійсно, внаслідок симетричності функцій відносно перестановки аргументів справедливі такі рівності:

$$(F(t),u)=(D(t),1)^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_{s+n}(t,x_{s+1},\ldots,x_{s+n})\prod_{i=1}^{s}u(x_i)dx_1\ldots dx_{s+n}=$$

$$=(D(t),1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_n(t,x_1,\ldots,x_n)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n}u(x_{i_1})\ldots u(x_{i_k})dx_1\ldots dx_n=$$

$$=(D(t),1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_n(t,x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(u(x_i)+1)dx_1\ldots dx_n=(D(t),u+1).$$

Зауважимо, що ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних (3) може бути побудована з послідовності рівнянь Ліувілля в функціональних похідних на основі рівності (5).

Використовуючи співвідношення (5), побудуємо розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Розглянемо послідовність

$$S(-t)D(0)=(D(t),1)^{-1}(1,S_1(-t)D_1(0,x_1),\ldots,S_n(-t)D_n(0,x_1,\ldots,x_n),\ldots),$$

де еволюційним оператором $S_n(-t)$ визначається розв'язок задачі Коші для рівняння Ліувілля для системи n частинок з початковою умовою $D_n(0)$ [6]. Справедлива рівність

$$(F(t),u)=(S(-t)D(0),u+1)=(e^{a}g(S(-t)D(0)),u),$$

де функціонал $(e^{a}g(S(-t)D(0)),u)$ визначається таким розкладом

$$\begin{aligned}(e^{a}g(S(-t)D(0)),u)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\sum_{P:(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_j X_j}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\times\\ \times\prod_{X_j\subset P}S_{|\theta(X_j)|}(-t,\theta(X_j))D_{|\theta(X_j)|}(0,\theta(X_j))\prod_{i=1}^{s}u(x_i)dx_1\ldots dx_{s+n}.\end{aligned} \tag{6}$$

У виразі (6) використано такі позначення: $X\setminus Y\equiv(x_{s+1},\ldots,x_{s+n})$, $\{Y\}$ – множина, що складається з одного елемента, яким є множина $Y=(x_1,\ldots,x_s)$, тобто $|\{Y\}|=1$, та $\sum_{P:(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини $(\{Y\},X\setminus Y)$ на $|P|>1$ непорожніх підмножин $X_i\subset(\{Y\},X\setminus Y)$, що взаємно не перетинаються. На множині аргументів визначимо відображення декластеризації $\theta:(\{Y\})\to Y$ такою формулою: $\theta(\{Y\})=Y$. Підсумовуючи відповідні члени з функціоналу (6) та, враховуючи рівність [10]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\ldots\int\sum_{P:(\{X\},x_{s+n+1},\ldots,x_{s+n+k})=\bigcup_j X_j}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\prod_{X_j\subset P}D_{|\theta(X_j)|}(0,\theta(X_j))dx_{s+n+1}\ldots dx_{s+n+k}=F_{s+n}(0,X),$$

остаточно маємо

$$(F(t),u)=(e^{a}g(S(-t)D(0)),u)=(e^{a}\mathfrak{A}(-t)F(0),u).$$

Послідовність $e^{a}\mathfrak{A}(-t)F(0)$ існує [8] і визначається таким розкладом

$$(e^{a}\mathfrak{A}(-t)F(0))_s(Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)F_{s+n}(0,X)dx_{s+1}\ldots dx_{s+n},$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ – кумулянт $(1+n)$–го порядку еволюційних операторів $S_n(-t)$

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)=\sum_{P:(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\prod_{X_i\subset P}S_{|\theta(X_i)|}(-t,\theta(X_i)). \tag{7}$$

Використовуючи для нормуючого множника в функціоналі $(S(-t)D(0),u+1)$ рівність [6]

$$(D(t),1)=(D(0),1)$$

в подібний спосіб виводимо відоме представлення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ [6]

$$(F(t),u)=(S(-t)D(0),u+1)=(e^{a}U(-t)F(0),u), \tag{8}$$

де $U_{1+n}(-t)$ – редукований кумулянт $(1+n)$–го порядку еволюційних операторів $S_n(-t)$

$$U_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}S_{s+n-k}(-t,Y,x_{s+1},\dots,x_{s+n-k}).$$

Розв'язок (8), що побудований не за теорією збурень, вперше отримано в роботі [5]. Застосовуючи аналоги формул Дюамеля до кумулянтів груп еволюційних операторів рівнянь Ліувілля, побудований розклад (7),(7) можна подати як ряд теорії збурень (ряд ітерацій) ієрархії рівнянь ББГКІ [10].

