

слідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках отримано за допомогою методу Р.Шепері.

Побудований розв'язок відповідає заданню переміщення в загальному вигляді. Розв'язок задачі для конкретно заданих граничних умов буде предметом наступних публікацій.

Список використаних джерел

1. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика, сборник переводов. – 1956. – 35, №1. – С. 140-146.
2. Гомилко А.М., Гуржий А.А., Трофимчук А.М. Гармонические колебания пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании // Акуст. вiстник. – 1999. – 2, №3. – С.33-41.
3. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст.вiстник. – 2007. – 10, №2. – С.43-63.
4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. Двумерное волновое движение в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела, Том 1. – Донецкий национальный университет, 2013. – С. 253–257.
5. Москвитин В.В. Сопrotивление вязкоупругих материалов. – М.:Наука, 1972. – 328 с.
6. Рушцкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. I. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
7. Рушцкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. II. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С. 115–125.
8. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1956. – 220 с.
9. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К.: Наук. думка, 2003. – 230 с.
10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. –1956. – 28. – P.168 – 178.
11. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. : II. – Higher frequency range // J. Acoust.Soc.Amer, 1956. – 28. – P. 179-191.
12. Shapery R.A. Approximate method of transform Inversion for viscoelastic stress analysis // Processing of the Fourth U.S.Nat. Congress of App. Mech.. vol.2, ASME. – 1962. – P. 1075.

Надійшла до редколегії 10.04.14

Р. Исрафилов, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр. Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Решение пространственно-двухмерной задачи получено в рамках теоретической линейной схемы Био путем применения преобразования Лапласа по времени, комплексного преобразования Фурье по пространственной координате и метода последовательных приближений. Граничные условия соответствуют действию на границе среды источника упругих перемещений. Переход к оригиналу в полученных решениях получен с помощью метода Р.Шепері.

R. Israfilov, PhD, K. Savelieva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEM FOR SATURATED POROUS HALF-SPACE

Solution of spatially two-dimensional problem is obtained in the framework of the theoretical classical linear scheme Bio by the Laplace transform, the complex Fourier transform, and the method of successive approximations. Boundary conditions correspond to the action of the source of elastic displacements on the medium boundary. Original of the solutions is obtained by the method of R.Sheperі.

УДК 539.3

Р. Ісрафілов, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСИЩЕНОГО РІДИНОЮ АБО ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОРОЖНЬОГО ЦИЛІНДРА ПІД ВПЛИВОМ ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто процес деформування насиченого рідиною або газом пористого скляного порожнього циліндра внаслідок імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні. Враховано стисливість рідини чи газу. В якості теоретичної моделі середовища використано класичну лінійну схему Біо.

Вступ

Теоретичні результати механіки насичених пористих середовищ знаходять широке практичне застосування [1-11]. Зокрема, в хімічній і нафтопереробній промисловості для очищення рідин і газів від забруднення і агресивних домішок використовуються фільтрувальні елементи з пористих металів [1]. В авіації один з методів боротьби з утворенням криги полягає в подачі підігрітого повітря або рідини, що випаровується, через пористі корозійностійкі матеріали передніх кромок крил літаків [4]. У механіці гірських порід велика увага приділяється зміні фільтраційних і механічних процесів у масиві, що є пористим насиченим рідиною або газом середовищем. Таким чином, пористі матеріали в процесі експлуатації зазвичай контактують з деяким газоподібним чи рідким середовищем, внаслідок чого можуть виникнути особливості фільтрації в порах, зміни напружено-деформованого стану та міцнісних властивостей скелета. З цього випливає необхідність теоретичного описання поведінки таких матеріалів, що послідовно враховує фізико-механічні властивості і структуру їхніх окремих фаз. Запропоноване дослідження проводилося в рамках теорії Біо [5], яка докладно описує поведінку середовища.

Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглядається процес деформування насиченого рідиною або газом досить довгого пористого скляного порожнього циліндра внаслідок миттєво виниклого рівномірно розподіленого імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні з урахуванням стисливості рідини чи газу. Протягом проміжку часу $0 \leq t \leq t_0$ навантаження в порожнині зростає до Q_1 , а при $t \geq t_0$ зберігається сталим (атмосферний тиск $Q_0 < Q_1$ ($Q_0 < P_0 < Q_1$)).

