а отже,

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix}.$$

З цих міркувань слідує наступна теорема:

Теорема 2. *Матрична алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць* $A^2 = A$, $B^2 = B$ *з сендвіч-співвідношеннями* $ABA = 0$, $BAB = 0$ *над полем* K *складається з усіх матриць вигляду*

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *– елементи поля* K.

6. ВИСНОВКИ

Описана матрична алгебра Ауслендера для задачі про класифікацію пар ідемпотентних матриць A і B із співвідношеннями $ABA = 0$ і $BAB = 0$.

Список використаних джерел

1. Assem I., Brown P. Strongly simply connected Auslander algebras – Glasqow Math. J. – 1997. – 39, no. 1. – p.21–27.
2. Bautista R., Larrión F. Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. – J. London Math. Soc. (2). – 1982. – 26, no. 1. – p.43–52.
3. Bongartz K., Gabriel P. Covering spaces in representation-theory. – Invent. Math. – 1981. – 65, no. 3. – p.331–378.
4. Brenner S., Butler M. Wild subquivers of the AuslanderReiten quiver of a tame algebra. Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras. – Contemp. Math. – 1997. – 229. – p.29–48.
5. Dieterich E. Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings. – Math. Z. – 1983. – 184, no. 1. – p.43–60.
6. Gabriel P. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Representation theory, I. – Lecture Notes in Math. – 1979. – 831. – p.1-71.
7. Geiss C., Leclerc B., Schröer J. Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras. – J. Lond. Soc. – 2007. – 75, no. 3. – p.718–740.
8. Igusa K., Platzeck M., Todorov G., Zacharia D. Auslander algebras of finite representation type. – Comm. Algebra, – 1987. – 15, no. 1-2. – p.377–424.
9. Leszczyński Z., Skowroński A. Auslander algebras of tame representation type. Representation theory of algebras. – 1994, p.475–486.
10. Riedtmann C. On stable blocks of Auslander-algebras. – Trans. Amer. Math. Soc., – 1984. – 283, no. 2. – p.485–505.

Надійшла до редколегії 27.11.13

В. Бондаренко, д-р физ.-мат. наук
Институт математики НАН Украини, Киев,
О. Зубарук, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ИДЕМПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ С СЕНДВИЧ-СООТНОШЕНИЯМИ

Описана алгебра Ауслендера для задачи о классификации пар идемпотентных матриц A, B с соотношениями ABA=0, BAB=0.

V. Bondarenko, Full Doct.
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,
O. Zubaruk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

THE AUSLANDER ALGEBRA FOR THE PAIRS OF IDEMPOTENT MATRICES WITH SANDWICH RELATIONS

We describe the Auslander algebra for the problem of classification of pairs of idempotent matrices A, B with the relations ABA=0, BAB=0.

УДК 512.552.1

С. Лисенко, асп., В. Лучко, канд. фіз.-мат. наук, А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОРТОГОНАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НА АСОЦІАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

Нехай K – поле і A – асоціативна алгебра над K (не обов'язково з одиницею). Лінійний оператор T на A будемо називати ортогональним, якщо T(x)T(y)=xy для довільних x, y із A. Вивчаються асоціативні алгебри з нетривіальним ортогональним оператором T і група O(A) всіх біективних ортогональних операторів на A для деяких класів алгебр. Доведено, що радикал Джекобсона J(A) інваріантний відносно дії такої групи. Структура групи O(A) досліджена для деяких класів алгебр A.

ВСТУП. В статтях [1] – [3] вивчались ортогональні оператори на алгебрах Лі (лінійний оператор $T : L \to L$ на алгебрі Лі L називається ортогональним або Лі-ортогональним, якщо виконується умова $[T(x),T(y)] = [x, y]$ для довільних $x, y \in L$). В цих працях, зокрема, доведено, що прості скінченновимірні алгебри Лі характеристики 0 мають лише тривіальні ортогональні оператори $\pm E$, де E – тотожній оператор на L. Аналогічним способом ортогональні оператори можна визначити і на асоціативних алгебрах над довільними полями: лінійний оператор $T: A \to A$ на асоціативній алгебрі A будемо називати ортогональним, якщо $T(x)\cdot T(y) = xy$ для довільних елементів $x.y \in A$. Якщо ми перейдемо до приєднаної алгебри Лі $L(A)$ для асоціативної алгебри A, то лінійний оператор T на алгебрі Лі $L(A)$ буде ортогональним в зазначеному вище сенсі

