Достатність доведено.

Необхідність. Нехай маємо інтегральне зображення (3). Потрібно довести рівність (4). Так, як ядро $\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda)\right)$ сумовано за $(x,y,\lambda)\in\Im\times\Im\times R^2$ ($\Im\in R^2$ і обмежена) відносно міри $dxdyd\rho(\lambda)$, тому отримаємо:

$$\left\langle L^+u,v\right\rangle=\int_\Im\int_\Im\left\{\int_{R^2}\Omega_\lambda(x;y)d\rho(\lambda)\right\}\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(\overline{L_y^+}\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(L_x^+\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)= \qquad (14)$$

$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)u(y)\overline{L^+v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\left\langle u;L^+v\right\rangle$$

Тут L^+ – звуження на $u,v\in C_0^\infty(\Im)$.

Із (14) випливає (4).

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо у (2) p=0 одержимо зображення (6.14) із [2, c.752]

Висновки

Доведена теорема стверджує що зображення (3.7) з [2, с. 652] для додатно визначеного ядра через сукупність додатно визначених елементарних ядер $\Omega_\lambda(x,y)$ можна одержати не тільки для рівняння

$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=\lambda u$ але і для більш складного рівняння $\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lambda u$,

де (φ_1,φ_2 – деякі аналітичні функції, ρ – дійсне число).

Список використаних джерел

1. Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям диференцциальних операторов // Докл. АН. СССР. – 1956. – 108, №3. – С.893–896.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 798 с.
3. Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на елементарные произведения // Докл. АН. СССР. – 1946. – 53, №1. – С.3–6.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Из-во "Физ.-мат.литература", 2001 – 300 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 724 с.

Надійшла до редколегії 10.03.14

О. Лопотко, канд. физ.-мат. наук
Национальний лесотехнический университет Украины, Львов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ С ВЫРАЖЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЕЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Получено интегральное представление положительно определенных ядер двух переменных связанных с выражением второго порядка елиптического типа. Эта теорема обобщает теорему об интегральном представлении положительно определенных ядер связанных с оператором Лапласа.

O. Lopotko, PhD
National Forestry and Wood-Technology University of Ukraine, Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVE DEFINITE KERNELS ASSOCIATED WITH THE EXPRESSION OF SECOND ORDER OF ELLIPTIC TYPE

An integral representation of positive definite kernels of the two variables associated with the expression of second order of elliptic type. The result is generalization of the theorem about integral representation of positively definite kernels associated with operator Laplace.

УДК 512.643.8

Р. Динис, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
О. Тилищак, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

ПРО ЗВІДНІСТЬ ДЕЯКИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Показано звідність добутку підстановочної матриці циклу парної довжини n та діагональної матриці $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ порядку n над комутативним кільцем K з одиницею, де $t\in K$.

ВСТУП

Проблема класифікації всіх квадратних матриць, з точністю до подібності, яка повністю розв'язана над полем (див., наприклад, [4]), при переході до довільного комутативного кільця з одиницею сильно ускладнюється. В більшості випадків, як над кільцем класів лишків [1], вона включає в себе класичну нерозв'язну задачу про "пару матриць". Тільки матриці малих порядків, з точністю до подібності, вдалося описати над деякими кільцями головних ідеалів (див., наприклад, [5 – 8]). В таких випадках важливе значення має інформація про незвідні матриці.

Будемо розглядати питання звідності деяких мономіальних матриць над комутативними кільцями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо мономіальну матрицю над довільним комутативним кільцем *K* з одиницею вигляду

$$M(k_1,k_2,...,k_n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_n \\ k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь на питання про звідність такої матриці інваріантна відносно циклічної перестановки елементів k_1, k_2, ..., k_n. Якщо $k_1=k_2=...=k_n$, $n>1$, то матриця $M(k_1,k_2,...,k_n)$, очевидно, звідна. Якщо кільце *K* локальне і *tK* – його радикал Джекобсона для деякого $t\in K$, $t\neq 0$, то матриця $M(1,...,1,t)$ довільного порядку є незвідною, оскільки її характеристичний многочлен $x^n+(-1)^{n+1}t$ незвідний. Крім того в [2]**Ошибка! Источник ссылки не найден.** показано, що матриця $M(1,t,...,t)$ довільного порядку над тим же кільцем незвідна. В [3] встановлено критерій звідності $M(1,...,1,t,...,t)$ порядку $n\le 6$ над тим же кільцем. Дослідимо звідність матриць $M(1,...,1,t,1,...,1,t)$ довільно1го порядку $n>1$ над комутативним кільцем K з одиницею, де $t\in K$.