Початкові рівняння для пористого середовища, насиченого рідиною або газом, згідно з методом Біо, записуються у вигляді:

рівняння руху твердої фази

$$\sigma_{rr}^{(s)} \nu_r + (\sigma_{rr}^{(s)} - \sigma_{\theta\theta}^{(s)})/r = \rho_{11}u_{,tt}^{(s)} + \rho_{12}u_{,tt}^{(f)} + b(u_{,t}^{(s)} + u_{,t}^{(f)}), \quad (1)$$

рівняння руху рідкої або газоподібної фази

$$-m_2 p_{,r}^{(f)} = \rho_{12}u_{,tt}^{(s)} + \rho_{22}u_{,tt}^{(f)} - b(u_{,t}^{(s)} + u_{,t}^{(f)}), \quad (2)$$

визначальні рівняння середовища

$$\sigma_{rr}^{(s)} = Ae^{(s)} + 2Nu_{,r}^{(s)} + Qe^{(f)}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(s)} = Ae^{(s)} + 2Nu^{(s)}/r + Qe^{(f)}, \quad (3)$$

$$-m_2 p^{(f)} = Qe^{(f)} + Re^{(f)}. \quad (4)$$

Враховуючи специфіку задання граничних умов для напружень в скелеті і тиску рідини або газу, зазначимо таке: оскільки зазвичай на граничній поверхні докладається загальне навантаження, слід враховувати об'ємний вміст твердої фази і рідини або газу. Загальний тиск рідини або газу в пористому циліндрі подається у вигляді

$$P^{(f)} = P_1^{(f)} + P_0, \quad (5)$$

де $P_1^{(f)}$ – тиск, що викликаний процесом фільтрації.

Таким чином, задача полягає у розв'язанні зв'язаних рівнянь (1) – (4) при заданих на поверхнях порожнього циліндра граничних умовах

$$\sigma_{rr}^{(s)}|_{r=r_b} = -m_1(Q_0 - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0)), \quad \sigma_{rr}^{(s)}|_{r=r_H} = 0, \quad (6)$$

$$P_1^{(f)}|_{r=r_b} = -m_2(Q_0 + E(t-t_0)(Q'_1 - Q'_0)), \quad \sigma_{,r}^{(f)}|_{r=r_H} = 0, \quad (7)$$

де $Q'_0 = Q_0 - P_0$, $Q'_1 = Q_1 - P_0$, $E(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1, t \geq 0; \end{cases}$ $Q'_1 = Q_1 - P_0$, $Q_0 < P_0 < Q_1$.

У формулах (1) – (7) використано позначення: $\sigma_{rr}^{(s)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(s)}$ – напруги в скелеті середовища; $P^{(f)}$ – поточний тиск рідини (газу) в середовищі, $e^{(s)}$, $e^{(f)}$ та $u^{(s)}$, $u^{(f)}$ – об'ємні деформації і переміщення скелета (s) і рідини (газу) (f), відповідно; A, Q, N, R – стандартні фізичні сталі теорії Біо, що залежать від характеристик скелета і рідини (газу) [6,7]; b – коефіцієнт дифузної взаємодії твердої та рідкої складових середовища; $\rho_{11} = (1 - m_2)\rho^{(s)} - \rho_{12}$, $\rho_{22} = m_2\rho^{(f)} - \rho_{12}$, $\rho^{(s)}$, $\rho^{(f)}$ – щільності твердої і рідкої фази; ρ_{12} – коефіцієнт приєднаної маси; t – тривалість імпульсу; r_H – внутрішній і зовнішній радіуси циліндра.

Розв'язання системи рівнянь

Точний розв'язок системи зв'язаних рівнянь (1) – (4) в просторі зображень за Лапласом можна отримати у вигляді інтегралів від складних комбінацій модифікованих циліндричних функцій. Знаходження оригіналів і обчислення інтегралів у цьому випадку пов'язані з певними математичними труднощами. Нижче запропоновано зручний та ефективний підхід до розв'язання задачі, а розв'язки, що побудовано, записано через елементарні функції. Задача розв'язується у напруженнях. З цією метою, з співвідношень (3) і (4) для переміщень фаз отримано формули

$$u^{(s)}(r, t) = \frac{1}{r^{a_1}} \int_{r_b}^r r^{a_1} (a_2 \sigma_{rr}^{(s)} + a_3 P^{(f)}) dr + c_1(t) \frac{1}{r^{a_1}}, \quad (8)$$

$$u^{(f)}(r, t) = \frac{1}{r} \int_{r_b}^r r (a_4 P^{(f)} + a_5 \sigma_{rr}^{(s)}) dr + a_6 \frac{1}{r} \int_{r_b}^r \left(\frac{1}{r^{a_1}} \int_{r_b}^r r^{a_1} (a_2 \sigma_{rr}^{(s)} + a_3 P^{(f)}) dr \right) dr + a_6 (1 - a_1)^{-1} c_1(t) \frac{1}{r^{a_1}} + c_2(t) \frac{1}{r}, \quad (9)$$

