УДК 517.912

М. Сєрова, канд. фіз.-мат. наук, доц., Ю. Приставка, асист.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава
e-mail: *yuliaprystavka@rambler.ru*

ПРО РОЗШИРЕННЯ ОСНОВНИХ СИМЕТРІЙ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Отримано неперервні перетворення еквівалентності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Встановлено необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності даного рівняння.

ВСТУП. Дослідження багатьох фізичних, біохімічних, екологічних, економічних та інших процесів потребує побудови математичних моделей. У багатьох випадках такими моделями є диференціальні рівняння. Найчастіше математичні моделі є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, що притаманні даному процесу.

Диференціальні рівняння успішно застосовувалися в якості математичних моделей фізичних явищ, пов'язаних з різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- і аеродинаміці і ряду інших напрямів дослідження фізичних явищ в суцільних середовищах. Математичні моделі цього класу явищ найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких рівнянь відносять рівняння реакції-конвекції-дифузії.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують у якості математичних моделей різноманітних процесів у природі та суспільстві. Наприклад, у біології розглядають клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин тощо як частинки, кожна з яких рухається хаотично. Тоді систематичний рух їх групи вважається процесом дифузії, і зазвичай це не проста дифузія, оскільки береться до уваги взаємодія між частинками. Для простоти біологи використовують (1+1)-вимірне неперервне модельне рівняння для опису глобальної поведінки в термінах густини чи концентрації частинок. Оскільки моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеаризованими, то симетрійні методи, в силу своєї універсальності, є важливими для їх дослідження. Тому невипадково, що сучасний розвиток групового аналізу розпочався з групової класифікації Л. В. Овсянніковим [4] класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії. Результатом класифікації лiївських або некласичних симетрій (умовних, потенціальних, узагальнених) є виокремлення модельних рівнянь з нетривіальними симетрійними властивостями.

Розглянемо двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$w_0 = \partial_a (f(w) w_a) + g^a(w) w_a + H(w), \tag{1}$$

де $w = w(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f(w)$, $g^a(w)$, $H(w)$ – коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно. Індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1,2\}$. В одновимірному випадку симетричні властивості рівняння (1) досліджено в [9].

Рівняння (1) використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних і біохімічних процесів. До класу рівнянь (1) входять такі відомі рівняння, як рівняння теплопровідності, Бюргерса та інші. Заміна

$$u = \int f(w) dw,$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$ – нова невідома функція, зводить рівняння (1) до вигляду

$$\Delta u = f^0(u) u_0 + f^a(u) u_a + h(u), \tag{2}$$

яке ми і будемо досліджувати, причому вважатимемо, що $f^a(u) \neq 0$, так як випадок $f^a(u) = 0$ досліджено в [1].

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ.

Означення. Основною алгеброю інваріантності рівняння (2) назвемо алгебру, відносно якої рівняння (2) інваріантне при довільних виглядах нелінійностей f^0, f^a, h.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. Основною алгеброю інваріантності рівняння (2) є алгебра

$$A^{bas} = < \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} >. \tag{3}$$

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2)$, $\mu = \overline{0,2}$, ξ^μ, η – шукані функції.

Застосувавши до рівняння (2) алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3], [5]) одержимо систему визначальних рівнянь відносно нелінійностей f^0, f^a, h та координат ξ^μ, η оператора (4) :

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \ \xi^1_1 = \xi^2_2, \ \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\eta \dot f^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^0, \\ &\eta \dot f^a = \xi^a_0 f^0 + (-\xi^1_1 \delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}) f^b + 2\eta_{au}, \\ &\eta \dot h = (\eta_u - 2\xi^1_1) h - \eta_0 f^0 + \eta_a f^a + \Delta\eta, \end{aligned} \tag{6}$$

де $(\delta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – символ Кронекера, $(\varepsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – антисиметричний тензор.

