УДК 517.944:532.546

B. Dovgiy, PhD, E. Vakal, PhD, Y. Vakal, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
e-mail: *jvakal@gmail.com*

NUMERICAL SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN A CIRCULAR DOMAIN WITH CUTS

A problem of a stationary liquid filtration using fan-shaped drainage in a circular domain is considered. A mathematical model is formulated as a boundary value problem for the Poisson equation in domains of a circular shape with a given number of radial cuts and mixed boundary value conditions. The problem is solved by the finite difference method using the convergent Seidel method for systems of difference equations. Numerical calculations for different values of parameters of the problem are given.

INTRODUCTION. Stationary filtration problems arise for homogeneous and multilayer media in the design and construction of hydraulic structures such as water intakes, wells, drainage canals. A solution of the problem of stabilized fluid flow to a single imperfect well even in homogeneous soils is associated with considerable mathematical difficulties [5; 6]. In [1; 2] it was considered a spatial problem of pressure stabilized-fluid flow of heavy incompressible fluid to fan-shaped drainage systems located in the multilayer infinite layer of finite thickness under the bottom of a reservoir. It is interesting to solve the problem of the stationary liquid filtration using the fan-shaped drainage in circular domains.

This paper deals with the boundary value problem for the Poisson equation in circular domain with a given number of radial cuts that simulate drainage ditches.

FORMULATION OF THE PROBLEM. We study the stationary filtration problem using the fan-shaped drainage. We consider a horizontal slice of the soil layer where the filtration occurs by means of ditches emanating from the center of symmetry of the domain. We assume that conditions of the problem are not depend on the depth of the slice. Since the domain of fluid motion has a central symmetry we can confine ourselves by solving the problem on the plane in the first quarter of the Cartesian coordinate system XOY. We place the origin of coordinates at the center of symmetry of the domain (Fig. 1).

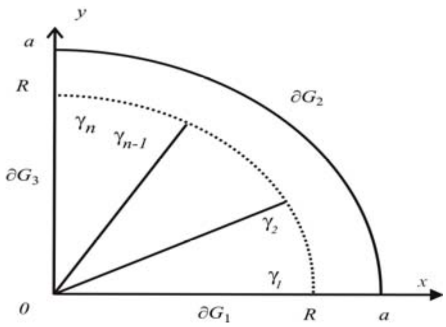

Fig. 1. The domain of fluid filtration

Let *t* – time, *a* – radius of the considered domain *G*, $\gamma_i, i=\overline{1,n}, n\ge 2$ – drainage ditches, each having the same length *R* (Fig. 1) or different lengths, $\partial G_i, i=\overline{1,3}$ – the domain boundaries, $\gamma=\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i$, $\bar G = G\bigcup_{i=1}^{3}\partial G_i$.

Since the filtration is stationary, for each fixed time *t* we consider the boundary value problem for the Poisson equation

$$\Delta u = -f(x,y),\ (x,y)\in G\backslash\gamma \tag{1}$$

with mixed boundary conditions

$$u\big|_{\partial G_2}=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_1\backslash\gamma_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_3\backslash\gamma_n}=0. \tag{3}$$

Here formulas (3) are the conditions of symmetry.

On the drainage ditches $\gamma_i, i=\overline{1,n}, n\ge 2$, it is given the value of hydraulic head , i.e. the function *u*(*x*, *y*):

$$u\big|_{\gamma_i}=\psi(x,y). \tag{4}$$

Taking into account the structure of the considered domain the problem (1)-(4) can be conveniently formulated in polar coordinates $(r,\varphi),\ 0\le r\le a, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Since the solution is limited at $r=0$, we can write the boundary value problem to determine the function $u(r,\varphi)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-f(r,\varphi),\ (r,\varphi)\in G\backslash\gamma, \tag{5}$$

$$u\big|_{r=a}=0,\ \ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\partial G_1\backslash\gamma_1}=0,\ \ r\in(R,a), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\partial G_3\backslash\gamma_n}=0,\ \ r\in(R,a), \tag{8}$$

$$|u|\big|_{r=0}<\infty, \tag{9}$$

$$u\big|_{\gamma_i}=\psi(r,\varphi),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

where $\partial G_1\backslash\gamma_1=\{(r,\varphi):R<r<a,\varphi=0\}$, $\partial G_3\backslash\gamma_n=\left\{(r,\varphi):R<r<a,\varphi=\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$\gamma_1=\{(r,\varphi):0\le r\le R,\varphi=0\},\ \ \gamma_i=\left\{(r,\varphi):0\le r\le R,\varphi=\varphi_i,0<\varphi_i<\frac{\pi}{2}\right\},\ i=\overline{2,n-1},$$

$$\gamma_n=\left\{(r,\varphi):0\le r\le R,\varphi=\frac{\pi}{2}\right\},\ \ n\ge 2.$$

