УДК 517.9

В. Болілий, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Зеленська, асп.
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький
E-mail: basilb@kspu.kr.ua, kopchuk@gmail.com

ВНУТРІШНЯ ТОЧКА ЗВОРОТУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь із малим параметром при старшій похідній і точкою звороту, одержано умови для побудови рівномірної асимптотики розвязку. Асимптотику побудовано методом істотно-особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі – Лангера. Доведено існування розвязку системи за умови, що точка звороту міститься всередині розглядуваного відрізка $[-l,l]$.

Вступ. У цій роботі буде розглянута система сингулярно збурених диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon)+A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon)=0, \tag{1}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр, $Y(x,\varepsilon)=colon(y_1(x,\varepsilon),y_2(x,\varepsilon),y_3(x,\varepsilon),y_4(x,\varepsilon))$ – шукана вектор-функція, $A(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1$ – задана матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $a(x)=x\cdot\tilde a(x),\quad \tilde a(x)>0,\quad b(x)\neq 0,\quad c(x)\neq 0\in C^{\infty}[-l,l]$, причому $x=0$ – внутрішня точка звороту II роду [3, 5].

Ця система відповідає скалярному сингулярно збуреному диференціальному рівнянню

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x,\varepsilon)+a(x)y''(x,\varepsilon)+b(x)y'(x,\varepsilon)+c(x)y(x,\varepsilon)=0.$$

Таке рівняння є однією з модифікацій рівняння Орра – Зоммерфельда гідродинамічної стабільності, яке відіграє центральну роль у динаміці вязкої рідини. У спеціальній літературі розглянуто різні модифікації цього рівняння, у тому числі й задачі з точками звороту. Особливо ми б хотіли відмітити роботи Вазова [10], Лангера [7], Нішімото [9], Ліна [8]. Теорії, запропоновані у згаданих вище роботах, частково розділяють загальні ідеї, але при цьому мають істотні відмінності. Теорія Лангера базується на його ранніх роботах, присвячених диференціальному рівнянню третього порядку. Метод Вазова складається із двох частин: перша – "споріднені функції", які можна побудувати у вигляді формальних апроксимацій для фундаментальної системи розвязків розглядуваного диференціального рівняння, або ж можна знайти безпосередньо зі "спорідненого диференціального рівняння"; у другій частині виконується процедура порівняння двох рівнянь (вихідного і "спорідненого") шляхом перетворення заданого на інтегральне рівняння Вольтера, в якому права частина формально розглядається як однорідний член. Робота Ліна більше наслідує ідеї Лангера, а головна відмінність із методом Вазова полягає у манері побудови розвязків заданого рівняння. Головна ідея роботи Нішімото полягає у визначенні так званих канонічних областей. За допомогою певних деформацій цих областей, можна отримати регіони, в яких будуть справедливі асимптотичні розкладання. Ці регіони називаються областями впливу, які стискаються до точок звороту, коли $\varepsilon\to 0$. Але дана теорія не дає відповіді на питання про природу розвязків у точках звороту, тому в роботі використано поєднання запропонованої ідеї і методу зшивання внутрішньої і зовнішньої асимптотик.

Головною метою цієї роботи є побудова рівномірної асимптотики розвязку, включаючи і точку звороту. Внутрішність точки звороту вносить певні труднощі і проблеми порівняно з випадком односторонніх точок звороту. Випадки, коли точка звороту була крайньою, розглянуто в [4, 6]. Метод, який буде використано, розроблено для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із алгебраїчною точкою звороту [1, 2]. Складність при побудові асимптотики розвязку рівнянь або систем рівнянь із диференціальною точкою звороту полягає в тому, що вироджене рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку.

Характеристичним рівнянням, що відповідає системі (1), є рівняння

$$\left|A(x,0)-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde a(x) & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\left(\lambda^2-x\tilde a(x)\right). \tag{2}$$

Коренями цього рівняння є

$$\lambda_{1,2}=0,\qquad \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{x\tilde a\left(x\right)}\,. \tag{3}$$

Регуляризація системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Із метою виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають у розвязку системи (1) за рахунок особливої точки $\varepsilon=0$, уведемо регуляризуючу змінну $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)\equiv\Phi(x,\varepsilon)$, де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Розширення проводитимемо таким чином, щоб виконувалась тотожність

$$\tilde Y\left(x,t,\varepsilon\right)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}\equiv Y\left(x,\varepsilon\right).$$

