Пришляк А., д-р физ.-мат. наук, Сердечнюк К., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ТОПОЛОГІЯ ФУНКЦИЙ ВЫСОТИ НА ДОПОЛНЕНИИ К ТРЕХМЕРНОМУ ДИСКУ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построена топологическая классификация функций высоты с количеством критических точек не более шести на дополнении к трехмерному диску в трехмерном пространстве и получено правило, по которому можно определить направление поля градиента функции высоты.

УДК 512.5; 519.1

М. Зельдіч, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *zeldich@mail.ru*

ПРО ЦІЛОЧИСЕЛЬНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ФОРМ, АСОЦІЙОВАНИХ ІЗ САГАЙДАКОМ

Наведено просте та елементарне доведення канонічної $\mathbb{Z}$ – еквівалентності двох цілих квадратичних (відповідно, білінійних) форм, природним чином асоційованих зі скінченним графом (сагайдаком) Γ без петель та орієнтованих циклів. Подано застосування цього результату для форм відношення часткового порядку на скінченній множині. Використовуючи розвинену техніку доведення, зазначений вище результат узагальнюється на випадок, коли сагайдак може мати петлі і орієнтовані цикли (наведено короткий начерк такого узагальнення).

ВСТУП. Нехай Γ – сагайдак, тобто орієнтований граф зі скінченною кількістю вершин $\{1,...,\mathrm{n}\}$ та стрілок, без петель та орієнтованих циклів, λ_{ij} - кількість (орієнтованих) шляхів, що ведуть з вершини i у вершину j (вона скінченна згідно умов на Γ). Тоді з Γ природно зв'язати (несиметричну) білінійну "форму шляхів", або, по іншому, кратно транзитивну форму $\Pi_\Gamma(x,y)=\Pi_\Gamma(x_1...x_n,y_1...y_n)=\sum_{i,j=1}^n\lambda_{ij}x_iy_j$ та відповідну квадратичну "форму шляхів". $\Pi_\Gamma(x)=\Pi_\Gamma(x_1...x_n)=\sum_{i,j=1}^n\lambda_{ij}x_ix_j$ (див., напр., [3, 11]).

З іншого боку, в теорії зображень важливу роль відіграє введена П.Габріелем квадратична форма Тітса сагайдака Γ ([8], [9]), що визначається як $\mathrm{T}_\Gamma(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i\to j}x_iy_j$ (остання сума береться по усім стрілкам сагайдака Γ). Відповідну їй несиметричну білінійну форму $\mathrm{T}_\Gamma(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i-\sum_{i\to j}x_iy_j$ природно назвати (несиметричною) формою Тітса сагайдака Γ . Виявляється, має місце наступний дивовижний факт, анонсований в [11].

Теорема 1. Білінійна форма шляхів $\Pi_\Gamma(x,y)$ сагайдака Γ є канонічним чином цілочисельно еквівалентною білінійній формі Тітса $\mathrm{T}_{\Gamma^0}(x,y)$ сагайдака Γ^0 , що є антиізоморфним (дуальним) сагайдаку Γ , тобто отриманого з Γ шляхом перевороту усіх стрілок Γ .

Наслідок. Квадратична форма шляхів $\Pi_\Gamma(x)$ та квадратична форма Тітса $\mathrm{T}_\Gamma(x)$ сагайдака Γ є канонічно цілочисельно еквівалентними одна одній.

Дійсно, очевидно, $\mathrm{T}_{\Gamma^0}(x)=\mathrm{T}_\Gamma(x)$. Метою цієї замітки є наведення короткого та елементарного доведення цього результату, а також подальше його застосування до інших задач, пов'язаних з цілочисельними квадратичними формами, зокрема, в теорії зображень.

Доведення теореми 1.

Дамо коротке та елементарне доведення теореми 1. Позначимо через a_{ij} кількість стрілок з вершини i у вершину j сагайдака Γ . Тоді для матриці $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ нескладно за індукцією по k перевірити, що її k – ий ступінь $\mathrm{A}^k=\left({a^{(k)}}_{ij}\right)_{n\times n}$ складається з компонент (елементів) ${a^{(k)}}_{ij}$, що дорівнюють кількості орієнтованих шляхів довжини k з вершини i до вершини j ($k=0,1,2...$). Тоді $\mathrm{A}^k=0$ при $k>m$, де $m=m(\Gamma)$ – довжина максимального орієнтованого шляху в Γ (m , очевидно, є скінченним згідно умов на Γ).