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM. The boundary value problem for the equation (5) with the conditions (6)-(10) is solved by the finite differences method. The domain $\bar G=[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ is covered by a difference grid $\bar\omega_{h_1h_2}=\bar\omega_{h_1}\times\bar\omega_{h_2}$, where h_1,h_2 are grid steps in directions r and φ respectively, the grid $\bar\omega_{h_1}=\left\{r_k=kh_1,k=\overline{0,N_1},h_1=\frac{a}{N_1}\right\}$, the grid $\bar\omega_{h_2}=\left\{\varphi_j=jh_2,j=\overline{0,N_2},h_2=\frac{\pi}{2N_2}\right\}$. The grid $\bar\omega_{h_2}$ is chosen so that its nodes cover inner drains.

A difference scheme for the equation (5) is constructed using the integro-interpolation method [3]

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac{1}{2}}y_{\bar r,kj}\right)_{r,k}+\frac{1}{r_k^2}\left(y_{\bar\varphi,kj}\right)_{\varphi,j}=-\tilde f_{kj},\ (r,\varphi)\in\omega_{h_1}\times\omega_{h_2}\backslash\gamma. \tag{11}$$

In (11) y and $\tilde f$ are difference analogues of the functions u and f. The approximation error of the difference scheme (11) is $O\left(h_1^2+\frac{h_1^2}{r}+\frac{h_2^2}{r^2}\right)$.

The boundary conditions (6)–(10) are approximated with the second order in space:

$$y_{N_1j}=0,\ \varphi\in\bar\omega_{h_2}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac{1}{2}}y_{\bar r,k0}\right)_{r,k}+\frac{2}{r_k^2h_2^2}\left(y_{k1}-y_{k0}\right)=-\tilde f_{k0},\ \ r\in\omega_{h_1}\cap(R,a), \tag{13}$$

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac{1}{2}}y_{\bar r,k0}\right)_{r,k}-\frac{2}{r_k^2h_2^2}\left(y_{kN_2}-y_{kN_2-1}\right)=-\tilde f_{kN_2-1},\ r\in\omega_{h_1}\cap(R,a), \tag{14}$$

$$y_{0j}=\psi_{0j},\ \ \varphi\in\bar\omega_{h_2}, \tag{15}$$

$$y_{k0}=\psi_{k0},\ y_{kN_2/(n-1)}=\psi_{kN_2/(n-1)},\ \dots,\ y_{k(n-2)N_2/(n-1)}=\psi_{k(n-2)N_2/(n-1)},\ y_{kN_2}=\psi_{kN_2},\ r\in\omega_{h_1}\cap(0,R]. \tag{16}$$

An estimate of the solution of the difference problem is obtained. This estimate expresses the stability of the solution by boundary conditions and the right part of the equation. We have established convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem.

By adding to the equation (11) difference approximations of the boundary conditions (12)–(16), we obtain a system of linear difference equations. This system is solved using the point Seidel method [4].

This method belongs to single-step methods. According to the mentioned method the system of difference equations (11)–(16) is written in the form

$$Ay=f, \tag{17}$$

where $y=(y_1,y_2,\dots y_m)'$ is vector of unknowns.

According to the Seidel method a matrix *A* is represented as

$$A=D-L-U, \tag{18}$$

where *D* is a diagonal matrix, *L* is a strictly lower triangular matrix, *U* – a strictly upper triangular matrix (diagonal elements of the matrices *L* and *U* are equal to zero). Then for solving the system (17) the Seidel method is written in the form

$$(D-L)y^{s+1}-Uy^s=f$$

or
$$y^{s+1} = \left(D-L\right)^{-1}\left(Uy^s + f\right), \qquad (19)$$
where y^0 is an initial approximation to the solution of the system (17).

Taking into account the structure of the considered problem, calculation formulas of the Seidel method, for example, for the internal nodes of the grid have the form
$$y_{kj}^{s+1} = \frac{r_k}{2\left(r_k^2 h_2^2 + h_1^2\right)}\left(h_2^2 \left(r_{k+\frac{1}{2}} y_{k+1\,j}^{s} + r_{k-\frac{1}{2}} y_{k-1\,j}^{s+1} \right) + \frac{h_1^2}{r_k}\left(y_{kj-1}^{s+1} + y_{kj+1}^{s} \right) + r_k h_1^2 h_2^2 \tilde{f}_{kj} \right), \qquad (20)$$
where y_{kj}^{s+1} – the value of an approximate solution on s+1-st iteration at a point $\left(r_k, \varphi_j\right)$. The iterative process is terminated when the condition $\max\limits_{k,j}\left|y_{kj}^{s+1} - y_{kj}^{s}\right| \le \varepsilon$ is fulfilled, where $\varepsilon > 0$ – a required accuracy for convergence of iterations.