де $a_1 = A_1 \left(A - \frac{Q^2}{R} \right)$, $a_2 = A_1$, $a_3 = m_2 \frac{Q}{R} A_1$, $A_1 = \left(A + 2N - \frac{Q^2}{R} \right)^{-1}$, $0 < a_1 < 1$, $a_4 = -m_2 (A + 2N) \frac{A_1}{R}$, $a_5 = -Q \frac{A_1}{R}$.

Зазначимо, що (8), (9) є результатом розв'язання рівнянь Бернуллі. Підставляючи (8) до (1), (2), з урахуванням (3), (4), для рівнянь руху отримаємо

$$\sigma_{rr,r}^{(s)} - 2N(1 + a_1)c_1(t)r^{-(2+a)} + b(a_6(1 - a_1)^{-1} - 1)c_{1,t}r^{-a_1} - (\rho_{11} + \rho_{12}a_6(1 - a_1)^{-1})c_{1,tt}r^{-a_1} + bc_{2,t}r^{-1} - \rho_{12}c_{2,tt}r^{-1} =$$

$$= -2NI_0(r, t) + 2N(1 + a_1)r^{-(2+a_1)}I_1(r, t) + \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) r^{-a_1} I_1(r, t) - \left(b \frac{\partial}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{1}{r} I_2(r, t) + a_6 \frac{1}{r} I_3(r, t) \right), \quad (10)$$

$$m_2 P_{1,r}^{(f)} - b(a_6(1 - a_1)^{-1} - 1)c_{1,t}r^{-a_1} - (\rho_{12} + \rho_{22}a_6(1 - a_1)^{-1})c_{1,tt}r^{-a_1} - bc_{2,t}r^{-1} - \rho_{22}c_{2,tt}r^{-1} =$$

$$= \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) r^{-a_1} I_1(r, t) + \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{1}{r} I_2(r, t) + a_6 \frac{1}{r} I_3(r, t) \right), \quad (11)$$

$$\text{де } I_0(r, t) = \int_{r_6}^r \frac{1}{r} (a_2 \sigma_{rr}^{(s)} + a_3 P_1^{(f)}) dr, \quad I_1(r, t) = \int_{r_6}^r r^{a_1} (a_2 \sigma_{rr}^{(s)} + a_3 P_1^{(f)}) dr, \quad I_2(r, t) = \int_{r_6}^r r (a_4 P_1^{(f)} + a_5 \sigma_{rr}^{(s)}) dr,$$

$$I_3(r, t) = \int_{r_6}^r (r^{1/a_1} \int_{r_6}^r r^{a_1} (a_2 \sigma_{rr}^{(s)} + a_3 P_1^{(f)}) dr) dr.$$

Інтегруючи вирази (10), (11), знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(s)} = & -2N c_1(t) r^{-(1+a_1)} - b(1-a_1)^{-1} (a_6(1-a_1)^{-1} - 1) c_{1,t} r^{1-a_1} - (bc_{2,t} - \rho_{12} c_{2,t}) \ln r + \\ & + (1-a_1)^{-1} (\rho_{11} + \rho_{12} a_6 (1-a_1)^{-1}) c_{1,t} r^{1-a_1} + 2N(1+a_1) \int_{r_6}^r r^{-(2+a_1)}(r, t) I_1(r, t) dr - \\ & - 2N_0 \int_{r_6}^r I_0(r, t) dr + \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int_{r_6}^r r^{-a_1} I_1(r, t) dr - \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_2(r, t) dr + a_6 \int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_3(r, t) dr \right) + c_3(t). \quad (12) \\ P_1^{(f)} = & -(b/m_2) (a_6(1-a_1)^{-1} - 1) (1-a_1)^{-1} c_{1,t} r^{1-a_1} - (1/m_2) \rho_{12} + \rho_{22} a_7 (1-a_1)^{-1} r^{1-a_1} c_{1,t} - \\ & - (b/m_2) c_{2,t} \ln r - (\rho_{22}/m_2) c_{2,t} \ln r - (1/m_2) \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_{r_6}^r \frac{1}{r^{a_1}} I_1(r, t) dr - \end{aligned}$$