В одному із основних тверджень цієї статті – теоремі 1, доведено, що радикал Джекобсона алгебри A інваріантний відносно бієктивних ортогональних операторів на алгебрі A, тому кожен такий оператор індукує ортогональний оператор на напівпростій алгебрі $A/J(A)$. В теоремі 2 дано опис таких операторів на однопороджених нільпотентних алгебрах скінченної розмірності над довільним полем характеристики не рівної 2. Позначення в роботі стандартні, асоцітивні алгебри (не обов'язково з одиницею) розглядаються над довільним полем. Через $J(A)$ позначається радикал Джекобсона алгебри A. Для довільної алгебри A над полем K лівий анулятор визначається як $Ann^l(A) = \{x \in A : xA = 0\}$, аналогічно правий анулятор $Ann^r(A) = \{x \in A : Ax = 0\}$. Двосторонній анулятор асоціативної алгебри A є перетином лівого і правогоануляторів $Ann\,(A) = Ann^l(A) \cap Ann^r(A)$. Через $Z(A)$ позначається центр алгебри A, через $GL(A)$ позначається група всіх бієктивних лінійних операторів на A (як на векторному просторі над полем K.

ОСНОВНА ЧАСТИНА.

Лема 1. Нехай A – асоціативна алгебра над довільним полем K і T – ортогональний лінійний оператор на A. Тоді

1) якщо $a \in A$ – нільпотентний елемент, то елемент $T(a)$ також нільпотентний;

2) якщо a – оборотній елемент, то і $T(a)$ оборотній;

3) якщо $Ann^l(A) = 0$ або $Ann^r(A) = 0$, то тоді $KerT = 0$.

Доведення. 1) Нехай a – нільпотентний елемент і $a^n = 0$ для деякого $n \geq 1$. Якщо $n = 2k$, то

$$\underbrace{T(a)\cdot T(a)\cdot \ldots \cdot T(a)}_{2k} = \underbrace{(a\cdot a)\cdot \ldots \cdot (a\cdot a)}_{k} = a^{2k} = 0\,.$$

Якщо ж $n = 2k+1$, то аналогічно можна показати, що $T(a)^{2k+2} = T(a)^{n+1} = 0$.

2) Нехай $a \in A$ – оборотній елемент. Тоді $ab = ba = 1$ для деякого $b \in A$. Маємо $T(a)T(b) = ab = 1$ і $T(b)T(a) = ba = 1$. Останнє означає, що $T(a)$ оборотній і $T(b) = T(a)^{-1}$.

3) Нехай, наприклад, $Ann^l(A) = 0$ і $x \in KerT$. Тоді $T(x) = 0$ і для довільного елемента $y \in A$ маємо $T(x)T(y) = 0 = xy$, тобто $x \in Ann^l(A)$ і тому $x = 0$. Аналогічно можна довести, що $KerT = 0$ для випадку $Ann^r(A) = 0$. Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай A – асоціативна алгебра над довільним полем K. Тоді

1) якщо A – алгебра з одиницею і T – бієктивний ортогональний оператор на A, то $T(1)^2 = 1$, $T(1) \in Z(A)$ і дія T на A зводиться до множення елементів із A на $T(1)$.

2) Множина всіх бієктивних ортогональних операторів на A утворює групу відносно взяття суперпозиції. Цю групу будемо позначати через $O(A)$.

3) Якщо $A^2 = A$, то групи $O(A)$ і $AutA$ мають одиничний перетин в групі $GL(A)$ і для довільного $\theta \in AutA$ справедливо $\theta^{-1}O(A)\theta \subseteq O(A)$.