Узагальнимо рівняння (3) для багаточастинкового потенціалу взаємодії, тобто для систем частинок з гамільтоніаном

$$H_n(x_1,\dots,x_s)=\sum_{i=1}^{n}K(x_i)+\sum_{k=2}^{n}\sum_{1=i_1<\dots<i_k}^{n}\Phi^{(k)}(q_{i_1},\dots,q_{i_k}). \tag{9}$$

Для таких систем частинок ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(t),u)=\int\left\{K(x_1),\frac{\delta(F(t),u)}{\delta u(x_1)}\right\}(u(x_1)+1)dx_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int\left\{\Phi^{(n)}(q_1,...,q_n),\frac{\delta^n(F(t),u)}{\delta u(x_1)\dots\delta u(x_n)}\right\}\prod_{i=1}^{n}(u(x_i)+1)dx_1\dots dx_n. \tag{10}$$

Дійсно, в термінах маргінальних функцій розподілу (2) еволюційне рівняння в функціональних похідних (10) представляється у формі ієрархії рівнянь ББГКІ [12]

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(t,Y)=\{H_s,F_s(t,Y)\}+\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\dots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_{s+1}\dots dx_{s+n}\left\{\Phi^{(n)}(q_{i_1},\dots,q_{i_k},X\setminus Y),F_{s+n}(t,X)\right\}, \tag{11}$$

де використано такі позначення: $Y\equiv(x_1,\dots,x_s)$, $X\equiv(x_1,\dots,x_{s+n})$.

3. Дуальна ієрархія ББГКІ в функціональних похідних

Розглянемо функціонал, який є твірним функціоналом для послідовності маргінальних спостережуваних $B(t)=(B_0,B_1(t,x_1),\dots,B_n(t,x_1,...,x_n),\dots)$

$$(B(t),\nu)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int B_n(t,x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\nu(x_i)dx_1\dots dx_n, \tag{12}$$

де ν – гладка дійсна інтегровна функція. Функціонал (12) існує для обмежених функцій $B_n(t)$. Маргінальна s–частинкова спостережувана $B_s(t,x_1,\dots,x_s)$ визначається як функціональна похідна (похідна Ґато) s–го порядку функціоналу (12)

$$B_s(t,x_1,\dots,x_s)=\frac{\delta^s(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)...\delta\nu(x_s)}\Big|_{\nu=0}. \tag{13}$$

Встановимо зв'язок твірного функціоналу

$$(A(t),\mu)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int A_n(t,x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\mu(x_i)dx_1\dots dx_n \tag{14}$$

послідовності спостережуваних $A(t)=(A_0,A_1(t,x_1),\dots,A_n(t,x_1,\dots,x_n),\dots)$, які визначаються задачею Коші для рівнянь Ліувілля, та твірного функціоналу (12) маргінальних спостережуваних $B(t)$, які визначаються задачею Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ [7].

Справедлива рівність

$$(B(t),\nu)=e^{-\int\nu(x)dx}(A(t),\nu), \tag{15}$$

де послідовність $B(t)=e^{-a^+}A(t)$ покомпонентно має вигляд

$$(e^{-a^+}A(t))_s(Y):=\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j_1\neq\dots\neq j_n=1}^{s}A_{s-n}(t,Y\setminus(x_{j_1},\dots,x_{j_n})),\quad s\geq 1. \tag{16}$$

Дійсно, внаслідок симетричності функцій відносно перестановки аргументів справедливі такі рівності:

$$(B(t),\nu)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\dots\int\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j_1\neq\dots\neq j_n=1}^{s}A_{s-n}(t,(x_1,\dots,x_s)\setminus(x_{j_1},\dots,x_{j_n}))\prod_{i=1}^{s}\nu(x_i)dx_1\dots dx_s=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\int\dots\int\prod_{i=1}^{s}\nu(x_i)dx_1\dots dx_s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int A_n(t,x_1,\dots,x_n)\prod_{j=1}^{n}\nu(x_j)dx_1\dots dx_n=e^{-\int\nu(x)dx}(A(t),\nu).$$

Побудуємо еволюційне рівняння в функціональних похідних для функціоналу (12) на основі рівняння Ліувілля в функціональних похідних для твірного функціоналу $(A(t),\nu)$ спостережуваних. Оскільки внаслідок співвідношення (15) справедливі рівності

$$\frac{\delta(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}=e^{\int\nu(x)dx}(\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}+(B(t),\nu)),\quad \frac{\delta^2(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)\delta\nu(x_2)}=e^{\int\nu(x)dx}(\frac{\delta^2(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}+(B(t),\nu)),$$