Для того, щоб знайти основну алгебру інваріантності рівняння (2) припускаємо, що f^0, f^a, h – довільні гладкі функції. Це дає можливість "розчепити" систему (6) за цими функціями та їх похідними. У результаті розчеплення одержимо систему визначальних рівнянь відносно функцій ξ^μ та η:

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \ \ \xi^1_1 = \xi^2_2, \ \ \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{7}$$

Загальним розв'язком системи (7) є функції

$$\xi^\mu = c_\mu, \ \eta = 0, \tag{8}$$

де c_μ – довільні сталі, $\mu = 0,1,2$. Оператор (4) з функціями (8) породжує алгебру (3). Лема 1 доведена.

НЕПЕРЕРВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ. Так як рівняння (2) містить довільні функції f^0, f^a, h, то воно описує деякий клас рівнянь. При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Знайдемо перетворення еквівалентності рівняння (2), які будемо використовувати при проведенні повної групової класифікації цього рівняння.

Лема 2. Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (2) є група перетворень, суперпозиція яких має вигляд

$$\begin{aligned}
&x_0' = e^{\theta_0} x_0 + m_0, \\
&x_a' = \theta_a x_0 + e^{\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}\sin\theta_2)x_b + m_a, \\
&u' = e^{\theta} u + m, \ \ f^{0'} = e^{\theta_0} u + m, \\
&f^{a'} = \theta_0 f^0 + e^{-\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}\sin\theta_2) f^b, \\
&h' = e^{\theta - 2\theta_1} h,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $\theta_0, \theta_a, \theta, m_0, m_a, m$ – довільні групові параметри.

Доведення. Застосуємо метод, запропонований у [2; 8].

Інфінітезимальний оператор групи перетворень еквівалентності будемо шукати у вигляді

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta \partial_u + \varsigma^0 \partial_{f^0} + \varsigma^a \partial_{f^a} + \varsigma^3 \partial_h, \tag{10}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$, $\varsigma^0 = \varsigma^0(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$,
$\varsigma^a = \varsigma^a(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$, $\varsigma^3 = \varsigma^3(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$ – шукані функції.

Із вигляду рівняння (2) випливає наступна система обмежень для нелінійностей f^0, f^a, h

$f^0_{x_\mu} = 0, \ f^0_{u_\mu} = 0, \ f^a_{x_\mu} = 0, \ f^a_{u_\mu} = 0, \ h_{x_\mu} = 0, \ h_{u_\mu} = 0$, яку позначимо S_1.

Застосувавши критерій еквівалентності $\tilde{E}S\big|_{S=0,S_1=0} = 0, \ \ \tilde{E}S_1\big|_{S=0,S_1=0} = 0$, отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат $\xi^0, \xi^a, \eta, \varsigma^0, \varsigma^a, \varsigma^3$ оператора (10)

$$\begin{aligned}
&\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \\
&\eta_\mu = 0, \ \ \varsigma^0_\mu = \varsigma^a_\mu = \varsigma^3_\mu = \varsigma^0_{u_\mu} = \varsigma^a_{u_\mu} = \varsigma^3_{u_\mu} = 0, \\
&\xi^1_1 = \xi^2_2, \ \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \\
&\varsigma^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^0, \\
&\varsigma^a = \xi^a_0 f^0 - 2\xi^1_1 f^a + \xi^a_b f^b, \\
&\varsigma^3 = (\eta_u - 2\xi^1_1) h.
\end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язком системи (11) є функції:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \kappa_0 x_0 + d_0, \\
&\xi^a = \kappa_1 x_a + g_a x_0 + c\varepsilon_{ab} x_{ab} + d_a, \\
&\eta = \kappa u + d, \ \ \ \varsigma^0 = (\kappa_0 - 2\kappa_1) f^0, \\
&\varsigma^a = g_a f^0 - \kappa_1 f^a + c\varepsilon_{ab} f^b, \\
&\varsigma^3 = (\kappa - 2\kappa_1) h.
\end{aligned} \tag{12}$$

де $\kappa_0, \kappa_1, g_a, d_0, d_1, d$ – довільні сталі.

Оператор (10) з функціями (12) породжує групу перетворень (9). Лему 2 доведено.