ЗВІДНІСТЬ НАД КІЛЬЦЕМ $Z[\lambda]$

Лема 1. *Нехай m, s – натуральні числа,* $n=2m$, $s<n$, $s\neq m$. *Тоді матриця* $M(\underbrace{1,...,1}_{s-1},t,1,...,1,t)$ *подібна матриці вигляду*

$$N=\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем $Z[\lambda]$ *многочленів з цілочисловими коефіцієнтами від невідомої* λ, *де* A, B *– квадратні матриці порядку* m *і є, зокрема, звідною.*

Доведення. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $s>m$. Нехай φ – лінійний оператор який визначено матрицею $M(\underbrace{1,...,1}_{s-1},t,1,...,1,t)$ в базисі e_1, e_2, ..., e_n деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $Z[\lambda]$. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi(e_1)=e_2,...,\varphi(e_{s-1})=e_s,\varphi(e_s)=\lambda e_s,\\ \varphi(e_{s+1})=e_{s+2},...,\varphi(e_{n-1})=e_n,\varphi(e_n)=\lambda e_1.\end{gathered} \tag{1}$$

Покладемо

$$\begin{gathered}b_1=\lambda e_1+e_{m+1},...,b_{s-m}=\lambda e_{s-m}+e_s,\\ b_{s-m+1}=e_{s-m+1}+e_{s+1},...,b_m=e_m+e_n.\end{gathered}$$

Враховуючи формули (1), одержимо

$$\begin{gathered}\varphi(b_1)=\lambda\varphi(e_1)+\varphi(e_{m+1})=\lambda e_2+e_{m+2}=b_2,\\ ...\\ \varphi(b_{s-m-1})=\lambda\varphi(e_{s-m-1})+\varphi(e_{s-1})=\lambda e_{s-m}+e_s=b_{s-m},\\ \varphi(b_{s-m})=\lambda\varphi(e_{s-m})+\varphi(e_s)=\lambda e_{s-m+1}+\lambda e_{s+1}=\lambda b_{s-m+1},\\ \varphi(b_{s-m+1})=\lambda\varphi(e_{s-m+1})+\varphi(e_{s+1})=e_{s-m+2}+e_{s+2}=b_{s-m+2},\\ ...\\ \varphi(b_{m-1})=\varphi(e_{m-1})+\varphi(e_{n-1})=e_m+e_n=b_m,\\ \varphi(b_m)=\varphi(e_m)+\varphi(e_n)=e_{m+1}+\lambda e_1=\lambda e_1+e_{m+1}=b_1\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, що b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m є базисом простору L. Матриця переходу від базису e_1, ..., e_n до базису b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m складається з елементів з $Z[\lambda]$ і має вигляд

$$C=\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \;\; \dots \;\; 0}_{s-m} & & & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det C = \pm 1$, то $C \in GL(n, Z[\lambda])$. Враховуючи формули (2), маємо

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(\underbrace{1,...,1}_{s-m-1}, t, 1,..., 1)$ і B – квадратні матриці порядку m.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай m – натуральне число, $n = 2m$. Тоді матриця $A = M(\underbrace{1,...,1}_{m-1}, t, 1,..., 1)$ подібна матриці вигляду*

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем $Z[\lambda]$ многочленів з цілочисловими коефіцієнтами від невідомої λ, де A, B – квадратні матриці порядку m і є, зокрема, звідною.