та враховуючи рівності

$$\int\{(B(t),\nu)),K(x_1)\}\nu(x_1)dx_1=0,\ \int\int\{(B(t),\nu)),\Phi(q_1-q_2)\}\nu(x_1)\nu(x_2)dx_1dx_2=0,$$

для твірного функціоналу (12) маємо:

$$e^{\int\nu(x)dx}\frac{\partial}{\partial t}(B(t),\nu)=\frac{\partial}{\partial t}(A(t),\nu)=$$
$$=\int\left\{\frac{\delta(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)},K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\delta^2(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)\delta\nu(x_2)},\Phi(q_1-q_2)\right\}\nu(x_1)\nu(x_2)dx_1dx_2=$$
$$=\int\left\{e^{\int\nu(x)dx}(\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}),K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\left\{e^{\int\nu(x)dx}(\frac{\delta^2(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}),\Phi(q_1-q_2)\right\}\nu(x_1)\nu(x_2)dx_1dx_2.$$

Таким чином, дуальна ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних у випадку систем частинок з парним потенціалом взаємодії має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(B(t),\nu)=\int\left\{\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)},K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\delta^2(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_2)}+\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)}\right\}\nu(x_1)\nu(x_2)dx_1dx_2.\quad (17)$$

Рівняння (17) можна також безпосередньо отримати з означення функціоналу (12) та дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ.

Побудуємо еволюційне рівняння в функціональних похідних для твірного функціоналу $(B(t),\nu)$, враховуючи зв'язок функціоналів (14) і (12) для потенціалу взаємодії загального виду (9). Аналогічно випадку парного потенціалу взаємодії маємо:

$$e^{\int\nu(x)dx}\frac{\partial}{\partial t}(B(t),\nu)=\frac{\partial}{\partial t}(A(t),\nu)=\int\left\{\frac{\delta(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)},K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\left\{\frac{\delta^n(A(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)...\delta\nu(x_n)},\Phi^{(n)}(q_1,...,q_n)\right\}\prod_{i=1}^{n}\nu(x_i)dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int\left\{e^{\int\nu(x)dx}\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)},K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\left\{e^{\int\nu(x)dx}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n}\frac{\delta^k(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_{i_1})\ldots\delta\nu(x_{i_k})},\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n)\right\}\prod_{i=1}^{n}\nu(x_i)dx_1\ldots dx_n.$$

Отже рівняння в функціональних похідних для твірного функціоналу (12) у випадку багаточастинкового потенціалу взаємодії має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(B(t),\nu)&=\int\left\{\frac{\delta(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_1)},K(x_1)\right\}\nu(x_1)dx_1+\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n}\frac{\delta^k(B(t),\nu)}{\delta\nu(x_{i_1})\ldots\delta\nu(x_{i_k})},\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n)\right\}\prod_{i=1}^{n}\nu(x_i)dx_1\ldots dx_n.\end{aligned}\quad (18)$$

Еволюційне рівняння (18) в термінах маргінальних спостережуваних (13) є ієрархією рекурентних еволюційних рівнянь, а саме дуальною ієрархією рівнянь ББГКІ для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії [11], [12]

$$\frac{\partial}{\partial t}B_s(t,Y)=\{B_s(t,Y),H_s\}+\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{s}\frac{1}{(k-n)!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_k=1}^{s}\left\{B_{s-n}(t,Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),\Phi^{(k)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})\right\}.\quad (19)$$

Побудуємо розв'язок задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (19), використовуючи співвідношення (15). Введемо послідовність

$$S(t)A(0)=(A_0,S_1(t)A_1(0,x_1),\ldots,S_n(t)A_n(0,x_1,\ldots,x_n),\ldots),$$

де еволюційним оператором $S_n(t)$ визначається розв'язок задачі Коші для рівняння Ліувілля для спостережуваних системи n частинок з початковою умовою $A_n(0)$ [6]. Справедливі такі рівності

$$(B(t),\nu)=e^{-\int\nu(x)dx}(S(t)A(0),\nu)=(e^{-a^+}S(t)A(0),\nu),$$

де функціонал $(e^{-a^+}S(t)A(0),\nu)$ визначається таким розкладом

$$(e^{-a^+}S(t)A(0),\nu)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\ldots\int\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^{s-n}}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}(S_{s-n}(t)A_{s-n}(0))(Y\diagdown(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}))\prod_{i=1}^{s}\nu(x_i)dx_1\ldots dx_s.$$