Виходячи з граничних умов (6), (7), при $r = r_6$, отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(s)} = & -m_1 [Q_0 - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0)] - 2N c_1(t) (r^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}) - a_{11} c_{1,t} (r^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}) + a_{12} c_{1,t} (r^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}) - bc_{2,t} \ln \frac{r}{r_6} + \\ & + \rho_{12} c_{2,t} \ln \frac{r}{r_6} - 2N \int_{r_6}^r I_0(r, t) dr + a_{13} \int_{r_6}^r r^{-2-a_1} I_1(r, t) dr + \left(b \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[\int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_2(r, t) dr + a_6 \int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_3(r, t) dr \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^{(f)} = & m_2 (Q_0' + E(t-t_0)(Q_1' - Q_0')) - m_2^{-1} a_{11} c_{1,t} (r^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}) - a_{14} c_{1,t} (r^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}) - b m_2^{-1} c_{2,t} \ln \frac{r}{r_6} - m_2^{-1} \rho_{22} c_{2,t} \ln \frac{r}{r_6} - \\ & - m_2^{-1} \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_{r_6}^r r^{-a_1} I_1(r, t) dr - \left(\frac{1}{m_2} \right) \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{22} \frac{d^2}{dt^2} \right) \left(\int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_2(r, t) dr + a_6 \int_{r_6}^r \frac{1}{r} I_3(r, t) dr \right). \quad (15) \end{aligned}$$

З граничних умов (6), (7) при $r = r_H$ випливає

$$\begin{aligned} & -m_1 (Q_0 - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0)) - 2N a_{17} c_1(t) - a_{18} a_{11} c_{1,t} + a_{12} a_{18} c_{1,t} - bc_{2,t} \ln \frac{r_H}{r_6} + \\ & + \rho_{12} c_{2,t} \ln \frac{r_H}{r_6} = 2N \int_{r_6}^{r_H} I_0(r, t) dr - a_{13} \int_{r_6}^{r_H} r^{-2-a_1} I_1(r, t) dr - \\ & - \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{11} \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_{r_6}^{r_H} r^{-a_1} I_1(r, t) dr + \left(b \frac{d}{dt} - \rho_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right) \left(\int_{r_6}^{r_H} r^{-1} I_2(r, t) dr + a_6 \int_{r_6}^{r_H} r^{-1} I_3(r, t) dr \right), \\ & - a_{15} c_{1,t} r_H^{-a_1} - a_{16} c_{1,t} r_H^{-a_1} - bc_{2,t} r_H^{-a_1} - \rho_{22} c_{2,t} r_H^{-1} = \\ & = \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{12} \frac{d^2}{dt^2} \right) r_H^{-a_1} I_1(r_H, t) + \left(b \frac{d}{dt} + \rho_{22} \frac{d^2}{dt^2} \right) \left[r_H^{-1} I_2(r_H, t) + a_6 r_H^{-1} I_3(r_H, t) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

У формулах (14) – (17) використано позначення:

$$\begin{aligned} a_{11} = & b(1-a_1)^{-1} (a_6(1-a_1)^{-1} - 1), \quad a_{12} = (1-a_1)^{-1} (\rho_{11} + \rho_{12} a_6 (1-a_1)^{-1}), \\ a_{13} = & 2N(1+a_1), \quad a_{14} = m_2^{-1} (\rho_{12} + \rho_{22} a_6 (1-a_1)^{-1}) (1-a_1)^{-1}, \quad a_{15} = b (a_6(1-a_1)^{-1} - 1); \quad a_{16} = \rho_{12} + \rho_{22} a_6 (1-a_1)^{-1}, \\ a_{17} = & r_H^{-1-a_1} - r_6^{-1-a_1}, \quad a_{18} = r_H^{1-a_1} - r_6^{1-a_1}. \end{aligned}$$

Виходячи з (12), (13), систему рівнянь (14) – (17) будемо розв'язувати шляхом поєднання методу послідовних наближень та інтегрального перетворення Лапласа за часом. Під час застосування методу послідовних наближень, як перше наближення, беремо розв'язок системи (14) – (17) без участі правих частин рівнянь, при початкових умовах $c_1(0) = c_1'(0) = c_{20}(0) = c_1'(0)$. Друге наближення знаходимо з системи (14) – (17) з участю інтегральних доданків, які побудовано з урахуванням першого наближення за тих самих нульових початкових умов. Подібним чином визначаються наступні наближення. При цьому всі наближення обчислюються в просторі зображень в квадратурах, які записуються через елементарні функції.