RESULTS OF NUMERICAL CALCULATIONS. Developed numerical algorithms are used for solving the problems of the stationary filtration in the domain *G* with a different number of drainage ditches. We have considered such variants:

1. The number of drainage ditches $n = 2$, all of them have the same length $R = 0.5$, so $\gamma_1 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f\left(r,\varphi\right) = 0,$ the function $\psi\left(r,\varphi\right) = -0.25$.
2. The number of drainage ditches $n = 3$, all of them have the same length $R = 1$, so $\gamma_1 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\right\}$, $\gamma_3 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f\left(r,\varphi\right) = 0,$ the function $\psi\left(r,\varphi\right) = -0.25$.
3. The number of drainage ditches $n = 4$, they have different lengths *R*, so that $\gamma_1 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 0.7.0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}\right\}$, $\gamma_3 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 1.2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}\right\}$, $\gamma_4 = \left\{\left(r,\varphi\right) : 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f\left(r,\varphi\right) = 0,$ the function $\psi\left(r,\varphi\right) = -0.25$.

We chose the programming system MATLAB 7.6.0 for the implementation of a numerical algorithm for solving the problem.

The calculation results are shown in Fig. 2–7 in the form of solution values of the problem (5)-(10) and isolines of solution for specified variants of the problem parameters.

