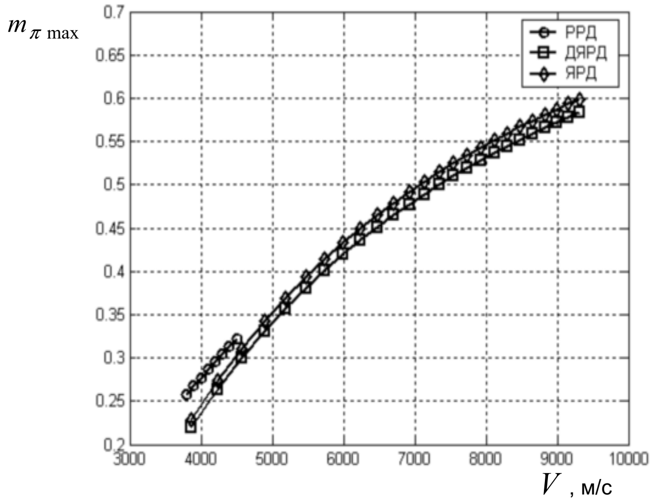
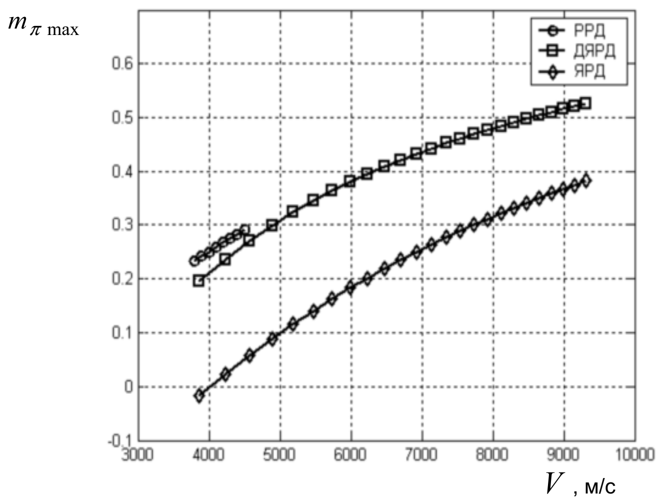


а)



б)

Рис. 5. Залежності маси корисного навантаження від ефективної швидкості витікання. а) – переліт до небесного тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом R_1 = 227.94·10^{6}км, б) – з радіусом R_3 = 1000·10^{6}км

3. Висновки

У статті розглянуто модельну задачу про оптимізацію маневру переведення космічного апарату з заданої кругової навколоземної орбіти на задану геліоцентричну орбіту зустрічі з небесним тілом. Траєкторія перельоту формується за рахунок комбінування участі двигунів великої та малої тяги. Показано, що ефективність комбінування великої та малої тяги збільшується разом з енергозатратами на виконання геліоцентричної частини маневру і, якщо для маневрів з порівняно невеликими енергозатратами комбінування не є доцільним, то у випадку маневрів з високою енергетикою такий підхід є дуже ефективним.

1. *Акимов В. Н., Конюхов В. Г., Коротеев А. А.* Эффективность применения многорежимных ядерных электродвигательных установок с машинным преобразованием энергии // Изв. РАН, сер. "Энергетика". – 2008. – № 3. – С. 20–27. 2. *Ахметшин Р. З., Белоглазов С. С., Белоусова Н. С. и др.* Оптимизация перелетов к астероидам и кометам космических аппаратов с комбинированием большой и малой тяги. – Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1988. – 28 с. 3. *Белецкий В. В., Егоров В. А.* Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед. – 1964. – Т. 2, № 3. – С. 303–330. 4. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с. 5. *Ильин В. А., Кузмак Г. Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. –М.: Наука, 1976. – 744 с. 6. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с. 7. *Borowski S. K.* "Bimodal" nuclear thermal rocket (BNTR) propulsion for future human Mars exploration missions // NASA/CP–2004–212963. – 2004. – Vol. 1. – P. 305–323. 8. *Ivashkin V. V., Stikhno C. A.* On a hazard mitigation problem for Apophis–Earth possible collision in 2036 // 61st International Astronautical Congress, Prague, Czech Republic, September 27 – October 1, 2010. Proceedings, Paper IAC–10–C1.2.4. 9. *Kharytonov O. M., Kiforenko B. M.* Finite–thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // Proc. of 61st International Astronautical Congress, Prague, CZ, 27.09 – 01.10.2010. – IAC–10–C1.9.7. – 11 p. 10. *Mc. Guire M. L., Martini M. C., Packard T. W. et al.* Use of high–power Brayton nuclear electric propulsion (NEP) for a 2033 Mars round–trip mission // NASA TM–2006–214106. – NASA, GRC. – 2006. – 11 p. 11. *Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al.* Project M^3 – a study for manned Mars mission in 2031 // Acta Astonautica. – 2006. – Vol. 58. – P. 88–104.