Оскільки, при виконанні умови Ліпшиця, послідовні наближення рівномірно збігаються, то, з практичних міркувань, зазвичай можна обмежитися другим наближенням.

З системи (14) – (17), в просторі зображень, знаходимо для першого наближення

$$\tilde{c}_1(p) = \frac{\frac{m_1}{a_{19}}(b + \rho_{22}p)(Q_0 - (Q_1 - Q_0)e^{-p t_0})}{p(p^3 + a_{20}p^2 + a_{21}p + a_{22})}; \tilde{c}_2(p) = -\frac{\frac{m_1}{a_{19}}r_H^{1-a_1}(a_{15} + a_{16}p)(Q_0 - (Q_1 - Q_0)e^{-p t_0})}{p(p^3 + a_{20}p^2 + a_{21}p + a_{22})}, \quad (18)$$

де

$$a_{19} = \left(a_{12}a_{18} - r_H^{1-a_1}a_{16} \ln \frac{r_H}{r_6} \right) \rho_{22}, a_{20} = \frac{1}{a_{19}}(a_{18}(a_{12}b - a_{11}\rho_{22}) + r_H^{1-a_1}(a_{16}b - \rho_{12}a_{15}) \ln \frac{r_H}{r_6}),$$

$$a_{21} = -\frac{1}{a_{19}}\left(a_{11}a_{18}b + 2Na_{17}\rho_{22} + a_{15}r_H^{1-a_1}b \ln \frac{r_H}{r_6} \right), a_{22} = -2N \frac{1}{a_{19}}a_{17}b, a_{19} > 0, a_{20} > 0, a_{21} > 0, a_{22} > 0.$$

Запишемо формально розв'язок (18) через обернені перетворення

$$c_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{c}_1(p) dp, c_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{c}_2(p) dp. \quad (19)$$

Підінтегральні функції мають чотири прості особливі точки в комплексній площині: два дійсних полюси $p = 0$, $p = \gamma_1$ і два спряжених комплексних полюси $p = \gamma_2 \pm i\gamma_3$.

Якщо $q_3 \geq 0$, $q_1 > 0$, то

$$\gamma_1 = -\frac{a_{20}}{3} - 2\sqrt{q_1/3} \operatorname{ctg} 2\alpha, \gamma_2 = -\frac{a_{20}}{3} + \sqrt{+q_1/3} \operatorname{ctg} 2\alpha, \gamma_3 = \sqrt{+q_1/3} \sqrt{3} \operatorname{cosec} 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta / 2} \quad (|\alpha| \leq \pi/4), \operatorname{tg} \beta = \frac{2}{q_2} \sqrt{\left(-\frac{q_1}{3}\right)^3}, (|\beta| \leq \pi/2). \quad (20)$$

Якщо $q_3 \geq 0$, $q_1 < 0$, то

$$\gamma_1 = -\frac{a_{20}}{3} - 2\sqrt{-q_1/3} \operatorname{cosec} 2\alpha, \gamma_2 = -\frac{a_{20}}{3} + \sqrt{-q_1/3} \operatorname{cosec} 2\alpha, \gamma_3 = \sqrt{-q_1/3} \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta / 2} \quad (|\alpha| \leq \pi/4), \sin \beta = \frac{2}{q_2} \sqrt{\left(-\frac{q_1}{3}\right)^3}, (|\beta| \leq \pi/2). \quad (21)$$

Далі формули (18) зручно записати у вигляді

$$\tilde{c}_1(p) = \frac{m_1}{a_{19}} \tilde{\Phi}_1(p) (Q_0 - (Q_1 - Q_0)e^{-p t_0}), \tilde{\Phi}_1(p) = (b + \rho_{22}p) \left(p(p^3 + a_{20}p^2 + a_{21}p + a_{22}) \right)^{-1}, \quad (22)$$

$$\tilde{c}_2(p) = -\frac{m_1 r_H^{1-a_1}}{a_{19}} \tilde{\Phi}_2(p) (Q_0 - (Q_1 - Q_0)e^{-p t_0}), \tilde{\Phi}_2(p) = (a_{15} + a_{16}p) \left(p(p^3 + a_{20}p^2 + a_{21}p + a_{22}) \right)^{-1}, \quad (23)$$

$$e^{-p t_0} \tilde{\Phi}_1(p) \xrightarrow{\cdot} \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq t_0, \\ \Phi_1(t - t_0), t \geq t_0; \end{cases} e^{-p t_0} \tilde{\Phi}_2(p) \xrightarrow{\cdot} \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq t_0, \\ \Phi_2(t - t_0), t \geq t_0. \end{cases} \quad (24)$$