НЕОБХІДНІ УМОВИ РОЗШИРЕННЯ ОСНОВНОЇ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТНОСТІ. Вище встановлено, що при довільних функціях f^0, f^a, h рівняння (2) інваріантне відносно алгебри (3). Знайдемо необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії (2). Тобто, проаналізувавши систему визначальних рівнянь (5)–(6), вкажемо вигляд нелінійностей f^0, f^a, h, при яких рівняння (2) може бути інваріантне відносно алгебри, ширшої, ніж алгебра (3).

Теорема 1. Для того, щоб рівняння (2) допускало розширення основної алгебри інваріантності (3) необхідно, щоб нелінійності f^0, f^a, h, з точністю до перетворень еквівалентності (9), мали вигляд, наведений у таблиці.

Таблиця

Необхідні умови розширення симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

№ п/п	f^0	f^a	h
1	e^{ku}	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u)$	$\lambda_3 e^{2mu}$
2	e^u	λ_a	$\lambda_3 e^u + \lambda_4$
3	u^k	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(\ln u)$	$\lambda_3 u^{2m+1}$
4	u^k	λ_a	$\lambda_3 u^{k+1} + \lambda_4 u$
5	u^k	$\lambda_a u e^u$	$\lambda_3 e^{2u} + \lambda_4 e^u$
6	u^k	$\lambda_a u^k \ln u$	$\lambda_3 u^{2k+1} + \lambda_4 u^{k+1}$
7	**1**	$\lambda_a \ln u$	$(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)u$
8	**1**	$\lambda_a u$	$\lambda_3 u + \lambda_4$
9	**1**	$\lambda_a u$	$\lambda_3 u^3 + \lambda_4 u$

У таблиці $K_{ab}(u) = \delta_{ab} \cos pu + \varepsilon_{ab} \sin pu$, $k, m, p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ – довільні сталі.

Доведення. Визначальну систему (6) будемо розв'язувати методом введення структурних сталих (див. [6; 7]). Структурні зв'язки між коефіцієнтами системи (6) залежать від вигляду функцій f^a. Можливі два суттєво різні випадки:

I) $f^a \neq const$. II) $f^a = \lambda_a - const$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

I) $f^a \neq const$. У цьому випадку структурні зв'язки мають вигляд:

$$\begin{gathered} a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ \xi_0^0 - 2\xi_1^1 = k\varphi,\ \xi_0^a = \gamma_a\varphi,\ -\xi_1^1 = m\varphi,\ -\xi_1^2 = p\varphi, \\ -a_0 = q_1\varphi,\ -b_0 = r_1\varphi,\ -a_a = \alpha_a\varphi,\ -b_a = \beta_a\varphi,\ \Delta a = q_2\varphi,\ \Delta b = r_2\varphi, \end{gathered} \tag{13}$$

де $k, m, p, k_a, q_a, r_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ – довільні сталі, які назвемо структурними константами, $\varphi = \varphi(x)$ – довільна гладка функція.

Підставивши умови (13) в систему (6) в силу довільності функції $\varphi(x)$ одержимо

$$\begin{aligned} &(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \\ &(k_1u + k_2)\dot{f}^a = \gamma_a f^0 + (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b - 2\alpha_a, \\ &(k_1u + k_2)\dot{h} = (k_1 + 2m)h + (q_1u + r_1)f^0 + (\alpha_a u + \beta_a)f^a + q_2u + r_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Система (14) називається структурною для функцій f^0, f^a, h.

Для спрощення структурної системи (14) застосуємо перетворення еквівалентності вигляду

$$x_0' = x_0,\ x_a' = x_a + \theta_a x_0,\ u' = u,\ f^{0\prime} = f^0,\ f^{a\prime} = f^a + \theta_a f^0,\ h' = h. \tag{15}$$

Переписавши систему (14) в штрихованих змінних та підставивши (15), після нескладних перетворень одержимо

$$(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \quad (k_1u + k_2)\dot{f}^a = \Gamma_a f^0 + (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b - 2\alpha_a,$$

$$(k_1u + k_2)\dot{h} = (k_1 + 2m)h + (Q_1u + R_1)f^0 + (\alpha_a u + \beta_a)f^a + q_2u + r_2.$$

де $\Gamma_a = [(m-k)\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}]\theta_b + \gamma_a$, $Q_1 = \theta_a\alpha_a + q_1$, $R_1 = \theta_a\beta_a + r_1$.