Надійшла до редколегії 20.01.2011 р.

УДК 519.21

І. Козак, асп., В. Масол, проф.

ПРО ВІДХИЛЕННЯ РОЗПОДІЛУ ЧИСЛА КОНФІГУРАЦІЙ ЗАДАНОГО ТИПУ ВІД РОЗПОДІЛУ ПУАССОНА

Знайдено достатні умови, які дозволяють отримати оцінки відхилення розподілу числа конфігурацій заданого типу у випадковому (0,1)–векторі, який складається з m_0 нулів і m_1 одиниць, $m_0+m_1=n$, $n>0$, від розподілу Пуассона.

We find the sufficient conditions which allow for estimation of deviation of distribution of configurations' number of given type in random (0,1)–vector, consisting of m_0 zeros and m_1 ones, $m_0+m_1=n$, $n>0$ from Poisson distribution.

1. Вступ

Будемо казати, що n–вимірний вектор має специфікацію $0^{m_0}1^{m_1}$, де $m_0+m_1=n$, якщо він утворений з m_0 нулів та m_1 одиниць. Позначимо η_n число конфігурацій типу $1\alpha 0$, де $\alpha\in\{0,1\}$, у векторі, який випадково і рівноімовірно вибирається з множини усіх векторів специфікації $0^{m_0}1^{m_1}$. В роботі [1] отримана формула (36) для знаходження розподілу випадкової величини η_n. Якщо $m_0=1$, то зазначена формула дає $P\{\eta_n=0\}=\dfrac{2}{n}=1-P\{\eta_n=1\}$. У даній роботі знайдені достатні умови на параметри m_0, n та значення випадкової величини η_n, які дозволяють отримати нетривіальні оцінки відхилення розподілу цієї випадкової величини від розподілу Пуассона.

2. Основні результати

Покладемо $\lambda = m_0^2 / n$, $m_0 \ge 2$, $G = \sqrt{2(k+1) m_0 \ln m_0}$, $k = k(n)$ –ціле число, $k \ge 1$.

Теорема 1. Нехай параметри ε_0, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $k \ge 1$, $m_0 \ge 2$, n змінюються таким чином, що

$$\frac{32k^2 (k+1) \ln m_0}{m_0} < \varepsilon_0, \tag{1}$$

$$\frac{m_0}{n} < \frac{1}{2 + 3\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{2}$$

Тоді

$$-e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon_* + Q - \varepsilon_* Q) \le P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \le e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\varepsilon^* e^{\varepsilon^*} + e^{\lambda} Q_1 \right), \tag{3}$$

де

$$\varepsilon_* = Rk \left(1 + Rk \frac{1}{8\sqrt{k(k+1)} \ln m_0} \right) + 3\lambda R(1+R) + 6\lambda^2 \frac{(1+R)^2}{m_0^2} + \frac{m_0^3}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{8k(k+1) \ln m_0} \right) \times$$
$$\times \frac{\left(1 + R^2 k\right)^2 \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right)^{-2}}{1 - m_0 \left(1 + R^2 k \right) \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right)^{-1}} + \frac{\lambda^2}{2m_0} + \frac{(k-1)k}{2m_0} + \frac{k(k-1)(2k-1)}{12 m_0^2 \left(1 - \frac{k-1}{m_0} \right)}, \tag{4}$$
$$\varepsilon^* = Rk + \lambda \frac{(4k+3)}{m_0 (1-R)} + 3\lambda R + 4\lambda \frac{Rk(k+3)}{m_0^2 (1-R)^2} + \frac{\lambda^2}{6 m_0 \left(1 - \frac{\lambda}{m_0} \right)} \left(1 + \frac{1}{2 m_0^2} \right),$$