Застосовуючи для окремих випадків (20), (21) інтегральну теорему Коші про лишки, з (22), (23) знаходимо

$$\Phi_1(t) = l_1 + l_2 e^{\gamma_1 t} + l_3 e^{\gamma_2 t} \cos \gamma_3 t + l_4 e^{\gamma_2 t} \sin \gamma_3 t, \Phi_2(t) = l_5 + l_6 e^{\gamma_1 t} + l_7 e^{\gamma_2 t} \cos \gamma_3 t + l_8 e^{\gamma_2 t} \sin \gamma_3 t, \quad (25)$$

де

$$l_1 = -b \left(\gamma_1 (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) \right)^{-1}, l_2 = (b + \rho_{22} \gamma_1) \left(\gamma_1 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + \gamma_1 \gamma_3^2 \right)^{-1},$$

$$l_3 = (l \gamma_3)^{-1} \left((b + \rho_{22} \gamma_2) \gamma_3 (\gamma_1 - 2\gamma_2) + \rho_{22} \gamma_3 (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3^2) \right),$$

$$l_4 = -(l \gamma_3)^{-1} \left(\rho_{22} \gamma_3^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2) - (b + \rho_{22} \gamma_2) (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3^2) \right),$$

$$l_5 = -a_{15} \left(\gamma_1 (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) \right)^{-1}, l_6 = (a_{15} + a_{16} \gamma_1) \left(\gamma_1 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + \gamma_1 \gamma_3^2 \right)^{-1},$$

$$l_7 = (l \gamma_3)^{-1} \left((a_{15} + \gamma_2 a_{16}) \gamma_3 (\gamma_1 - 2\gamma_2) + a_{16} \gamma_3 (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3^2) \right),$$

$$l_8 = -(l \gamma_3)^{-1} \left(a_{16} \gamma_3^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2) - (a_{15} + \gamma_2 a_{16}) (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3^2) \right),$$

$$l = (\gamma_3 (\gamma_1 - 2\gamma_2))^2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3^2)^2.$$

Згідно (19), оригінали для $c_1(p)$ та $c_2(p)$ запишемо в наступному вигляді

$$c_1(t) = \frac{m_1}{a_{19}} \left\{ Q_0 \left(l_1 + l_2 e^{\gamma_1 t} + l_3 e^{\gamma_2 t} \cos \gamma_3 t + l_4 e^{\gamma_2 t} \sin \gamma_3 t \right) - \right. \\ \left. - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0) \left(l_1 + l_2 e^{\gamma_1(t-t_0)} + l_3 e^{\gamma_2(t-t_0)} \cos \gamma_3(t-t_0) + l_4 e^{\gamma_2(t-t_0)} \sin \gamma_3(t-t_0) \right) \right\}, \\ c_2(t) = -\frac{m_1 r_H^{1-\alpha}}{a_{19}} \left\{ Q_0 \left(l_5 + l_6 e^{\gamma_1 t} + l_7 e^{\gamma_2 t} \cos \gamma_3 t + l_8 e^{\gamma_2 t} \sin \gamma_3 t \right) - \right. \\ \left. - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0) \left(l_5 + l_6 e^{\gamma_1(t-t_0)} + l_7 e^{\gamma_2(t-t_0)} \cos \gamma_3(t-t_0) + l_8 e^{\gamma_2(t-t_0)} \sin \gamma_3(t-t_0) \right) \right\}. \quad (26)$$

Підставляючи (26) у (8), (9) та (14), (15) без інтегральних доданків, знаходимо розв'язок поставленої задачі в першому наближенні. При побудові другого наближення для невідомих $c_1(p)$, $c_2(p)$, отримано формули, що у вигляді, що містять добуток двох зображень, оригінали яких визначають згортки двох відомих функцій типу (26). При цьому перехід до оригіналу відбувається шляхом обчислення інтегральних комбінацій зазначених функцій. Далі, підставляючи $c_1(p)$, $c_2(p)$ у (8), (9) і (14), (15) з відомими інтегральними доданками, знаходимо розв'язок розглянутої задачі в другому наближенні. Зауважимо, що всі інтегральні доданки, побудовані в елементарних функціях, легко обчислюються.