Розглянемо матрицю $\Lambda\overset{def}{=}\sum_{k=0}^m\mathrm{A}^k=\mathrm{E}+\mathrm{A}+...+\mathrm{A}^{\mathrm{m}}$, де через E позначено одиничну матрицю порядку n . Тоді елементи λ_{ij} матриці $\Lambda=\left(\lambda_{ij}\right)_{n\times n}$ визначаються, очевидно, за формулами: $\lambda_{ij}=\sum_{k=0}^m a_{ij}^{(k)}$ і тому кожний такий елемент λ_{ij} є не що інше, як кількість (орієнтованих) шляхів з вершини i у вершину j в сагайдаку $\Gamma(i,j=1,...,n)$. Зауважимо, що традиційно ми тут за означенням вважаємо, що при $k=0$ $A^k=E$ та при $i=j$ $\lambda_{ij}=1$, тобто існує єдиний орієнтований шлях з будь-якої вершини i сагайдака Γ у ту ж саму вершину $j=i$, а саме так званий "одиничний" шлях довжини 0. Тому Λ є матриця форм шляхів $\Pi_\Gamma(x,y)$ та $\Pi_\Gamma(x)$ сагайдака Γ .

© Зельдіч М., 2015

З іншого боку, як легко бачити, $(E-A)\Lambda = (E-A)\sum_{k=0}^{m} A^k = (E-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E$, тобто матриця $E-A$ є неособливою і має обернену матрицю $(E-A)^{-1} = \Lambda$, яка співпадає з матрицею Λ. Звідси маємо: $(E-A^T) = (E-A^T)E = (E-A^T)(E-A)^{-1}(E-A) = (E-A)^T \Lambda (E-A)$, або остаточно: $E-A^T = (E-A)^T \Lambda (E-A)$, де, як зазвичай, індекс T зверху позначає операцію транспонування матриці. Зауважимо тепер, що ліва частина останньої рівності – суть матриця форм Тітса $\mathrm{T}_{\Gamma^0}(x,y)$ та $\mathrm{T}_{\Gamma^0}(x)$ дуального до Γ сагайдака Γ^0, а права – отримується з матриці $\Lambda = (\lambda_{ij})_{n\times n}$ форм шляхів $\Pi_\Gamma(x,y)$ та $\Pi_\Gamma(x)$ вихідного сагайдака Γ за допомогою канонічного перетворення цілочисельної еквівалентності матриць: $\Lambda \to (E-A)^T \Lambda (E-A)$, що задається неособливою цілочисельною матрицею $E-A$ та індукує відповідну цілочисельну еквівалентність відповідних цим матрицям білінійних та квадратичних форм. Теорема доведена.

Як зауважили проф. Ю. А. Дрозд і проф. В. В. Кириченко, теорема 1 має гомологічну інтерпретацію і відповідне доведення, та допускає узагальнення для сагайдаків із співвідношеннями у випадку скінченної глобальної гомологічної розмірності відповідних (до цих сагайдаків із співвідношеннями) асоціативних алгебр над алгебраїчно замкненим полем (детальніше про це – див. § 3).

Застосування теореми 1.

Нехай тепер $(M,\le)$ – скінченна частково впорядкована множина (далі – ЧВМ) з елементами $\{m_1, m_2, ..., m_n\} = M$, $\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & m_i \le m_j \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$ – характеристична функція відношення часткового порядку на M, $\chi(x) = \chi(x_1, x_2, ..., x_n) = \chi_M(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \chi_{ij} x_i x_j$ – (характеристична) квадратична форма відношення часткового порядку на множині M (яка була введена А. В. Ройтером в роботах [5, 6] у зв'язку з поняттям Р-точної множини). Позначимо також через $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ сагайдак (або діаграму) Хассе ЧВМ $(M,\le)$, тобто сагайдак з вершинами $\{1, 2, ..., n\}$ (що відповідають елементам $m_1, m_2, ..., m_n$ ЧВМ $(M,\le)$) та стрілками $i \to j$, які взаємно однозначно відповідають відношенню "безпосереднього порядку" на множині M (m_i безпосередньо менше ніж m_j, якщо $m_i < m_j$ і не існує такого елемента $m \in M$, що $m_i < m < m_j$).