Доведення. 1) Із співвідношень

$$T(x)\cdot T(1) = x\cdot 1 = x\ ,\ T(1)\cdot T(x) = 1\cdot x = x$$

випливає з огляду на бієктивність T на A, що $T(1) \in Z(A)$. Оскільки $T(1)\cdot T(1) = 1\cdot 1 = 1$, то $T(1)^2 = 1$ і тому $T(1)^{-1} = T(1)$. Але тоді $T(1)\cdot T(x) = 1\cdot x = x$ і тому $T(x) = T(1)^{-1}\cdot x = T(1)\cdot x$ для довільного елемента $x \in A$. Таким чином, дія T на A зводиться до множення на елемент $T(1)$ із $Z(A)$.

2) Якщо T і S – ортогональні бієктивні оператори на A, то $T(S(x))\cdot T(S(y)) = S(x)\cdot S(y)$ з огляду на ортогональність T. Далі $S(x)\cdot S(y) = xy$ і тому TS – ортогональний оператор на A. З ортогональності тотожного лінійного оператора E на A отримаємо за допомогою аналогічних міркувань, що T^{-1} ортогональний оператор. Таким чином, $O(A)$ – група відносно суперпозиції відображень.

3) Нехай T – бієктивний ортогональний оператор на A і θ – автоморфізм алгебри A. Тоді маємо співвідношення

$$(\theta^{-1}T\theta)(x)\cdot(\theta^{-1}T\theta)(y) = \theta^{-1}(T\theta(x))\cdot\theta^{-1}(T\theta(y)) = \theta^{-1}(T(\theta(x))\cdot T(\theta(y))) = \theta^{-1}(\theta(x)\theta(y)) = xy\,.$$

Це означає, що $\theta^{-1}T\theta$ – ортогональний оператор на A і підгрупа $O(A)$ повної лінійної групи $GL(A)$ інваріантна відносно $AutA$ при дії спряженням в $GL(A)$.

Далі, нехай $T=\theta\in AutA\cap O(A)$. Тоді $T(x)\cdot T(y)=xy=T(xy)$, оскільки T – автоморфізм і ортогональний оператор одночасно. З рівності $T(xy)=xy$ для довільних $x,y\in A$ при умові $A^2=A$ випливає, що $T=E$ – тотожній оператор. Таким чином, $O(A)\cap AutA=E$ при умові $A^2=A$. Зауважимо, що в загальному випадку із доведення леми випливає, що кожен лінійний оператор із перетину $O(A)\cap AutA$ діє тотожньо на квадраті A^2 алгебри A.

Наслідок 1. Нехай A – асоціативна алгебра з 1 над довільним полем K. Тоді група $O(A)$ всіх бієктивних ортогональних операторів на A ізоморфна мультиплікативній групі всіх елементів періоду 2 із центру $Z(A)$. Зокрема, $O(A)$ або одинична, або абелева періоду 2.

Наслідок 2. Нехай A – напівпроста скінченно вимірна алгебра над полем K. Тоді $O(A)=\{\pm E\}$.

Теорема 1. Нехай A – асоціативна алгебра над довільним полем K і $J=J(A)$ – радикал Джекобсона алгебри A. Тоді

1) якщо T – бієктивний ортогональний оператор на A, то $T(J)\subseteq J$;

2) якщо T – довільний ортогональний оператор на A і $A^2=A$, то $T(J)\subseteq J$.

Доведення. 1) Візьмемо довільний елемент $T(a)\in T(J)$ для деякого $a\in J$ і довільний елемент $b\in A$. Оскільки T – бієктивний, то $b=T(c)$ для деякого $c\in A$. Тоді отримаємо співвідношення

$$T(c)\cdot T(a)=c\cdot a=b\cdot T(a)\in J.$$

Останнє означає, що $AT(J)\subseteq J$. Аналогічно можна показати, що $T(J)A\subseteq J$. Із цих співвідношень легко випливає, що $J+T(J)$ – двосторонній ідеал алгебри A і при цьому виконується співвідношення

$$(J+T(J)/J)^2\subseteq J/J=\bar{0},$$

тобто $J+T(J)/J$ – ідеал з нульовим квадратом напівпростої алгебри A/J. Але тоді

$$J+T(J)/J=\bar{0} \text{ і } T(J)\subseteq J.$$

Зауважимо також, що для асоціативних алгебр з одиницею твердження 1 теореми випливає з того, що дія T на A зводиться до множення на $T(1)$.