Для визначення "розширеної" функції одержимо "розширене" векторне рівняння

$$\tilde L_\varepsilon\tilde Y\left(x,t,\varepsilon\right)\equiv\varepsilon^{1-p}\varphi'(x)\frac{\partial\tilde Y\left(x,t,\varepsilon\right)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\tilde Y\left(x,t,\varepsilon\right)}{\partial x}-A\left(x,\varepsilon\right)\tilde Y\left(x,t,\varepsilon\right)=0. \tag{4}$$

Асимптотику розвязку розширеного рівняння (4) будуємо у вигляді

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}D_i(x,t,\varepsilon)+\omega_k(x,\varepsilon). \tag{5}$$

де $D_k(x,t,\varepsilon)=\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)+\varepsilon^{\gamma}\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\equiv$

$$\equiv\begin{pmatrix}\alpha_{i1}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i4}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i(t)+\varepsilon^{\gamma}\begin{pmatrix}\beta_{i1}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i2}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i3}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i4}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i'(t), \tag{6}$$

де компоненти $\alpha_{ik}(x,\varepsilon),\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $k=\overline{1;4}$ є аналітичними функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$ і нескінченно диференційовні за змінною $x\in[-l;l]$, які необхідно визначити, $U_i(t)$, $k=1,2$ – функції Ейрі – Лангера: $U_1(t)=\mathrm{Ai}\,(t)$, $U_2(t)=\mathrm{Bi}\,(t)$.

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon}$ на вектор-функцію $D(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (4). Отримаємо рівність

$$\tilde{L}_{\varepsilon}\left(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)+\varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)\right)=\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)-$$
$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(\mathrm{x})\varphi'(x)U_i(t)-A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)-$$
$$-\varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)+\varepsilon\alpha_{ik}'(x)U_i(t)+\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x)U_i'(t)=0.$$

Зрівняємо коефіцієнти біля ІОФ $U(t)$, $i=1,2$ та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння $(i=1,2)$:

$$U_i'(t):\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\varepsilon^{\gamma}\left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \tag{7}$$

$$U_i(t):\varepsilon\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon). \tag{8}$$

Для того, щоб $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $i=1,2$, були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$, необхідно, щоб одержані алгебраїчні системи рівнянь (7) і (8) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Указані умови будуть виконані, якщо показники степенів малого параметра в лівих частинах цих рівнянь будуть одинакові. Після певних перетворень отримаємо

$$p=\frac{2}{3},\quad \gamma=\frac{1}{3}. \tag{9}$$

Із (9) матимемо

$$U_i'(t):\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A_0(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{ik}'(x,\varepsilon)+\mu^3A_1\beta_{ik}(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$U_i(t):\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+A_0(x)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)-\mu^3A_1\alpha_{ik}(x,\varepsilon). \tag{11}$$

Тоді векторні рівняння (10), (11) можна записати у вигляді такої системи алгебраїчних рівнянь $(i=1;2)$:

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\beta_{i2}(x,\varepsilon)-\beta_{i1}'(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\beta_{i3}(x,\varepsilon)-\beta_{i2}'(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon)-\beta_{i4}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi'(x)\alpha_{i4}(x,\varepsilon)+c(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)+a(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k4}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\alpha_{i1}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i2}(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\alpha_{i2}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i3}(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)+\alpha_{i4}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i4}(x,\varepsilon)-c(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)-b(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)-a(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i4}'(x,\varepsilon).\end{cases} \tag{12}$$

Ця система рівнянь уже є регулярно збуреною.

Побудова формальних розвязків однорідної розширеної системи. Асимптотику розвязку розширеної системи (12) будуватимемо у вигляді рядів:

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x),\qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x). \tag{13}$$

Для визначення коефіцієнтів цих рядів отримаємо такі рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=0,\ \ r=0,1,2\qquad \Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=F\cdot Z_{k(r-3)}(x),\quad r\geq 3. \tag{14}$$

Тут $Z_{kr}(x) = colon\left(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \alpha_{i4r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x), \beta_{i4r}(x)\right)$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(x) & c(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$F \cdot Z_{k(r-3)}(x) = colon\begin{pmatrix} \left[\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta'_{i1(r-3)}(x)\right], \left[\beta_{i3(r-3)}(x) - \beta'_{i2(r-3)}(x)\right], \beta'_{i3(r-3)}(x), \beta'_{i4(r-3)}(x), \\ \left[\alpha'_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)\right], \left[\alpha'_{i2(r-3)}(x) - \alpha_{k3(r-3)}(x)\right], -\alpha'_{i3(r-3)}(x), -\alpha'_{i4(r-3)}(x) \end{pmatrix}.$$ Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$\det\Phi(x) = \left[\varphi(x)\varphi'(x)\right]^2 \cdot \left[\varphi(x)\varphi'^4(x) - a(x)\right] \cdot \left[\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)\right] = 0.$$

На даний момент регуляризуюча функція $\varphi(x)$ ще не визначена. Тому знайдемо її як розвязок задачі

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{16}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), x \le 0, \\ \varphi_2(x), x \ge 0, \end{cases} \tag{17}$$

де
$$\varphi_1(x) = -\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \varphi_2(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{18}$$

Оскільки регуляризуюча функція визначена однозначно, то однозначно визначено і регуляризуючу змінну t.