В [1, 2, 3] доведено наступний цікавий факт, який використано як важливу складову частину при доведенні гіпотези Ройтера про Р-точні множини ([6, 4]).

<u>**Теорема 2**</u>. Якщо сагайдак Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ частково впорядкованої множини $(M,\le)$ не містить обходів (обхідних шляхів), тобто в Γ немає двох різних орієнтованих шляхів з тотожними початками та тотожними кінцями (так що кожний з цих двох шляхів обходить другий), то квадратична форма $X_M(x)$ відношення часткового порядку на множині M є (канонічно) цілочисельно еквівалентною квадратичній формі Тітса $\mathrm{T}_\Gamma(x)$ сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ цієї ж частково впорядкованої множини (M , ≤) .

Покажемо тепер, як теорема 2 легко випливає з теореми 1, яка, по суті, є її узагальненням. Дійсно, з самого означення сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ частково впорядкованої множини $(M,\le)$ очевидним чином випливає, що для будь-якої впорядкованої пари (m_i, m_j) елементів з множин M : $m_i \le m_j$ тоді і тільки тоді, коли в сагайдаку Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ існує (орієнтований) шлях з вершини i у вершину j. Але, за умовою теореми 2 (про відсутність обхідних шляхів), цей шлях, якщо він є, може бути лише єдиним. Отже, якщо $\Pi_\Gamma(x) = \Pi_\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j$ – квадратична форма шляхів сагайдака $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$, де λ_{ij} – кількість шляхів, що ведуть з вершини i у вершину j, то $\lambda_{ij} = \begin{cases} 1, & m_i \le m_j \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$. Тобто, іншими словами, $\lambda_{ij} = \chi_{ij}$ при всіх $i, j = 1, ..., n$. Отже, $\Pi_\Gamma(x) \equiv \chi_M(x)$. А оскільки, згідно наслідку теореми 1, квадратична форма шляхів $\Pi_\Gamma(x)$ та квадратична форма Тітса $T_\Gamma(x)$ є (канонічно) цілочисельно еквівалентними одна одній, то в кінцевому рахунку ми приходимо до потрібного висновку про (канонічну) цілочисельну еквівалентність між квадратичною формою $\chi_M(x) \equiv \Pi_\Gamma(x)$ відношення часткового порядку на множині M та квадратичною формою Тітса $T_\Gamma(x)$ сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ ЧВМ $(M,\le)$, що й треба було довести. Аналогічні міркування, якщо користуватись не наслідком теореми 1, а самою теоремою 1, доводять, що (несиметрична) білінійна форма $\chi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \chi_{ij} x_i x_j$ відношення часткового порядку на множині M є канонічно цілочисельно еквівалентною (несиметричній) білінійній формі Тітса $T_{\Gamma^0}(x,y)$ сагайдака Γ, дуального (анти ізоморфного) до сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{M}}$ частково впорядкованої множини $(M,\le)$. Отже, якщо коротко підсумувати, з теореми 1 та її наслідку випливає, що $\chi_M(x,y) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} T_{\Gamma^0}(x,y)$ та $\chi_M(x) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} T_\Gamma(x)$, де Γ – сагайдак Хассе частково впорядкованої множини $(M,\le)$, Γ^0 – дуальний (антиізоморфний) йому сагайдак, а. $\mathbb{Z}$ – еквівалентність $\underset{\mathbb{Z}}{\cong}$ між білінійною (відповідно, квадратичною) формою відношення часткового порядку $\chi_M(x,y)$ /відповідно, $\chi_M(x)$/ на частково впорядкованій множині $(M,\leq)$ та білінійною /відповідно, квадратичною/ формою Тітса $T_{\Gamma^0}(x,y)$ /відповідно, $T_{\Gamma^0}(x)\equiv T_{\Gamma}(x)$ / сагайдака Γ^0, дуального (антиізоморфного) до сагайдака Хассе Γ – є канонічною.

ЗАУВАЖЕННЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ. Зауважимо, що комбінаторний результат теореми 1 має гомологічну інтерпретацію в теорії зображень скінченновимірних алгебр і його нескладно можна вивести також з результатів [10], де вперше була введена так звана гомологічна білінійна (та відповідна їй квадратична) форма Ейлера на групі Гротендіка $K_0(A)\cong\mathbb{Z}^n$ скіннченновимірної асоціативної алгебри A (скінченної глобальної гомологічної розмірності над алгебраїчно замкненим полем k), а також з результатів Бонгартца, який в [7], зокрема, довів, що у випадку, коли сагайдак Габріеля $\Gamma=\Gamma(A)$ алгебри A (кількість вершин якого співпадає з рангом n вільної абелевої групи $K_0(A)\cong\mathbb{Z}^n$, тобто з кількістю n класів ізоморфізму простих скінченновимірних A-модулів) не містить орієнтованих циклів, а також $gl\dim_k A\leq 2$ (зокрема, якщо сагайдак Γ є вільним від співвідношень між різними орієнтованими шляхами, тобто коли $gl\dim_k A=1$), білінійна (відповідно, квадрична) форма Ейлера алгебри A збігається з білінійною (відповідно, квадратичною) формою Тітса сагайдака Габріеля $\Gamma=\Gamma(A)$ алгебри A.

Втім, для комбінаторного лінійно-алгебраїчного результату, який елементарно формулюється, також природно мати і відповідне елементарне комбінаторне лінійно-алгебраїчне доведення, яке не використовує потужний апарат гомологічної алгебри та сучасні результати теорії зображень (Габріеля, Рінгеля, Бонгартца). Саме таким є отримане автором (цієї статті) доведення теореми про цілочисельну еквівалентність двох форм, асоційованих із сагайдаком і тому воно становить самостійний інтерес з точки зору природності і суттєвого спрощення доведення та відповідності використаних в ньому засобів елементарності формулювання самої теореми. Більш того, як виявляється, використання цілком елементарної техніки, розвиненої в цьому комбінаторному доведенні, дозволяє узагальнити теорему 1 про цілочисельну еквівалентність також на випадок, коли сагайдак Γ має орієнтовані цикли (зокрема, і петлі). В цьому випадку, як встановлено автором, має місце природне узагальнення теореми 1 (див. [12]), яке полягає в тому, що над кільцем $\mathbb{Z}\left[\left[h\right]\right]$ формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами існує канонічна $\mathbb{Z}\left[h\right]$- еквівалентність між відповідними цим двом формам (Тітса та шляхів) їхніми природними $\mathbb{Z}\left[\left[h\right]\right]$- деформаціями (квантуваннями), узгодженими зі стандартним градуюванням вільної категорії $k\Gamma$ над полем k, породженої сагайдаком Γ (об'єктами $k\Gamma$ є вершини Γ, морфізмами – орієнтовані шляхи з градуюванням по ступенях шляхів).