2) Для довільних елементів $T(a)\in T(A)$ і $T(b)\in T(J)$ маємо $T(a)T(b)=ab\in J$. Звідси випливає, що $T(A)^2T(J)\subseteq J$ (безпосередня перевірка). Покажемо тепер, що $T(A)^2=A^2$. Дійсно, включення $T(A)^2\subseteq A^2$ очевидне. Візьмемо довільний елемент a із A^2. Тоді за означенням $a=\sum a_ia_j$ – скінченна сума, де $a_i,a_j\in A$. Звідси отримаємо

$$a=\sum a_ia_j=\sum T(a_i)T(a_j)\in T(A)^2$$

і тому $A^2\subseteq T(A)^2$. За умовою теореми $A^2=A$ і тоді маємо $AT(J)=A^2T(J)\subseteq J$. Далі, повторюючи міркування із доведення частини 1 теореми, неважко переконатися, що $AJ\subseteq J$ і $JA\subseteq J$. Теорему 1 доведено.

Лема 3. Нехай A – асоціативна алгебра над довільним полем і T – бієктивний ортогональний оператор на A. Тоді $T(Ann\,A)\subseteq Ann(A)$ і T індукує бієктивний ортогональний оператор на ідеалі $Ann\,A$ і на фактор-алгебрі $A/Ann\,A$.

Доведення. Для довільних елементів $x\in Ann\,A$ і $y\in A$ маємо співвідношення

$$x\cdot y=0=T(x)T(y).$$

Якщо елемент y пробігає алгебру A, то $T(y)$ також пробігає всю алгебру A і тому $T(x)\in Ann\,A$, тобто $T(Ann\,A)\subseteq Ann\,A$. Припустимо, що для деякої алгебри A і лінійного ортогонального оператора T включення $T(Ann\,A)\subset Ann\,A$ строге. Візьмемо довільний елемент $x\in Ann\,A\setminus T(Ann\,A)$. Оскільки T сюр'єктивний, то існує елемент $y\in A$ такий, що $T(y)=x$. З огляду на співвідношення $T(Ann\,A)\subseteq Ann\,A$, яке було доведене вище, маємо, що $y\notin Ann\,A$. Але тоді існує елемент $z\in A$ такий, що $yz\neq 0$ (або $zy\neq 0$) Звідси отримаємо $yz=T(y)T(z)=x\cdot T(z)=0$, що неможливо (випадок $zy\neq 0$ розглядається аналогічно). Отримана суперечність показує, що $Ann\,A\subseteq T(Ann\,A)$ і тому $T(Ann\,A)=Ann\,A$. Оскільки лінійний оператор T на $Ann\,A$, очевидно, ін'єктивний, то звуження T на $Ann\,A$ є бієктивним ортогональним оператором.

Легко бачити, що індукований оператором T на фактор-алгебрі $A/Ann\,A$ лінійний оператор $\overline{T}$ є ортогональним. Покажемо, що $\overline{T}$ бієктивний. Дійсно, якщо $T(x_1+Ann\,A)=T(x_2+Ann\,A)$, то $T(x_1-x_2)\in Ann\,A$. Але, як неважко переконатися, із умови $T(x)\in Ann\,A$ випливає (з урахуванням бієктивності T на A і на $Ann\,A$), що $x\in Ann\,A$.

Тому $x_1 - x_2 \in Ann\, A$, тобто $x_1 + Ann\, A = x_2 + Ann\, A$ і T ін'єктивний на фактор-алгебрі $A / Ann\, A$. Оскільки T бієктивний на A, то $\overline{T}$, очевидно, сюр'єктивний на $A / Ann\, A$ і тому $\overline{T}$ – бієктивний лінійний оператор на $A / Ann\, A$.

Наслідок 1. Якщо A – нільпотентна асоціативна алгебра над довільним полем і T – ортогональний бієктивний оператор на A, то T індукує бієктивні ортогональні оператори на всіх ненульових елементах ануляторного ряду алгебри A (властивості ануляторів ідеалів див. [4, с.260-261]).