Якщо

$$(m-k)^2 + p^2 \neq 0 \tag{16}$$

то параметри θ_a можна підібрати так, щоб $\Gamma_a = 0$. Тому у випадку (16) з точністю до перетворень (15) можна вважати $\gamma_a = 0$.

Розв'язок системи (14) залежить від сталої k_1. Мають місце два суттєво різні випадки:

1) $k_1 = 0$, 2) $k_1 \neq 0$.

Доведення проведемо на прикладі випадку 1.

1) $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати $k_2 = 1$). З умови (11) при $k_1 = 0$ випливає, що $a = 0,\ b = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = q_a = 0 \tag{17}$$

та

$$mb + \xi_1^1 = 0,\ pb - \xi_1^2 = 0. \tag{18}$$

Із рівнянь (18) маємо

$$p\xi_1^1 + m\xi_1^2 = 0. \tag{19}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (19) за змінними x_1 та x_2, використавши (6), отримаємо систему

$$\begin{aligned} p\xi_{11}^1 - m\xi_{12}^1 = 0,\\ m\xi_{11}^1 + p\xi_{12}^1 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Так як головний визначник системи (20) $\Delta = p^2 + m^2$ відмінний від нуля(в протилежному випадку із (14) $\dot{f}^0 = 0$, що протирічить умові $f^a \neq const$), то дана система має лише нульовий розв'язок

$$\xi_{11}^1 = \xi_{12}^1 = 0. \tag{21}$$

З рівнянь (6), (21) отримаємо

$$\xi_{bc}^a = 0, \tag{22}$$

де $a,b,c = \overline{1,2}$. Із (18), (22) випливає, що $b - const$, тому

$$r_a = \beta_a = 0\ . \tag{23}$$

Враховуючи (17) та (23) запишемо структурну систему

$$\begin{aligned} &\dot{f}^0 = kf^0,\\ &\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b,\\ &\dot{h} = 2mh\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Загальним розв'язком системи (24) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^{ku},\ f^a = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu),\ h = \lambda_3 e^{2mu}.$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні сталі. З точністю до перетворень еквівалентності (9) можна вважати, що $\lambda_0 = 1$. Тобто має місце перший випадок 1 із таблиці.

Якщо $(m-k)^2 + p^2 = 0$, то $\Gamma_a \neq 0$.

Розв'язок системи (14) залежить від сталих k та k_1. Мають місце чотири суттєво різні випадки:

1) $k \neq 0$, $k_1 = 0$, 2) $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$, 3) $k = 0$, $k_1 = 0$, 4) $k = 0$, $k_1 \neq 0$.

Доведення проведемо на прикладі випадку 1.

1) $k \neq 0$, $k_1 = 0$, $m = k$, $p = 0$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $k_2 = k$.

З умов (13) випливає, що $a = 0$, $b = k\varphi$. Це накладає умови

$$\alpha_a = q_a = 0\ . \tag{25}$$

та

$$b = -\xi_0^0. \tag{26}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (26) за x_a, отримаємо

$$b_a = 0\ . \tag{27}$$

Із (27) маємо

$$\beta_a = r_2 = 0\ . \tag{28}$$

Врахувавши (25), (28) запишемо структурну систему

$$\dot{f}^0 = f^0,\ k\dot{f}^a = kf^b + \gamma_a f^0,\ k\dot{h} = 2kh + r_1 f^0. \tag{29}$$

Загальним розв'язком системи (29) із точністю до перетворень еквівалентності $x_0' = x_0$, $x_a' = x_a + \theta_a x_0$, $u' = u$ є функції $f^0 = e^u$, $f^a = \lambda_a u e^u$, $h = \lambda_3 e^{2u} + \lambda_4 e^u$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні сталі. Тобто має місце випадок 5 із таблиці.