При цьому, у випадку, коли сагайдак Габріеля $\Gamma=\Gamma(A)$ не містить орієнтованих циклів (у тому числі і петель), при граничному переході $h\to 1$, побудована у вищезазначеному узагальненні канонічна $\mathbb{Z}\left[h\right]$-еквівалентність між відповідними сагайдаку Γ вищезазначеними природними демоформаціями (квантуваннями) форм Тітса та шляхів збігається з раніш встановленою згідно теореми 1 канонічною $\mathbb{Z}$- еквівалентністю між звичайними формами Тітса та шляхів, відповідними сагайдаку Γ (як щодо квадратичних так і щодо несиметричних білінійних форм – в останньому випадку також з аналогічною до теореми 1 заміною сагайдака Γ на двоїстий до нього сагайдак Γ^0). Більш детальний виклад формулювання цього узагальнення та його доведення автор планує подати у своїй статті у наступному номері журналу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зельдич М. В. Про характеристичні форми частково впорядкованих множин з однозв'язним графом Хассе / Вісник Київського університету – серія: фізико-математичні науки – 2001 – № 4 – С. 36–44.
2. Зельдич М. В. О формах отношений частичного порядка на конечном множестве: Праці Українського математичного конгресу, 2001, Секція 1 Алгебра і теорія чисел – С. 62–70.
3. Зельдич М. В. О характеристических и кратно транзитивных формах частично упорядоченных множеств: препринт: Зельдич М. В. ρ-точные частично упорядоченные множества и характеристические формы: КНУ им. Т. Шевченко, издательский дом "Академпериодика" НАН Украины – Киев - 2002 – С. 3–14.
4. Зельдич М. В. О ρ-точных (Р-точных) частично упорядоченных множествах: препринт: Зельдич М. В. ρ-точные частично упорядоченные множества и характеристические формы: КНУ им. Т. Шевченко, издательский дом "Академпериодика" НАН Украины – Киев – 2002 – С. 15–68.
5. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств: Линейная алгебра и теория представлений: Киев – Ин-т математики АН УССР – 1983. – С. 19–54.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Норма отношений, разделяющие функции и представления маркированных колчанов / Украинский математический журнал. – 2002. – 54, № 6. – С. 808-841.
7. Bongartz K.: Algebras and quadratic forms. / J. London math. Soc. 28, 1983, P. 461–469.
8. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I / Manuscripta Math. – 1972 – 6 – P. 71–103.
9. Gabriel P. Representations indecomposables: Seminaire Bourbaki, 1973–1974, Lecture Notes in Mathematics, 431 Springer, Berlin – 1975 – P. 143–170.
10. Ringel C. M.: Representation of K– Species and Bimodulies / Journal of Algebra 41 – 1976 – no. 2 – P. 269–302.
11. Zeldich M. V.: On paths form and Tits form for a quiver: 4th International Algebraic Conference in Ukraine, August 4–9, 2003 – Lviv, Abstracts – 243 p.
12. Zeldich M. V.: On equivalence of two forms associated with a quiver: 9th International algebraic conference in Ukraine, July 8–13, 2013 – L'viv, Ukraine – Book of abstracts – 226 p.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.15

Zeldich M., PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv

ON INTEGER EQUIVALENCE OF TWO FORMS ASSOCIATED WITH A QUIVER

A simple and elementary proof for canonical $\mathbb{Z}$ — equivalence of two integer unit quadratic (respectively, bilinear) forms, naturally associated with a finite graph (quiver) Γ without loops and oriented cycles was done. Some application of this result for quadratic (respectively, bilinear) forms of partial ordered relations on finite set are presented. Using a technique, developed for the proving, the result mentioned above, is generalized in the case when a quiver Γ contains some loops or /and oriented cycles (a brief sketch of this generalization is presented).

Зельдич М., канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ФОРМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОЛЧАНОМ.

Приведено простое и элементарное доказательство канонической $\mathbb{Z}$ – эквивалентности двух целых квадратичных (соответственно, билинейных) форм, естественным образом ассоциированных с конечным графом (колчаном) Γ без петель и ориентированных циклов. Дано применение этого результата для форм отношения частичного порядка на конечном множестве. Используя развитую технику доказательства, указанный выше результат обобщается на случай, когда колчан может иметь петли и/или ориентированные циклы (приведен краткий набросок такого обобщения).

УДК 539.3

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук
Національний транспортний університет, Київ
e-mail: *vladislav_bogdanov@hotmail.com*

ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО УДАР ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРА ПО ПРУЖНОМУ ШАРУ

Досліджується плоска задача пружного співудару абсолютно жорсткого циліндру з пружним шаром. Розглядається контактна задача з динамічно змінною областю контакту, при цьому враховується підйом середовища. Задача зводиться перетворенням Лапласа і методом розвивання в ряд за власними функціями до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду, яка чисельно реалізується методом редукції та механічних квадратур. Визначені кількісні динамічні та кінематичні характеристики, що описують процес співудару у залежності від значення початкової швидкості удару і параметрів шару.