Приклад 1. Нехай

$$A = K < x, y \mid xy = y, x^2 = x, y^2 = 0, yx = 0 >$$

– двовимірна асоціативна алгебра над полем K. Покажемо, що $O(A) = \pm E$, де E – тотожній оператор на A. Дійсно, в базисі $\{x, y\}$ запишемо

$$T(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{21}y\,,\ T(y) = \alpha_{12}x + \alpha_{22}y\,.$$

Тоді $T(x)T(y) = xy = y$ і тому після перемноження отримаємо

$$(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y)(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y) = \alpha_{11}\alpha_{12}x + \alpha_{11}\alpha_{22}y = y\,.$$

Але тоді $\alpha_{11}\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1$. Звідси отримаємо $\alpha_{12} = 0$ і $\alpha_{22} = \alpha_{11}^{-1}$. Із умови $T(x)T(x) = x \cdot x = x$ аналогічно отримаємо

$$(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y)(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y) = \alpha_{11}^2 x + \alpha_{11}\alpha_{21}y = x$$

і тому $\alpha_{11}^2 = 1$, $\alpha_{11}\alpha_{21} = 0$, тобто $\alpha_{21} = 0$. Таким чином,

$$\alpha_{11} = \pm 1,\ \alpha_{22} = \pm 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \text{ і } O(A) = \pm E\,.$$

Теорема 2. Нехай A – асоціативна нільпотентна алгебра над полем K характеристики $\neq 2$, яка породжена одним елементом, $A = K < a \mid a^{n+1} = 0 >$. Тоді $O(A)$ складається з лінійних операторів на A, які мають в базисі $\{a, a^2, ..., a^n\}$ алгебри A матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\alpha_{ni} \in K$, $\alpha_{nn} \neq 0$.

Доведення. Нехай $T \in O(A)$ – довільний невироджений ортогональний лінійний оператор на A. Запишемо $T(a^i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a^j$, $i = 1, ..., n$. Тоді із умови ортональності T отримаємо

$$T(a)T(a) = a \cdot a = a^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} a^j \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} a^j\,.$$

Порівнюючи коефіцієнти при степенях a^m в лівій і правій частині останньої рівності отримаємо співвідношення

$$\alpha_{11}^2 = 1,\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{11} = 0\,,\ ...,\ \sum_{s=1}^{m} \alpha_{s1} \cdot \alpha_{m-s,1} = 0\,,\ ...,\ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s1} \cdot \alpha_{n-s,1} = 0\,.$$

Оскільки характеристика основного поля K не дорівнює 2, то отримаємо послідовно $\alpha_{11} = \pm 1$, $\alpha_{21} = 0$, ..., $\alpha_{n-1,1} = 0$. Таким чином,

$$T(a) = \alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n$$

для $\alpha_{11} = \pm 1$.

Далі, із співвідношення

$$T(a)T(a^2) = a \cdot a^2 = a^3 = (\alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n) \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j\,,$$

враховуючи очевидну рівність $\alpha_{n,1}a^n \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j = 0$, отримаємо, що $\alpha_{11}a \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j = a^3$.

Звідси, порівнюючи коефіцієнти при степенях a, маємо

$$\alpha_{22} = \alpha_{11}^{-1},\ \alpha_{12} = 0,\ \alpha_{32} = 0\,,\ ...,\ \alpha_{n-1,2} = 0\,.$$

Таким чином, $T(a^2) = \alpha_{11}^{-1}a + \alpha_{n2}a^n$. Аналогічно $T(a^i) = \alpha_{11}^{-1}a + \alpha_{n,i}a^n$ для $i = 3, ..., n-1$.

Знайдемо ще $T(a^n)$. Із умови

$$T(a)T(a^n) = a \cdot a^n = 0 = (\alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n) \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} a^j$$

знаходимо, що $\alpha_{1n} = 0$, …, $\alpha_{n-1,n} = 0$. Це означає, що $T(a^n) = \alpha_{nn}a^n$ і оскільки T – невироджений лінійний оператор на A, то $\alpha_{nn} \neq 0$.

Ми довели, що T в базисі $\{a,...,a^n\}$ має матрицю вигляду (1) вказаного в формулюванні теореми.