II. Розглянемо випадок $f^a = \lambda_a$. Зауважимо, що у цьому випадку $f^0 \neq const$, так як при $f^0 = \lambda - const$ перетвореннями (15) рівняння (2) зводиться до вигляду

$$\Delta u = \lambda u_0 + h(u)\ . \tag{30}$$

Симетрійні властивості рівняння (30) прокласифіковано в [1]. У випадку сталих функцій f^a, розчепивши друге рівняння системи (6) за змінною u, одержимо

$$\xi_0^a = 0,\ (-\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b + 2a_a = 0\ . \tag{31}$$

Тому нам залишається вивчити структуру тільки першого та останнього рівнянь даної системи. У цьому випадку структурні зв'язки задаються інакше:

$$a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ \xi_0^0 - 2\xi_1^1 = k\varphi,\ -2\xi_1^1 = s\varphi,\ -a_0 = q_1\varphi,$$
$$-b_0 = r_1\varphi,\ -\lambda_a a_a + \Delta a = q_3\varphi,\ -\lambda_a b_a + \Delta b = r_3\varphi. \qquad (32)$$

Враховуючи (32) запишемо структурну систему

$$(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \quad (k_1u + k_2)\dot{h} = (k_1 + s)h + (q_1u + r_1)f^0 + q_3u + r_3.$$

Розглянемо випадок $k_1 = 0$. Це приводить до умови $a = 0$, що, в свою чергу, приводить до умов $q_1 = q_3 = 0$. Із другого рівняння системи (6) будемо мати $\xi_1^1 = \xi_1^2 = 0,$ а, отже,

$$s = 0. \qquad (33)$$

Тоді, продиференціювавши рівняння $\xi_0^0 = kb$ за змінними x_a одержимо

$$b_a = 0, \qquad (34)$$

$k \neq 0,$ так як $f^0 \neq const$.

Врахувавши (33), (34) запишемо структурну систему

$$\dot{f}^0 = kf^0, \quad \dot{h} = r_1 f^0. \qquad (35)$$

Загальним розв'язком системи (35) є функції $f^0 = \lambda_0 e^{ku}$, $f^a = \lambda_a$, $h = \lambda_3 e^{ku} + \lambda_4$, де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (9), не втрачаючи загальності, маємо $k = \lambda_0 = 1$. Тобто справедливий випадок 2 із таблиці 1.

Нехай $k_1 \neq 0$. Із точністю до перетворень еквівалентності (9) $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Запишемо структурну систему

$$u\dot{f}^0 = kf^0, \qquad (36)$$

$$u\dot{h} = (s+1)h + q_1uf^0 + q_3u. \qquad (37)$$

Загальним розв'язком рівняння (36) є функція

$$f^0 = \lambda_0 u^k. \qquad (38)$$

причому $k \neq 0$, $\lambda_0 \neq 0$, так як $f^0 \neq const$ (з точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_0 = 1$).

Врахувавши (38) рівняння (37) набуде вигляду

$$\dot{h} = \frac{s+1}{u}h + q_1u^k + q_3. \qquad (39)$$

Використавши заміну $h = u^{s+1} \cdot z$ із (39) отримаємо

$$\dot{z} = q_1u^{k-s-1} + q_3u^{-s-1}. \qquad (40)$$

Проаналізувавши (40), отримаємо наступні суттєво різні випадки: 1) $s = k$, 2) $s = 0$, 3) $s \neq 0, k$.

Проаналізуємо структурні зв'язки (32). Маємо:

$$\varphi = a \neq 0,\ b = 0,$$

$$ka = \xi_0^0 - 2\xi_1^1,\ \ sa = -2\xi_1^1, \qquad (41)$$

$$a_0 + q_1a = 0,\ \ \Delta a = \lambda_a a_a + q_3a \qquad (42)$$

Із рівнянь (41) одержимо

$$(k-s)a = \xi_0^0. \qquad (43)$$

Можливі два суттєво різні випадки:

1) $s \neq k$. У цьому випадку із (43) та (31) маємо

$$a_a = \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0.$$

Тоді із (41), (42) випливає, що $s = q_3 = 0$. Рівняння (37) має вигляд

$$(k-s)a = \xi_0^0. \qquad (44)$$

Розв'язавши рівняння (44), отримуємо $h = \lambda_3u^{k+1} + \lambda_4u$.