$$Q = \frac{4}{m_0^{2\tau - \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{m_0^{2\tau - 1}} \right)^k \frac{\exp\left\{ \frac{1}{12(m_0 - k)} \right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G - k}{m_0 - k} \right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2} \right) \exp\left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2} \right\}, \; Q_1 = 2^k \exp\left\{ \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6 m_0 \left(1 - \lambda m_0^{-1} \right)} + \frac{\lambda^2}{12 m_0^3 \left(1 - \lambda m_0^{-1} \right)} \right\} Q, \tag{5}$$

$$\tau = const, \; 0{,}74 < \tau < 1, \; R = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}.$$

Теорема 2. Якщо виконується умова (1) теореми 1 і

$$\lambda \le c < \infty, \text{ де } c = const, \tag{6}$$

то для $n \to \infty$ $P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \to 0.$

Приклад 1. Якщо $m_0 = 500$, $n = 2 \times 10^6$, $\lambda = 0{,}125$, $k = 1$, то виконуються умови (1), (2) теореми 1 і співвідношення (3) дає $-0{,}17 \le P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \le 0{,}47$.

Приклад 2. Якщо $m_0 = 5 \times 10^3$, $n = 5 \times 10^7$, $\lambda = 0{,}5$, $k = 2$, то виконуються умови (1), (2) теореми 1 і співвідношення (3) дає $-0{,}13 \le P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \le 0{,}44$.

3. Допоміжні твердження

Лема 3.1. Нехай виконуються умови (1) і для $k \ge 1$

$$x_1 + x_2 = k, \tag{7}$$

$$a_1 + a_2 = m_0, \tag{8}$$

де x_j, a_j – цілі невід'ємні числа, $j = 1, 2$,

$$a_1 \in \left[\frac{m_0}{2} - G; \frac{m_0}{2} + G \right]. \tag{9}$$

Тоді мають місце оцінки

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \le \left(\frac{m_0}{2} \right)^k \exp\left\{ \sqrt{\varepsilon_0} \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}, \tag{10}$$

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \ge \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \cdot \exp\left\{-\sqrt{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{k\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)} - \frac{k(k-1)}{m_0\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{3m_0^2\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}-\frac{\varepsilon_0}{4k(k+1)\ln m_0}\right)}\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (11)$$

Доведення. Перевіримо співвідношення (10). Беручи до уваги умови (8) і (9), отримаємо рівність

$$\max(a_1, a_2) = \frac{m_0}{2} + 2G, \quad (12)$$

яка дозволяє записати

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \le \left(\frac{m_0}{2}+2G\right)^k \exp\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{x_i-1}\ln\left(1-\frac{\nu}{\frac{m_0}{2}+2G}\right)\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (13)$$

За допомогою умови (1) переконуємося в тому, що має місце оцінка $\max\limits_{1\le\nu\le k}\frac{\nu}{\frac{m_0}{2}+2G} < 1$. Отже, до правої частини співвідношення (13) можна застосувати нерівність

$$\ln(1+u) \le u, \quad (14)$$

де $|u| < 1$, так що

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \le \left(\frac{m_0}{2}+2G\right)^k \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(-\frac{x_i(x_i-1)}{\left(\frac{m_0}{2}+2G\right)}\right)\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (15)$$

Вираз $\left(\frac{m_0}{2}+2G\right)^k$ подамо у вигляді $\left(\frac{m_0}{2}+2G\right)^k = \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp\left\{k\ln\left(1+\frac{4G}{m_0}\right)\right\}.$