Навпаки, нехай T в базисі $\{a,a^2,...,a^n\}$ нільпотентної алгебри A має матрицю вигляду (1). Безпосередньо перевіряється, що тоді

$$T(a^i)T(a^j) = a^i \cdot a^j \text{ для } i, j = 1,...,n.$$

Звідси за лінійністю знаходимо, що $T(x)T(y) = xy$ для довільних елементів $x, y \in A$, тобто T – ортогональний лінійний оператор на A. Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Якщо A – нільпотентна асоціативна алгебра з нульовим квадратом, тобто $A^2 = 0$, то, очевидно, кожен лінійний оператор на A буде ортогональним і тому $O(A) = GL(A)$ – повна лінійна група на векторному просторі A.

Твердження 1. Нехай $A = K < x, y, z \mid xy = z, x^2 = y^2 = z^2 = 0, yx = 0, xz = yz = 0 >$ – некомутативна нільпотентна асоціативна алгебра розмірності 3 над K. Тоді $O(A)$ складається з лінійних операторів, які в базисі $\{x, y, z\}$ мають матриці вигляду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, де $\alpha_{33} \neq 0$, $\lambda \neq 0$, α_{31}, α_{32} – довільні елементи поля K.

Доведення. Якщо позначимо базисні елементи алгебри A через $x = e_{12}$, $y = e_{23}$, $z = e_{13}$, то, як неважко переконатися, алгебра A ізоморфна асоціативній алгебрі $N_3(K)$ всіх строго трикутних матриць порядку 3 з коефіцієнтами в полі K.

Нехай $T \in O(A)$ – довільний ортогональний оператор на A. Позначимо

$$T(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z,$$
$$T(y) = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z,$$
$$T(z) = 0x + 0y + \alpha_{33}z$$

Зауважимо, що $T(z) \subseteq Kz$, оскільки Kz – анулятор алгебри A і тому Kz інваріантний відносно T за лемою 3. Виберемо довільні елементи

$$a = u_1x + v_1y + w_1z \text{ і } b = u_2x + v_2y + w_2z$$

із A. За правилом множення базисних елементів отримаємо $ab = u_1v_2z$. Далі

$$T(a) = u_1(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z) + v_1(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z) + w_1\alpha_{33}z, \tag{2}$$

і

$$T(b) = u_2(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z) + v_2(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z) + w_2\alpha_{33}z \tag{3}$$

і тому, як неважко переконатися,

$$T(a)T(b) = (\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}v_1)(\alpha_{21}u_2 + \alpha_{22}v_2)z.$$

Із рівності $T(a)T(b) = ab$ отримаємо (з урахуванням рівностей (2) і (3)), що

$$(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}v_1)(\alpha_{21}u_2 + \alpha_{22}v_2) = u_1v_2,$$

де остання рівність виконується для довільних елементів $u_i, v_i \in K$, $i = 1, 2$.

Покладаючи $u_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_1 = 0$, $u_2 = 0$, отримаємо що $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1$. Далі, покладаючи

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ v_1 = 0,\ v_2 = 0,$$

знаходимо $\alpha_{11}\alpha_{21} = 0$. Оскільки $\alpha_{11} \neq 0$, то $\alpha_{21} = 0$. Аналогічно, покладаючи $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1$, отримуємо $\alpha_{12} = 0$

Зауважимо, що $\alpha_{33} \neq 0$, оскільки лінійний оператор T невироджений. Покладемо $\alpha_{11} = \lambda$. Тоді $\alpha_{22} = \lambda^{-1}$ і матриця лінійного оператора T має вигляд $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$.

Навпаки, якщо T – лінійний оператор на алгебрі A, матриця якого в базисі $\{x, y, z\}$ має вигляд $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, то, як неважко перевірити, виконується рівність $T(a)T(b) = ab$ для довільних $a, b \in A$.

ВИСНОВКИ. Описаний у статті підхід до вивчення ортогональних операторів на асоціативних алгебрах може бути застосований і для вивчення більш широких класів кілець. Найбільш цікавими є нескінченновимірні асоціативні алгебри, які збігаються зі своїм квадратом.