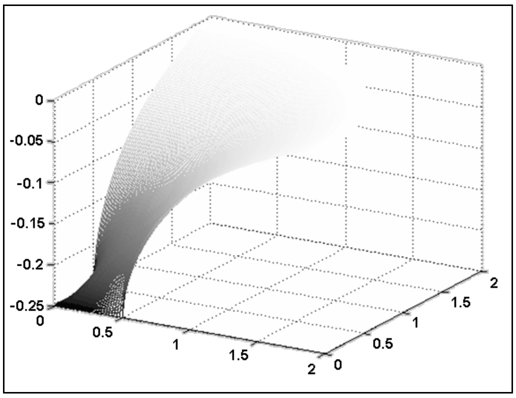

Fig. 2. Values of hydraulic head for n=2

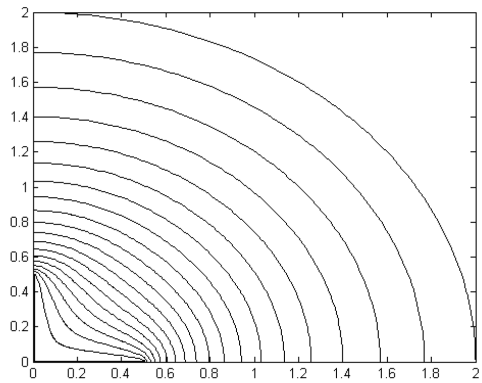

Fig. 3. Isolines of hydraulic head for n=2

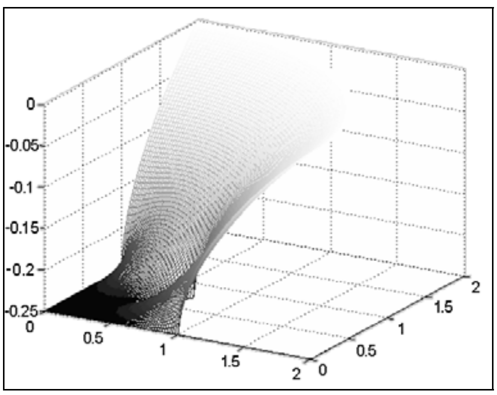

Fig. 4. Values of hydraulic head for n=3

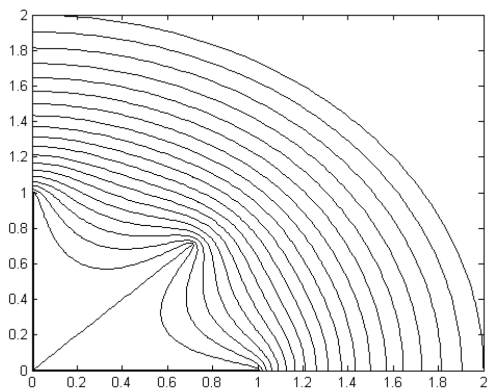

Fig. 5. Isolines of hydraulic head for n=3

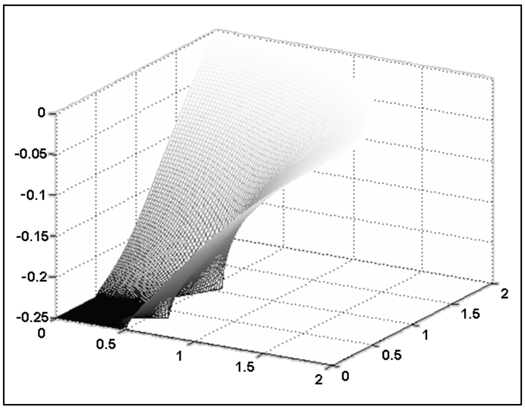

Fig. 6. Values of hydraulic head for n=4

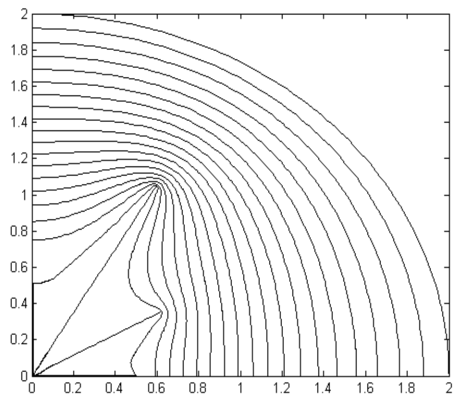

Fig. 7. Isolines of hydraulic head for n=4

CONCLUSIONS. The results of the conducted researches show the effectiveness and validity of the proposed approach for solving the problem of the stationary filtration using the fan-shaped drainage with ditches of equal or different length.

These calculations allow to estimate the hydrodynamic state of soil in a case of the stationary fluid filtration to the system of fan-shaped drainages in circular domains.

The obtained results correspond to the characteristic behavior of the solution of the differential problem. This methodology can be used for solving other problems of this class.

REFERENCES

1. Великоиваненко И. М., Шевченко В. И., Кивва С. Л. Решение задачи установившейся фильтрации к системе веерных дренажей в многослойном грунте // Вычислительная и прикладная математика. – 1984. – Выпуск 53. – С. 120–125.
2. Ляшко И. И., Долидзе Д. Ш., Кивва С. Л. Решение краевых задач фильтрации и влагопереноса в областях сложной формы // Материалы V Всесоюзного семинара "Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости". – Новосибирск, 1981. – С. 224–229.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
4. Самарский А. А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
5. Черный И. А. Подземная гидродинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963.
6. Чертоусов М. Д. Гидравлика. – М. : Госэнергоиздат, 1962.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.14

Довгий Б., канд. физ.-мат. наук, Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Рассмотрена задача стационарной фильтрации жидкости в круговой области с использованием веерного дренажа. Математическая модель сформулирована как краевая задача для уравнения Пуассона в области круговой формы с заданным числом радиальных разрезов и смешанными краевыми условиями. Задача решена методом конечных разностей с использованием сходящегося метода Зейделя для системы разностных уравнений. Приведены численные расчеты для разных значений параметров задачи.

Довгий Б., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Є., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Ю., канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ З РОЗРІЗАМИ

Розглянуто задачу стаціонарної фільтрації рідини в круговій області з використанням віялового дренажу. Математичну модель сформульовано як крайову задачу для рівняння Пуассона в області кругової форми з заданим числом радіальних розрізів і змішаними крайовими умовами. Задачу розв'язано методом скінченних різниць з використанням збіжного методу Зейделя для системи різницевих рівнянь. Наведено чисельні розрахунки для різних значень параметрів задачі.

УДК 517.95

Є. Лесіна, канд. фіз.-мат. наук
Красноармійський індустріальний інститут ДВНЗ "ДонНТУ"
e-mail: *lesina17@gmail.com*

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КОМУТУЮЧИМИ МАТРИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Отримано критерій однозначної розв'язності однорідної задачі Діріхле у крузі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку, коефіцієнтами якого є комутуючі квадратні матриці. Необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку записано у вигляді рівності нулю визначника, що залежить від коефіцієнтів наданого рівняння.

ВСТУП. Початком систематичного дослідження властивості ньютеровості крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь вважається стаття Я. Б. Лопатинського [12] 1953 року, де автором вказано умову зведення загальної крайової задачі в обмеженій області до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Пізніше було встановлено необхідність цієї умови [1; 15; 9], яку називають у даний час умовою додатковості, умовою накривання або просто умовою Лопатинського.