Беручи до уваги нерівність

$$\frac{4G}{m_0} < 1, \quad (16)$$

яку можна перевірити враховуючи умову (1), застосуємо (14) до $\ln\left(1+4Gm_0^{-1}\right)$ і отримаємо

$$\left(\frac{m_0}{2}+2G\right)^k \le \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp\left\{k\frac{4G}{m_0}\right\}. \quad (17)$$

Підстановка (17) в (15) дає $C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \le \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp\left\{k\frac{4G}{m_0} - \frac{1}{m_0+4G}\sum_{i=1}^{2}x_i(x_i-1)\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}$. Звідси безпосередньо приходимо до (10), оскільки умова (1) дозволяє скористатися нерівністю

$$\frac{4kG}{m_0} < \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Перевіримо співвідношення (11). Аналогічно (12) переконуємося у тому, що $\min(a_1, a_2) = \frac{m_0}{2} - 2G.$ Отже,

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \ge \left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^k \exp\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{x_i-1}\ln\left(1-\frac{\nu}{\frac{m_0}{2}-2G}\right)\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (19)$$

За допомогою умови (1) знаходимо, що для $k \ge 2$ справджується нерівність $\max\limits_{1\le\nu\le k}\frac{\nu}{\frac{m_0}{2}-2G} < 1$. Тому до виразу $\ln\left(1-\nu\left(m_0 2^{-1}-2G\right)^{-1}\right)$, $\nu = 0,1,2,...,k$, $k \ge 2$, можна застосувати оцінку

$$\ln(1-u) \ge -u - \frac{u^2}{2(1-u)}, \quad (20)$$

де $0 \le u < 1$, і записати співвідношення

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \geq (\frac{m_0}{2}-2G)^k \exp\left\{-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_i(x_i-1)}{m_0-4G}+\frac{(x_i-1)x_i(2x_i-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^2\left(1-\frac{k}{\frac{m_0}{2}-2G}\right)}\right)\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (21)$$

Беручи до уваги умову (7), перепишемо (21) наступним чином

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \geq (\frac{m_0}{2}-2G)^k \exp\left\{-\frac{k(k-1)}{m_0-4G}-\frac{(k-1)k(2k-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)\left(\frac{m_0}{2}-2G-k\right)}\right\}\frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (22)$$

До оцінки (22) приходимо також при $k=1$, що випливає безпосередньо з (7) і (19). Вираз $\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^k$ подамо у наступному вигляді $\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^k=\left(\frac{m_0}{2}\right)^k\exp\left\{k\ln\left(1-\frac{4G}{m_0}\right)\right\}$, звідки з урахуванням (16) і (20) випливає

$$\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^k \geq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp\left\{-k\left(\frac{4G}{m_0}+\frac{\left(\frac{4G}{m_0}\right)^2}{2\left(1-\frac{4G}{m_0}\right)}\right)\right\}. \quad (23)$$

Підстановка (23) у (22) дає нерівність

$$C_{a_1}^{x_1}C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp\left\{-k\frac{4G}{m_0}-k\frac{\left(\frac{4G}{m_0}\right)^2}{2\left(1-\frac{4G}{m_0}\right)}-\frac{k(k-1)}{m_0-4G}-\frac{(k-1)k(2k-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)\left(\frac{m_0}{2}-2G-k\right)}\right\}\frac{1}{x_1!x_2!},$$

від якої за допомогою (18) нескладно перейти до (11).

Аналогічно доведенню леми 3.1 можна переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 3.2. Нехай для $k \geq 1$ виконуються умови (1), (2), (7)–(9). Тоді мають місце наступні оцінки

$$\prod_{i=1}^{2} C_{r(i)+\left[\frac{n}{2}\right]-a_i}^{a_i-x_i} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k}\exp\left\{-\frac{3}{2}\lambda+\lambda\frac{(4k+3)}{m_0\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)}+3\lambda\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}+\lambda\frac{4\sqrt{\varepsilon_0}\,(k+3)}{m_0^2\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)^2}\right\}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{(a_i-x_i)!}, \quad (24)$$

$$\prod_{i=1}^{2} C_{r(i)+\left[\frac{n}{2}\right]-a_i}^{a_i-x_i} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k}\exp\left\{-\frac{3}{2}\lambda-3\lambda\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)-6\lambda^2\frac{1}{m_0^2}\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{m_0^3}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{8k\,(k+1)\ln m_0}\right)\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{k}\right)^2\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)^{-2}}{1-m_0\left(1+\frac{\varepsilon_0}{k}\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)^{-1}}\right\}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{(a_i-x_i)!},$$

де $r(i)=1,$ якщо $1\leq i\leq p$, $r(i)=0,$ якщо $i>p$, $p=n-2\left[\frac{n}{2}\right]$.