Приклад результатів числового дослідження

Проведено числовий аналіз з метою оцінки впливу динаміки на напружено-деформований стан і міцність насиченого рідиною пористого матеріалу. Це дослідження проводилося для скла, насиченого рідиною з наступними характеристиками:

$$K_1 = 4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \mu_1 = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \nu_1 = 0,25, m_2 = 0,3, \frac{P_0}{Q_0} = 0,5; 1, \rho_{11} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \frac{\text{сек}^2}{\text{М}^2}, t_0 = 30 \text{ сек},$$

$$\rho_{11} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \frac{\text{сек}^2}{\text{М}^2}, b = 10^{10} \text{ Па} \cdot \frac{\text{сек}}{\text{М}^2}, r_6 = 0,1 \text{ М}, r_H = 1 \text{ М}.$$

На рис.1, для порівняння, зображено два графіки зміни переміщень типу (8), в залежності від t/t_0 . Неперервну лінію побудовано для насиченого рідиною матеріалу, пунктирна – для сухого пористого матеріалу. Як можна бачити з графіків, у випадку ненасиченого рідиною (газом) пористого середовища, на поверхні циліндра спостерігаються коливання типу биття з різними амплітудами; у випадку насиченого середовища – гармонічні коливання з постійною амплітудою.

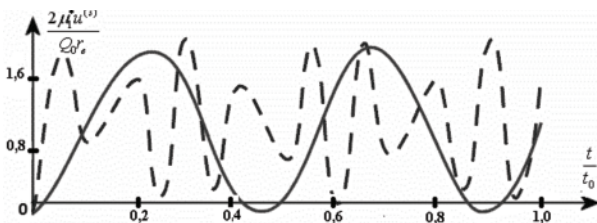


Рис.1

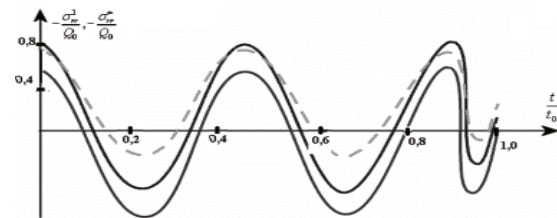


Рис.2

На рис.2 дві суцільні лінії є графіками залежності від t/t_0 радіальних напружень твердого фази $-\sigma_{rr}^1/Q_0$, де,

$$\sigma_{rr}^1 = \left(A - \frac{Q^2}{R} \right) e \delta_{ij} + 2N e_{ij} - \left(\frac{mQ}{R} - (1-m_2) \right) P^{(f)} \delta_{ij} \quad [5]. \text{ Графіки побудовано для двох значень параметра}$$

$P_0/Q_0 = 0,5; 1$. Пунктирна лінія є графіком залежності від t/t_0 макронапружень $-\sigma_{rr}^*/Q_0 = -c_1(\sigma_{rr}^1/Q_0 - c_2 \sigma_{rr}^{(f)}/Q_0)$ в системі "скелет-рідина" при $r/r_6 = 2$. З рис. видно, що поровий тиск істотно впливає на картину напруженого стану в пористому циліндрі. Для напружень у твердій фазі значення амплітуди із зростанням порового тиску збільшуються, тоді як амплітуди макронапружень в системі "скелет-рідина" залишаються незмінними. При цьому на деякій відстані від поверхні в циліндрі виникає зона розтягувальних радіальних напружень, макронапруження при цьому будуть майже стискальними. Цей факт є істотним для оцінки міцності пористого циліндра, тверда фаза якого (скло) має низьку міцність при розтягуванні.

Висновки

Вивчено процес деформування насиченого рідиною або газом пористого скляного порожнього циліндра внаслідок імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні. Враховано стисливість рідини чи газу. Результати теоретичного та числового дослідження є істотними для оцінки міцності пористого циліндра, тверда фаза якого має низьку міцність при розтягуванні.

Список використаних джерел

1. Белов С.В. Пористые материалы в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1981. – 247 с.
2. Гомилко А.М., Гуржий А.А., Трофимчук А.М. Гармонические колебания пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании // Акуст. вiстник. – 1999. – 2, №3. – С. 33-41.
3. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст. вiстник. – 2007. – 10, №2. – С. 43-63.