Список використаних джерел

1. А.П. Петравчук, С.В. Білун. Про ортогональні оператори на скінченовимірних алгебра Лі // Вісник Київського нац. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки (2003) №3. – С.60-64.
2. S.Bilun, D.Maksimenko, A.Petravchuk, On the group of Lie-orthogonal operators on a Lie algebra// Methods of Functional Analysis and Topology, (2011) v.17, no.3. – P.199-203.
3. D.R. Popovich, Lie-orthogonal operators, Linear Algebra Appl., 438 (2013), № 5. – P. 2090-2106.
4. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. – 496 с.

Надійшла до редколегії 27.11.13

С .Лисенко, асп., В. Лучко, канд. физ.-мат. наук, А. Петравчук, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Пусть K – поле и A – ассоциативная алгебра над K (не обязательно с единицей). Линейный оператор T на A будем называть ортогональным, если T(x)T(y)=xy для пороизвольных x, y из A. Изучаются ассоциативные алгебры с нетривиальным ортогональным оператором T и группа O(A) всех биективных ортогональных операторов на A для некоторых классов алгебр. Доказано, что радикал Джекобсона J(A) инвариантный относительно действия такой группы. Структура группы O(A) исследована для некоторых классов алгебр A.

S. Lysenko, PhD graduate, V. Luchko, PhD, A. Petravchuk, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ORTHOGONAL OPERATORS ON ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Let K be a field and A an associative algebra over K (not necessarily with unit). A linear operator T on A will be called orthogonal if T(x)T(y)=xy for all x, y in A. Associative algebras with a nontrivial orthogonal operator T and groups O(A) of bijective orthogonal operators on A are studied for some classes of algebras. It is proved that the Jacobson radical J(A) is invariant under such a group. The structure of the othogonal group O(A) is investigated for some types of algebrasA.

УДК 539.3

В. Будак, д-р техн. наук, проф.,
В. Карнаухов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
В. Січко, канд. фіз.-мат. наук, доц., А. Завгородній, канд. фіз.-мат. наук
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ТОВСТОЇ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ МЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Методом скінченних елементів розв'язано просторову задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової циліндричної панелі з жорстко защемленими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Досліджено вплив структурної неоднорідності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики панелі, на її власну частоту, максимальний прогин, максимальну температуру і на коефіцієнт демпфування панелі.

Вступ. В сучасній техніці широко застосовуються товсті циліндричні панелі, для розрахунку динамічного стану яких виникає потреба у використанні просторової постановки задач механіки деформівного твердого тіла [8]. Для циліндричних тіл з полімерних матеріалів і композитів на їх основі необхідно враховувати їх в'язкопружні властивості. При гармонічному навантаженні, особливо на резонансних частотах, в таких елементах конструкцій може мати місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву в результаті гістерезисних втрат в матеріалі. В [1] розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Для її розв'язування використано метод Фур'є в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Більш широкі можливості для розв'язування спряжених задач термомеханіки відкриває використання методу скінченних елементів (МСЕ). В даній статті цей метод застосовано для дослідження коливань і дисипативного розігріву непружної товстої тришарової циліндричної панелі з середнім полімерним демпфуючим шаром і двома зовнішніми металічними шарами при її навантаженні гармонічним за часом поверхневим тиском $P_0 \cos \omega t$ з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання непружної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, розвинута в [3]. Вважається, що торці панелі жорстко защемлені, а характеристики матеріалу не залежать від температури. При цьому задача розпадається на декілька окремих задач: 1) задачу про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) задачу розрахунку дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією.

Зазначимо, що в літературі відсутні розв'язки задач про резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних шаруватих тіл в просторовій постановці.

Постановка зв'язаної задачі і її розв'язок методом скінченних елементів. Розглядається товста тришарова циліндрична панель, середній шар якої є ізотропним в'язкопружним з незалежними від температури комплексними характеристиками, а два зовнішніх шари є ізотропними металічними. Така структурна неоднорідність широко використовується в багатьох галузях техніки для пасивного демпфування вільних і вимушених коливань елементів конструкцій. Для дослідження вимушених коливань такої панелі в просторовій постановці використаємо рівняння, пред-