Лема 3.3. Для $n>m_0\geq 0$ справедливі наступні оцінки

$$C_n^{m_0} \leq \frac{n^{m_0}}{m_0!}\exp\left\{-\frac{m_0\,(m_0-1)}{2n}\right\}, \quad (25)$$

$$C_n^{m_0} \geq \frac{n^{m_0}}{m_0!} \exp\left\{ -\frac{m_0(m_0-1)}{2n} - \frac{m_0(m_0-1)(2m_0-1)}{12n^2\left(1-\frac{m_0-1}{n}\right)} \right\}. \quad (26)$$

Доведення. Біноміальній коефіцієнт $C_n^{m_0}$ представимо у вигляді $C_n^{m_0} = \frac{n^{m_0}}{m_0!}\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{m_0-1} \ln\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right\}$, звідси, беручи до уваги нерівність (14), отримаємо оцінку зверху (25). Аналогічно за допомогою нерівності (20) знаходимо оцінку знизу (26).

Позначимо

$$I' = \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{x_1!x_2!} \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0}{2}-G-1} \frac{(m_0-k)!}{(a_1-x_1)!(m_0-a_1-x_2)!} \quad (27)$$

Лема 3.4. Нехай для $k \geq 1$ виконуються умови (1), (7), (8). Тоді справедлива наступна оцінка

$$I' \leq 2^{m_0} \cdot \left(\frac{1}{m_0^{2\beta-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\beta-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12(m_0-k)}\right\}}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{2G-k}{m_0-k}\right)}, \quad (28)$$

де $\beta = const$, $0,93 < \beta < 1$.

Доведення. За допомогою поліноміальної теореми, рівності (27) та умови (8) знаходимо

$$I' \leq \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{2} x_i!} \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0}{2}-G-1} C_{m_0-k}^{a_1} a_1(a_1-1)\cdot\ldots(a_1-x_1-1). \quad (29)$$

Умова (7), співвідношення (29) дають

$$I' \leq (2m_0)^k \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0}{2}-G} C_{m_0-k}^{a_1}. \quad (30)$$

За допомогою формули Стірлінга [2] праву частину (30) можна оцінити таким чином, що

$$I' \leq m_0^{k+1} 2^{m_0} \left(2\pi m_0\left(1-\frac{k}{m_0}\right)\left(1-\frac{2G-k}{m_0-k}\right)\left(1+\frac{2G-k}{m_0-k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{12(m_0-k)}\right\} \exp\left\{-\frac{2}{(m_0-k)}\left(G-\frac{k}{2}\right)^2 \langle 1+\gamma(\xi)\rangle\right\}, \quad (31)$$

де $\gamma(\xi) = -\frac{2\xi}{3}$, $\xi = \frac{G-\frac{k}{2}}{m_0-k}$.

Умова (1) дозволяє отримати нерівність $\xi < \frac{G}{m_0} < \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{4k} < \frac{1}{4}$, звідки

$$0,83 < 1+\gamma(\xi) < 1. \quad (32)$$

Покажемо, що

$$\frac{\left(1-\frac{k}{2G}\right)^2}{1-\frac{k}{m_0}} < 1. \quad (33)$$

Дійсно, нерівність (33) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{k}{2G} + \frac{2G}{m_0} < 2. \quad (34)$$

Але для $\varepsilon_0 \in (0,1)$ і $k \geq 1$ маємо

$$\frac{k}{2G} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{16(k+1)\ln m_0} < \frac{1}{32}, \quad (35)$$

$$\frac{2G}{m_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2k} < \frac{1}{2}.$$

Отже, співвідношення (34), а разом з ним співвідношення (33), виконуються.
Оцінка

$$\left(1-\frac{k}{2G}\right)^2\left(1-\frac{k}{m_0}\right)^{-1} > 0,93 \qquad (36)$$

випливає з (35). Нерівності (33) і (36) дають

$$\beta < \frac{\left(1-\frac{k}{2G}\right)^2}{1-\frac{k}{m_0}} < 1, \qquad (37)$$

де $\beta = const$, $0,93 < \beta < 1$.