Доведення. Нехай φ – лінійний оператор, який визначено матрицею $M(\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, t, 1, ..., 1, t)$ в базисі e_1, e_2, ..., e_n деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $Z[\lambda]$. Тоді

$$\begin{gathered} \varphi(e_1) = e_2, ..., \varphi(e_{m-1}) = e_m, \varphi(e_m) = \lambda e_{m+1}, \\ \varphi(e_{m+1}) = e_{m+2}, ..., \varphi(e_{n-1}) = e_n, \varphi(e_n) = \lambda e_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Покладемо

$$\begin{gathered} b_1 = e_1 + e_{m+1}, ..., b_{m-1} = e_{m-1} + e_{n-1}, \\ b_m = e_m + e_n. \end{gathered}$$

З формул (3), отримаємо

$$\begin{gathered} \varphi(b_1) = \varphi(e_1) + \varphi(e_{m+1}) = e_2 + e_{m+2} = b_2, \\ \dots \\ \varphi(b_{m-1}) = \varphi(e_{m-1}) + \varphi(e_{n-1}) = e_m + e_n = b_m, \\ \varphi(b_m) = \varphi(e_m) + \varphi(e_n) = \lambda e_{m+1} + \lambda e_1 = \lambda(e_1 + e_{m+1}) = \lambda b_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, що $b_1, ..., b_m, e_1$, $..., e_m$ є базисом простору L. Матриця переходу від базису e_1, ..., e_n до базису $b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m$ має вигляд

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \;\; \dots \;\; 1}_{m} & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det C = \pm 1$, то $C \in GL(n, Z[\lambda])$. З формул (4) випливає рівність

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(1,...,1,t)$ і B – квадратні матриці порядку m.

Лему 2 доведено.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Нехай K – комутативне кільце з одиницею,* $t \in K$, $n = 2m$ *– натуральне число, тоді матриця*

$$M(1,...,1,t,1,...,1,t),$$

подібна матриці вигляду

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем K*, де* A, B *– квадратна матриця порядку m і є, зокрема, звідною.*

Доведення випливає з лем 1, 2 та існування гомоморфізму $f : Z[\lambda] \to K$ такого, що $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$. Теорему 1 доведено.

ВИСНОВКИ

Показано, що матриця $M(t,1,...,1,t,1,...,1,t)$ довільного парного порядку $n > 1$ над комутативним кільцем *K* з одиницею звідна для довільного $t \in K$.

Список використаних джерел

1. Бондаренко В.М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – Т.96, № 1. – С. 63–74.
2. Гудивок П.М., Тилищак О.А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
3. Динис Р.Ф., Тилищак О.А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23 №1. – С. 57–62.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
5. Шевченко В.Н. Сидоров С.В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
6. Avni N., Onn U., Prasad A. , Vaserstein L., Similarity classes of 3X3 matrices over a local principal ideal ring, Comm. Algebra 37 2009. – Vol.37, N8 –, pp. 2601–2615.
7. Pizarro A. . Similarity Classes of 3X3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.
8. Prasad A., Singla P., and Spallone S. Similarity of matrices over local rings of length two. (2012). http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf.

Надійшла до редколегії 27.11.13

Р. Динис, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
О. Тилищак, канд.. физ.-мат. наук
ДВНЗ «Ужгородский национальний университет», Ужгород

О ПРИВОДИМОСТЕ НЕКОТОРЫХ МОНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Показано, что произведения подстановочной матрицы цикла четной длины и диагональной матрицы $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***порядка*** n ***над коммутативным кольцом*** K ***с единицей, где*** $t \in K$***, является приводимым.***

R. Dinis, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv,
A. Tylyshchak, PhD
State higher educational institution, "Uzhhorod National University", Uzhhorod

ON REDUCIBILITY OF SOME MONOMIAL MATRICES OVER COMMUTATIVE RINGS

There has been shown the reducibility of the product of the permutation matrix of the cycle of even length n ***and the diagonal matrix*** $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***of order*** n ***over a commutative ring*** K ***with identity, where*** $t \in K$.

УДК 519.21

А. Савченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ВИПРАВЛЕНА *T(q)*-ВІРОГІДНА ОЦІНКА У КВАДРАТИЧНІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Вивчається квадратична структурна модель регресії з похибками вимірювання. Дисперсія похибок у відгуку вважається невідомою. Побудовано виправлену T(q)-вірогідну оцінку коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки в ситуації, коли q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1 при необмеженому зростанні обсягу вибірки.

1. Вступ

У статті вивчається квадратична модель регресії з похибками у змінних. За невідомого розподілу прихованої змінної виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку [8], [9]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку при малих і середніх обсягах вибірки. У [3], [7] побудовано модифікацію CS оцінки, що