2) $s = k$. Із рівняння (32) будемо мати

$$-2\xi_1^1 = ka. \qquad (45)$$

Продиференціювавши (45) за змінною x_0 одержимо

$$a_0 = 0. \qquad (46)$$

Врахувавши (46) із структурних зв'язків (32) маємо $q_1 = 0$.

Рівняння (46) для даного випадку набуде вигляду

$$u\dot{h} = (k+1)h + q_3u. \qquad (47)$$

Загальним розв'язком рівняння (47) є функція $h = \lambda_3u^{k+1} + \lambda_4u$.

Нехай $s = 0$. Із (32) будемо мати $\xi_1^1 = 0$ та

$$\xi_0^0 = ka. \qquad (48)$$

Взявши диференціальний наслідок (48) за змінними x_a , отримаємо

$$a_a = 0 . \tag{49}$$

Врахувавши (49) із системи (32) маємо $q_3 = 0$. Рівняння (38) для даного випадку набуде вигляду

$$u\dot{h} = h + q_1 u^{k+1} . \tag{50}$$

Загальним розв'язком рівняння (50) є функція $h = \lambda_3 u^{k+1} + \lambda_4 u$. Тобто має місце випадок 4 із таблиці.

Розв'язуючи структурні системи, ми врахували умови, які виникають при використанні зв'язків між структурними константами. Такі зв'язки можна використовувати лише у припущенні, що кожному рівнянню визначальної системи (6) відповідає одне структурне рівняння. Якщо ж хоч одному визначальному рівнянню системи (6) відповідає більше, ніж одне структурне рівняння, то зв'язки між структурними константами використовувати не можна.

Тому цей випадок розглянемо окремо. Дослідимо випадок, коли рівнянням визначальної системи (6) відповідають два рівняння структурної системи. Зазначимо, що для даної задачі два рівняння – це максимальна кількість рівнянь структурної системи, коли вона може бути сумісна.

Розглянемо перше рівняння системи (6). Нехай йому відповідає два рівняння структурної системи

$$(k_1 u + k_2)\dot{f}^0 - kf^0 = 0, \quad (n_1 u + n_2)\dot{f}^0 - nf^0 = 0. \tag{51}$$

Так як згідно умови поставленої задачі $f^0 \neq 0$, то система (6) може мати нетривіальний розв'язок лише у випадку

$$\begin{vmatrix} k_1 u + k_2 & -k \\ n_1 u + n_2 & -n \end{vmatrix} = 0 . \tag{52}$$

Розчепивши рівняння (52) за різними степенями функції u , одержимо $\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \frac{k}{n}$. Тобто рівняння системи (51) пропорційні. Це означає, що першому рівнянню (6) не можуть відповідати два непропорційні рівняння структурної системи.

Суттєво різними розв'язками першого рівняння структурної системи з точністю до перетворень еквівалентності (9) є функції $f^0 = 1,\ f^0 = e^u,\ f^0 = u^k$.

Розглянемо спочатку $f^0 = 1$ і проаналізуємо можливість двох структурних рівнянь для другого рівняння визначальної системи (6):

$$(k_1 u + k_2)\dot{f}^a - (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b = -2\alpha_a, \quad (l_1 u + l_2)\dot{f}^a - (s\delta_{ab} + t\varepsilon_{ab})f^b = -2\sigma_a. \tag{53}$$

Розв'язавши систему (53) відносно змінних $\dot{f}^a$ та f^a маємо

$$\dot{f}^a = \frac{R_1^a(u)}{P_2(u)} , \tag{54}$$

$$f^a = \frac{Q_2^a(u)}{P_2(u)} = c^a + \frac{S_1^a(u)}{P_2(u)} , \tag{55}$$

де $S_1^a,\ R_1^a,\ P_2(u),\ Q_2^a(u)$ – довільні многочлени степеня 1 та 2 відповідно, c^a – довільні сталі.

Із умов сумісності рівнянь(54), (55) маємо

$$\dot{S}_1^a \cdot P_2 - S_1^a \cdot \dot{P}_2 = R_1^a \cdot P_2 . \tag{56}$$

Проаналізувавши систему рівнянь (56), приходимо до висновку, що, з точністю до перетворень (9) рівність (56) можлива лише у двох випадках: $f^a = \lambda_a u$, $f^a = \frac{\lambda_a}{u}$.