За допомогою співвідношень (31), (32), (37) і $1-\left(2G-k\right)\left(m_0-k\right)^{-1} \le 1-km_0^{-1}$ приходимо до (28). Позначимо

$$I'' = \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{2} x_i!} \sum_{a_1=\frac{m_0}{2}+G+1}^{m_0} \frac{\left(m_0-k\right)!}{\left(a_1-x_1\right)!\left(m_0-a_1-x_2\right)!}.$$

Аналогічно доведенню леми 3.4 можна переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 3.5. Нехай для $k \ge 1$ виконуються умови (1), (7), (8). Тоді справедлива наступна оцінка

$$I'' \le 2^{m_0+1}\left(\frac{1}{m_0^{2\tau-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\tau-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12\left(m_0-k\right)}\right\}}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{2G+k}{\left(m_0-k\right)}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right)\exp\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right\},$$

де $\tau = const$, $0,74 < \tau < 1.$

Позначимо

$$S' = \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0}{2}-G-1} \sum_{x_1+x_2=k} C_{a_1}^{x_1} C_{r(1)+\left[\frac{n}{2}\right]-a_1}^{a_1-x_1} C_{m_0-a_1}^{x_2} C_{r(2)+\left[\frac{n}{2}\right]-\left(m_0-a_1\right)}^{m_0-a_1-x_2}. \qquad (38)$$

Лема 3.6. В умовах леми 3.4 справедлива нерівність

$$\frac{1}{C_n^{m_0}} S' \le \left(2\lambda\right)^k \frac{1}{k!}\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 \frac{1}{6m_0\left(1-\lambda\frac{1}{m_0}\right)}\left(1+\frac{1}{2m_0^2}\right)\right\}\left(\frac{2}{m_0^{2\beta-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\beta-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12\left(m_0-k\right)}\right\}}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{2G-k}{m_0-k}\right)}, \qquad (39)$$

де $\beta = const,\ 0,93 < \beta < 1.$

Доведення. Праву частину (38) можна оцінити наступним чином $S' \le m_0^k \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k} I' \frac{1}{\left(m_0-k\right)!k!}$, де I' визначено рівністю (27). Звідси з урахування співвідношень (26) та (28) отримаємо (39). Позначимо

$$S'' = \sum_{a_1=\frac{m_0}{2}+G+1}^{m_0} \sum_{x_1+x_2=k} C_{a_1}^{x_1} C_{r(1)+\left[\frac{n}{2}\right]-a_1}^{a_1-x_1} C_{m_0-a_1}^{x_2} C_{r(2)+\left[\frac{n}{2}\right]-\left(m_0-a_1\right)}^{m_0-a_1-x_2}. \qquad (40)$$

Лема 3.7. В умовах леми 3.5 справедлива наступна оцінка

$$\frac{1}{C_n^{m_0}} S_j'' \le 2\lambda^k \frac{1}{k!}\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 \frac{1}{6m_0\left(1-\lambda\frac{1}{m_0}\right)}\left(1+\frac{1}{2m_0^2}\right)\right\}\left(\frac{2}{m_0^{2\tau-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\tau-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12\left(m_0-k\right)}\right\}}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{2G+k}{m_0-k}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right)\exp\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right\},$$

Доведення. Аналогічно доведенню леми 3.6 (відмінність полягає лише в тому, що замість леми 3.4 використовується лема 3.5).