Згідно означення (16) послідовності початкових даних $A(0)=e^{a^+}B(0)$, тобто

$$A_{s-n}(0,Y\diagdown(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}))=\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{l_1\neq\ldots\neq l_k=1,\\ l_1,\ldots,l_k\neq j_1,\ldots,j_k}}^{s}B_{s-n-k}(0,Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})\setminus(x_{l_1},\ldots,x_{l_k})),$$

справедлива така рівність

$$(e^{-a^+}S(t)A(0),\nu)=(e^{a^+}U(t)B(0),\nu). \tag{20}$$

Послідовність $e^{a^+}U(t)B(0)$ в функціоналі (20) покомпонентно визначається таким виразом

$$(e^{a^+}U(t)B(0))_s(Y)=$$
$$=\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}U_{1+n}(t,\{Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})\},x_{j_1},\ldots,x_{j_n})B_{s-n}(0,Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),$$

де $U_{1+n}(t)$ – редукований кумулянт $(1+n)$–го порядку еволюційних операторів $S_n(t)$:

$$U_{1+n}(t,\{Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})\},x_{j_1},\ldots,x_{j_n})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}S_{s-n+k}(t,Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}))$$

та використано позначення з попереднього розділу. Оскільки для функціоналу (20) справедливе еквівалентне представлення

$$(e^{a^+}U(t)B(0),\nu)=(e^{a^+}\mathfrak{A}(t)B(0),\nu),$$

де послідовність $e^{a^+}\mathfrak{A}(t)B(0)$ покомпонентно визначається таким виразом

$$(e^{a^+}\mathfrak{A}(t)B(0))_s(t,Y)=\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})\},x_{j_1},\ldots,x_{j_n})B_{s-n}(0,Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})), \tag{21}$$

де оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ – кумулянт $(1+n)$–го порядку (7) еволюційних операторів $S_n(t)$, то остаточно маємо

$$(B(t),\nu)=(e^{a^+}\mathfrak{A}(t)B(0),\nu).$$

Дійсно, для кумулянта $(1+n)$–го порядку (7) еволюційних операторів $S_n(t)$ справедливе таке представлення через кумулянти 1–го порядку, які не залежать від змінних $Y\setminus X\equiv(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-n}})$,

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus X\},X)=\sum_{Z\subset X}\mathfrak{A}_1(t,\{Y\setminus X\cup Z\})\sum_{P:X\setminus Z=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|}|P|!\prod_{i=1}^{|P|}\mathfrak{A}_1(t,\{X_i\}),$$

де $\sum_{Z\subset X}$ – сума по всіх можливих підмножинах $Z\subset X$ множини X. Тоді враховуючи тотожність

$$\sum_{P:X\setminus Z=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|}|P|!\prod_{i=1}^{|P|}\mathfrak{A}_1(t,\{X_i\})f_{s-n}(Y\setminus X)=\sum_{P:X\setminus Z=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|}|P|!f_{s-n}(Y\setminus X)$$

та рівність

$$\sum_{P:X\setminus Z=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|}|P|!=(-1)^{|X\setminus Z|},$$

для розкладу (21) отримуємо представлення (20).

Таким чином, маргінальні s – частинкові спостережувані (13), які є розв'язком задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (19), визначаються з функціоналу $(e^{a^+}\mathfrak{A}(t)B(0),\nu)$ розкладами (21).

4. Висновки

Ієрархії еволюційних рівнянь систем взаємодіючих частинок, сформульовано у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для відповідних твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описується еволюція станів або спостережуваних.

На основі встановленого зв'язку між твірними функціоналами для послідовностей густин функцій розподілу і маргінальних функцій розподілу, а також зв'язку між твірними функціоналами для послідовностей спостережуваних та маргінальних спостережуваних, побудовано розв'язки не за теорією збурень задачі Коші відповідно для ієрархії рівнянь ББГКІ та дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ. Побудовані розв'язки представляються розкладами по групах частинок, еволюція яких описується відповідного порядку кумулянтом груп еволюційних операторів систем скінченого числа частинок.

1. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 119 с. 2. *Боголюбов М. М.* Метод функціональних похідних в статистичній механіці // Зб. праць ІМ АН УРСР. – 1947. – Т. 8. – С. 177–189. 3. *Gronwall T. H.* A functional equation in the kinetic theory of gases // Annals of Mathematics. – 1915. – Vol. 17. – P. 1–4. 4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегро и интегро–дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с. 5 *Lewis R. L.* Solution of the equations of statistical mechanics // J. Math. Phys. – 1960. – Vol. 2. – P. 222–231. 6. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many–particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p. 7. *Borgioli G., Gerasimenko V. I.* The dual BBGKY hierarchy for the evolution of observables // Riv. Mat. Univ. Parma. – 2001.– Vol. 4. – P. 251–267. 8. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V.* Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations // Ukrainian Math. J. – 2002. – Vol. 54, № 10. – P. 1583–1601. 9. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 9861–9872. 10. *Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.* Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles // Math. Meth. Appl. Sci. – 2010. – Vol. 33, № 18. – P. 76–93. 11. *Borgioli G., Gerasimenko V. I.* Initial–value problem of the quantum dual BBGKY hierarchy. – Nuovo Cimento. – 2010. – Vol. 33 C, №1. – P. 71–78. 12. *Gerasimenko V. I.* Groups of operators for evolution equations of quantum many–particle systems // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – Vol. 191. – P. 341–355.

Надійшло до редколегії 25.11.2010 р.

УДК 532.5

М. Семків, асп.

ЛОКАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО ПОШИРЕННЯ ОДНОРІДНИХ ТА ІНТЕРФЕЙСНИХ ТРІЩИН

Проведено аналітичні дослідження динамічного поширення однорідних тріщин, а також поширення тріщин вздовж межы розділу двох середовищ з різними механічними характеристиками. Отримано показник сингулярності напружень і вирази для кутового розподілу сингулярних членів напружень для різних швидкостей поширення тріщин. Визначені також критичні швидкості поширення тріщини.

An analytical investigation of dynamic uniform crack and of dynamic crack propagation along an interface between two media with different mechanical properties is performed. We assume that cracks faces do not contact. Power singularity and angular distributions of the stress singular terms near the crack tip for various combinations of materials and propagation velocities are obtained. Critical propagation velocities are found.

1. Вступ

При поширенні крихкої тріщини нормального відриву і поперечного зсуву по гладкій траєкторії в однорідному матеріалі, розтягуючі і зсувні напруження мають порядок $r^{-1/2}$. В [5] отримано точні розв'язки для випадку руху тріщини з довільною швидкістю. Показано, що характер особливостей не змінюється, а коефіцієнт інтенсивності напружень залежить від швидкості поширення тріщини [4].

У даній статті роботі аналізуються особливості, які виникають при поширенні тріщини в однорідному матеріалі, а також по межі розділу двох середовищ з різними механічними характеристиками. Характер особливостей залишається таким же для випадку поширення тріщини по достатньо гладкій траєкторії.

Встановлено характер особливості і кутовий розподіл коефіцієнта інтенсивності напружень для однорідного матеріалу і для матеріалу, що "зшитий" з двох інших з різними механічними характеристиками.

2. Аналіз напруженого стану пружного тіла з тріщиною, яка колінеарно поширюється. Рух однорідної тріщини

Припустимо, що тріщина поширюється із сталою швидкістю в однорідному матеріалі. Розглянемо декартову систему координат Ox_1x_2. Нехай вздовж осі x_1 рухається тріщина з постійною швидкістю v. Розглянемо відносну систему координат (r,ϑ), зв'язану з вершиною рухомої тріщини (дивись рис. 1).

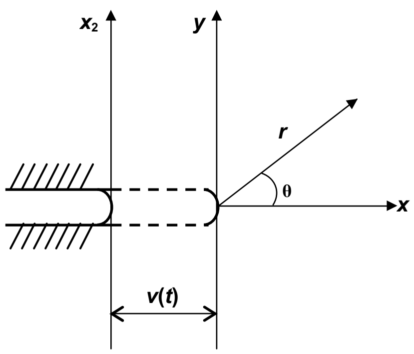

Рис. 1. Колінеарне поширення однорідної тріщини

Хвильові потенціали, що задовольняють хвильові рівняння, подамо у вигляді:

$$\varphi(r,\theta,t)=(r/d)^q f(t)\Phi(\alpha_1,\theta)d^2,$$
$$\vec{\psi}(r,\theta,t)=(r/d)^q f(t)\vec{\Psi}(\alpha_2,\theta)d^2, \qquad (1)$$
$$\vec{\psi}(r,\theta,t)=(0,0,\Psi(\alpha_2,\theta)),$$