Нехай $f^0 = 1$, $f^a = \lambda_a u$. Знайдемо вигляд функції h. Запишемо визначальну систему

$$\xi_0^0 = 2\xi_1^1 , \tag{57}$$

$$(au + b)\lambda_a = \xi_0^a + (-\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b u + 2a_a , \tag{58}$$

$$(au + b)\dot{h} = (a - 2\xi_1^1)h - (a_0 u + b_0) - (a_a u + b_a)\lambda_a u + \vartriangle au + \vartriangle b .$$

Розчепивши рівняння (58) за різними степенями функції u отримаємо

$$\lambda_a a = (\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b , \tag{59}$$

$$\lambda_a b = \xi_0^a + 2a_a . \tag{60}$$

Із рівняння (59) маємо

$$a = -\xi_1^1 , \tag{61}$$

$$\xi_1^2 = 0 . \tag{62}$$

Із (57), (61) маємо

$$a = -\frac{1}{2}\xi_0^0 . \tag{63}$$

Продиференціювавши (63) за змінними x_a отримаємо

$$a_a = 0 . \tag{64}$$

Врахувавши (61), (62), (64) та використавши диференціальний наслідок (60) за змінними x_a одержимо

$$b_a = 0 . \tag{65}$$

Врахувавши (64), (65) запишемо третє рівняння визначальної системи

$$(au+b)\dot{h} = (a - 2\xi_1^1)h - a_0 u - b_0 . \tag{66}$$

Розглянемо випадок, коли рівнянню (66) відповідає два рівняння структурної системи.

$$(k_1 u + k_2)\dot{h} - 3k_1 h = q_1 u + r_1 , \quad (n_1 u + n_2)\dot{h} - 3n_1 h = c_1 u + d_1 .$$

Одержимо

$$\dot{h} = c + \frac{m_0}{W_1(u)} , \tag{67}$$

$$h = V_1(u) + \frac{n_0}{W_1(u)} , \tag{68}$$

де $W_1(u)$, $V_1(u)$ – довільні многочлени 1-ого степеня, m_0, n_0 – довільні сталі.

Із умов сумісності (67), (68) маємо

$$\dot{Z}_1 W_1^2 - n_0 \dot{W}_1 = c W_1^2 + m_0 W_1 . \tag{69}$$

Рівність (69) можлива лише у випадку, коли

$$h = \lambda_3 u + \lambda_4 . \tag{70}$$

Зауважимо, що (70) є випадком 8 із таблиці 1.

Аналогічно доводиться випадок $f^0 = 1$, $f^a = \dfrac{\lambda_a}{u}$.

Теорема 1 доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19. – С. 1215–1223.
2. Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. – К., 2002. – Т.45. – 359 с.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений – М. : Наука, 1978. – 400 с.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР. – Т.125, 1959. – С. 492–495.
5. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М. : Мир, 1989. – 581 с.
6. Сєров М. І., Рассоха І. В. Симетрійні властивості рівнянь реакції-конвекції-дифузії: Монографія. – Полтава : ПолтНТУ, 2013. – 168 с.
7. Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К. : Наук. думка, 1989. – 339 с.
8. Akhatov I. S., Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Nonlocal symmetries. Heuristic approach. // J. Sov. Math. – 55 (1991). – P. 1401–1450.
9. Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V.342. – P.1363–1379.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.15

Серова М., канд. физ.-мат. наук, доц., Приставка Ю., ассист.
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава

О РАСШИРЕНИИ ОСНОВНЫХ СИММЕТРИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

В статье получено непрерывные преобразования эквивалентности двумерного уравнения реакции-конвекции-диффузии. Установлено необходимые условия расширения основной алгебры инвариантности данного уравнения.

Serova M., PhD, Pristavka Y., assist.
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, Poltava

ABOUT THE EXPANSION BASIC SYMMETRIES OF TWO-DIMENSIONAL REACTION-CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

In the article continuous transformations of equivalence of two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion were obtained. Necessary conditions for the expansion of basic invariance algebra of this equation were established.