4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. К определению ядер наследственного уравнения насыщенной жидкостью пористой среды (Био) // XIV конф. им. Н.Кравчука. – 2012. – Т.1, С.194-197.
 5. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.:Наука, 1970. – 335 с.
 6. Рушницкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенной жидкостью пористого материала. I. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
 7. Трофимчук А.Н. Динамика пористых упругих и упругопластических грунтов, насыщенных жидкостью: Дис. д-ра техн. наук: 05.15.09 // НАН Украины. – К., 1999 – 411 л. – Библиогр.: л. 363–400.
 8. Хорошун Л.П., Исрафилов Р.М. Напряженное состояние пористого цилиндра, находящегося в жидкой среде, при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1980. –16, №6. – С.3–8.
 9. Шапиро Я.М., Мазинг Г.Ю., Прудников Н.Е. Основы проектирования ракет на твердом топливе. – М.: Военное изд-во, 1968. – 230 с.
 10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. – 1956. – 28. – P.168 – 178.
 11. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 179 – 191.
 12. Pecke C., Deresiewicz H. Thermal effects on wave propagation in liquid-filled porous media.-Acta Mechanica,- XVI,-№1-2. – 1973.

Надійшла до редколегії 10.04.14

Р.Исрафилов, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр. Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ИЛИ ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрен процесс деформирования насыщенного жидкостью или газом пористого стеклянного полого цилиндра вследствие импульсной нагрузки на его внутренней поверхности. Учены сжимаемость жидкости или газа. В качестве теоретической модели среды использована классическая линейная схема Био.

R.Israfilov, PhD, K. Savelieva, PhD S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS FOR SATURATED LIQUID OR GAS POROUS EMPTY CYLINDER UNDER THE INFLUENCE OF PULSE LOADING

Theoretically studied the deformation of saturated liquid or gas porous hollow glass cylinder as a result of the impulse load on its inner surface. Taken into account the compressibility of the fluid or gas. The study conducted in the framework of the Biot theory.

УДК 539.595

О. Лимарченко, д-р техн. наук, Р. Ткаченко, асп. КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

КОЛИВАННЯ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА РУХОМІЙ ПЛАТФОРМІ

Побудовано математичну модель сумісного руху жорсткого циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до рухомої платформи, і досліджено нелінійні коливання системи під дією прикладеної до рухомої платформи гармонічної сили.

1. Вступ

Задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарах при різних закріпленнях продиктовані потребами сучасної техніки. Резервуари з рідиною, які знаходяться на рухомій платформі, використовуються в інженерних конструкціях в машинобудуванні, літакобудуванні, ракетній техніці, засобах транспортування та збереження рідинних вантажів [1, 3, 4, 5]. Аналітичні розв'язки цих нестаціонарних нелінійних крайових задач до теперішнього часу не одержані, тому застосовуються наближені методи, які базуються переважно на варіаційних алгоритмах.

Метою роботи є дослідження нелінійних коливань сумісного руху жорсткого циліндричного резервуара, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до платформи під дією прикладеної до платформи гармонічної сили.

2. Об'єкт дослідження

Дослідимо горизонтальний рух абсолютно твердого циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, приєднаного пружиною до рухомої платформи. Податливі пружини з малими жорсткостями не розглядалися, щоб збереглися малі переміщення резервуару. Для порівняння розглянуто жорстке закріплення. В початковий момент часу система платформа, резервуар з рідиною, що має вільну поверхню, знаходиться у стані спокою. До платформи прикладено гармонічну силу $F = A \cos(\omega t)$, де $\omega = 3.8; 4.0, 4.14; 4.3; 5.2$, $A = 662$ Н (частоти обиралися в околі частоти основного резонансу по першій гармоніці коливань рідини). Амплітуда сили A підбиралась в залежності від частоти і параметрів жорсткого закріплення. Загальну схему такої механічної системи зображено на рис. 1.

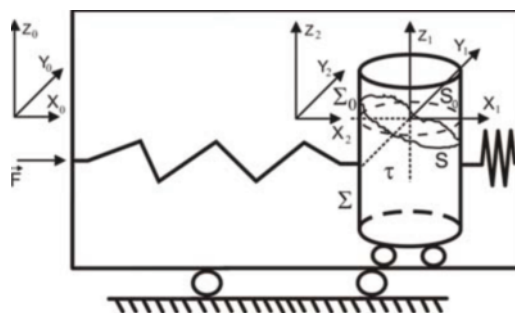


Рис.1. Схема механічної системи