ВСТУП. Задачі удару жорстких тіл по деформівних тілах та їхнього співудару залишаються актуальними і досліджуються у різних постановках. Один із найважливіших напрямків таких досліджень є виявлення особливостей руйнування надрізаних балкових зразків при їхньому руйнуванні на триточковий згин за допомогою ударника. Відповідні експерименти дають можливість визначати вкрай необхідну механіці руйнування характеристику матеріалу – в'язкість його руйнування, пов'язану із коефіцієнтом інтенсивності напружень у вістрі тріщини. Оскільки процес є динамічним і може супроводжуватися значними пластичними деформаціями, то його вивчення є складною та багатоплановою задачею, яка вимагає аналізу впливу ударника на випробовуване тіло, динамічної взаємодії тіла із опорами, а також процесу початку руйнування та його розвитку. Тема ця надзвичайно широка і пов'язана із численними публікаціями, з масиву яких для цієї публікації вибрано лише достатній мінімум.

У її основу окладаються задачі нестаціонарної [1–9] ударної взаємодії абсолютно жорсткого плоского ударника з надрізаним у серединному перерізі балковим зразком у динамічній пружно-пластичній постановці. У праці [10] розв'язано відповідну до [1] тривимірну квазістатичну задачу у пружно-пластичній постановці і при цьому виявлено, що напруження значно відрізняються від напружень, отриманих з розв'язку аналогічної задачі у динамічній пружно-пластичній постановці. У публікації [2] розв'язується задача визначення напружень і граничного стану за плоского деформованого стану від триточкового згину балкового зразка з крайовим надрізом. У роботі [3] розв'язується аналогічна задача плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок підростання тріщини у момент переміщення розрахованого максимуму напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього з тим, щоб забезпечити існування максимуму безпосередньо на продовженні вістря тріщини. В публікаціях [4, 6] розв'язано плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним $\sigma_{\theta\theta}$ -критерієм крихкого руйнування. У публікаціях [5, 7] в'язкість руйнування матеріалу визначалася відповідно на основі дослідження розв'язків плоского деформованого стану і просторової задач у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали можливість у своєму розвитку значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У роботі [23] виявлено, що кількісні характеристики необхідних умов утворення холодних (крихких) тріщин при зварюванні низьколегованих високоміцних сталей проявляються достатньо чітко при використанні імовірнісної моделі крихкого руйнування з функцією розподілу Вейбула, параметри якого в загальному випадку залежать від мікроструктури матеріалу і проценту дифузного водню, що міститься у металі. При цьому не згадано про математичну модель і задачу, з якої визначені напруження, використані у співвідношеннях розподілу Вейбула. Це свідчить, що імовірнісний підхід достатньо універсальний та продуктивний, однак зрозуміло, що якщо використовувати більш точну динамічну пружно-пластичну постановку, то отриманий результат буде більш вірогідним. Саме тому у роботах [8, 9] було досліджено тривимірний процес підростання тріщини з прямолінійним фронтом за умови зсуву максимальних напружень від вістря тріщини і локального критерію крихкого руйнування відповідно.

У публікаціях [28–31] запропоновано підхід вивчення динамічного розвитку тріщини у дослідних зразках, який базується на методі Релея. Його суть полягає в моделюванні перебігу динамічних процесів у балці-зразку. Це створює можливість замінити динамічну модель квазістатичною. У [28–30] рух балки описується у вигляді суперпозиції вібраційних мод. Для досягнення більшої точності моделі враховується також кривина поверхні ударника і опор. За такою методикою визначається динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН). У [31] запропонована експериментально-розрахункова методика визначення ДКІН K_{I}. Експериментально визначалися навантаження і час руйнування коротких компактних зразків. Одиничний сигнал-відповідь обчислювався окремо методом скінченних елементів. ДКІН визначався згідно лінійної теорії як згортка навантаження і одиничного сигналу-відповіді. При цьому критичне значення ДКІН відповідало моментові часу старту руйнування. Увесь проміжок часу, на якому досліджувався процес руйнування до його завершення, дорівнював 40 мс.

Дослідження з динаміки жорстко-пластичних конструкцій теж охоплюють дуже широке коло питань. Оскільки імпульсне навантаження використовують при штампуванні виробів, то доволі докладно досліджено статичні й динамічні задачі для прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження [25].

Основний масив публікацій пов'язаний із вивченням пружного деформування тіл при ударному впливі абсолютно жорстких тіл. Наприклад, у пружній постановці досліджуються [13–15] відповідно плоска й осесиметрична задачі удару штампів по пружному шару без урахування піднімання чи опускання середовища поблизу області контакту. У

© Богданов В., 2015