4. Доведення теорем

Доведення теореми 1. Для імовірності події $\{\eta_n = m_0 - k\}$ в [1] встановлено рівність, згідно якої

$$P(\eta_n = m_0 - k) = \sum \varphi(a, x, n) / C_n^{m_0}, \tag{41}$$

де $a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$, символ $\sum$ означає додавання за всіма розв'язками в цілих невід'ємних числах рівнянь $a_1 + a_2 = m_0$, $x_1 + x_2 = k$, $\varphi(a, x, n) = \prod_{i=1}^{2} C_{a_i}^{x_i} C_{r(i)+[n/2]-a_i}^{a_i - x_i}$, $r(i) = 1$, якщо $1 \le i \le p$, $r(i) = 0$, якщо $i > p$, $p = n - 2\left[\frac{n}{2}\right]$. Праву частину (41) подамо у вигляді трьох доданків

$$\sum_{\substack{a_1+a_2=m_0 \\ x_1+x_2=k}} \varphi(a, x, n) = S' + S'' + S_0, \tag{42}$$

де S' та S'' визначенні відповідно рівностями (38) і (40),

$$S_0 = \sum \varphi(a, x, n), \tag{43}$$

причому в (43) компонента a_1 вектора a належать інтервалу $a_1 \in \left[\frac{m_0}{2} - G, \frac{m_0}{2} + G\right]$. Беручи до уваги (10), (24), (26) і (43), знаходимо

$$\frac{S_0}{C_n^{m_0}} \le \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!} S^* \frac{1}{2^{m_0}}, \tag{44}$$

де ε_* визначено рівністю (4), а $S^* = \sum \frac{k!}{\prod_{i=1}^{2} x_i!} \frac{(m_0 - k)!}{\prod_{i=1}^{2} (a_i - x_i)!} - (I' + I'')$. Звідси, приходимо до оцінки

$$S^* \le 2^{m_0}. \tag{45}$$

Підстановка (45) в (44) дає

$$\frac{S_0}{C_n^{m_0}} \le \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!}. \tag{46}$$

За допомогою (41), (42), (46) і лем 3.6, 3.7 знаходимо

$$P\{\eta_n = m_0 - k\} \le \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!} + \lambda^k \frac{1}{k!} Q_1, \tag{47}$$

де Q_1 визначено рівністю (5). Співвідношення $e^{\varepsilon} \le 1 + \varepsilon e^{\varepsilon}$ для $\varepsilon \ge 0$, дозволяє переписати (47) у вигляді

$$P\{\eta_n = m_0 - k\} \le \lambda^k \frac{1}{k!} \exp\{-\lambda\} \left(1 + \varepsilon^* e^{\varepsilon^*}\right) + \lambda^k \frac{1}{k!} Q_1. \tag{48}$$

Із (48) випливає безпосередньо верхня оцінка (3) для різниці $P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \lambda^k (k!)^{-1}$. Аналогічно доводиться нижня оцінка (3) для зазначеної різниці.

Доведення теореми 2. Умова (6) забезпечує виконання нерівності (2) для $n \to \infty$. Отже, можна скористатися співвідношенням (3) і переконатися, що вирази $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon_* + Q - \varepsilon_* Q)$, $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\varepsilon^* e^{\varepsilon^*} + e^{\lambda} Q_1\right)$ можна зробити довільно малими для $n \to \infty$.

5. Висновок

Знайдені умови, які дозволяють отримати верхню та нижню оцінки відхилення розподілу числа конфігурацій фіксованого типу у випадковому n–вимірному (0,1)–векторі специфікації $0^{m_0} 1^{m_1}$, $n = m_0 + m_1$, від розподілу Пуассона з параметром λ, $\lambda = n^{-1} m_0^2$ (теорема 1). Зазначені оцінки прямують до нуля, якщо $n \to \infty$ і $\lambda \le c < \infty$, де $c = const$ (теорема 2).

1. *Масол В. И.* Асимптотическое поведение некоторых статистик (0,1)–вектора // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – № 43. – С. 83–90. 2. *Феллер В.* Введения в теорию вероятностей и ее приложения – М., 1984.

Надійшла до редколегії 26.01.2011 р.