При такому виборі регуляризуючої функції $\varphi(x)$ визначник матриці (15) дорівнює нулю, тобто $\det\Phi(x) \equiv 0$. Тоді існує нетривіальний розвязок однорідної системи рівнянь $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0$, при $r = \overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon\left(0,\ 0,\ \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i4r}(x), \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, 0, \beta_{i3r}(x), \beta_{i4r}(x)\right), \tag{19}$$

де $\beta_{isr}(x)$, $i = 1; 2$, $s = 3; 4$, – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-l; l]$.

Перейдемо до розвязуванням неоднорідних систем (12). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r = 3$. Врахувавши одержаний розвязок однорідної системи (19) коли $r = 0$, неоднорідну систему (14) запишемо у вигляді двох систем вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i13}(x) = \beta_{i20}(x) - \beta'_{i10}(x) \equiv 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i23}(x) = \beta_{i30}(x) - \beta'_{i20}(x) \equiv \beta_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) - \beta_{i43}(x) = -\beta'_{i30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i43}(x) + a(x)\beta_{i33}(x) = -\beta'_{i40}(x), \end{cases} \tag{20}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i13}(x) = \alpha'_{i10}(x) - \alpha_{i20}(x) \equiv 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x) = \alpha'_{i20}(x) - \alpha_{i30}(x) \equiv -\alpha_{i30}(x) \equiv -\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x) + \alpha_{i43}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv \left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x)\right)', \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i43}(x) - a(x)\alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i40}(x) \equiv \left(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}\right)', \end{cases} \tag{21}$$

Із першого і другого рівнянь систем (20) і (21) визначимо функції $\alpha_{i13}(x) \equiv 0$, $\beta_{i13}(x) \equiv 0$ та $\alpha_{i23}(x) = \left[\varphi'(x)\right]^{-1} \cdot \beta_{i30}(x)$ та $\beta_{i23}(x) = -\left[\varphi'(x)\right]^{-2}\left[\varphi(x)\right]^{-1}\alpha_{i30}(x)$. Тоді системи (20) і (21) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) - \beta_{i43}(x) = -\beta'_{i30}(x), \\ -a(x)\alpha_{i33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i43}(x) = -\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}(x)\right) - b(x)\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i30}(x), \end{cases} \tag{22}$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{i43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv -\frac{d}{dx}\left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x)\right), \\ \varphi'(x)\alpha_{i43}(x) - a(x)\beta_{i33}(x) = -\beta'_{i40}(x) - b(x)\left[\varphi(x)\varphi'^2(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x), \end{cases} \tag{23}$$

Із систем (22) та (23) однозначно визначимо функції $\beta_{i30}(x) \equiv \overset{0}{\beta}_{i30} \cdot x^{M(0)}$ і $\beta_{i40}(x) \equiv \overset{0}{\beta}_{i40} \cdot x^{N(0)}$, де $M(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi'^3(0) + \varphi(0)\cdot\varphi'(0)\cdot\varphi''(0) + b(0)}{-\tilde{a}(0)}\right]$, $N(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(0)\cdot\varphi'(0)\cdot\varphi''(0) - b(0)}{-\tilde{a}(0)}\right]$, $\beta^0_{ik0}\ (i = 3, 4)$ – довільні сталі.

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$, $k = 1,2$, існують розвязки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (22) та (23) вигляду

$$Z_{k3} \equiv colon\left(0, \frac{\beta_{i30}(x)}{\varphi'(x)}, \frac{\beta_{i43}(x) - \beta'_{i30}(x)}{\varphi'(x)}, \left(\frac{\beta_{i40}(x)}{\varphi'(x)}\right)' - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}, 0, \frac{\beta_{i40}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}, \beta_{i33}, \beta_{i43}\right),$$ де β^0_{ikr}, $i = 1,2$, $k = 3,4$,

до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [-l, l]$.

Продовжуючи далі розвязувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (22) і (23) при $r \geq 3$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розвязків систем рівнянь (22) і (23) при $r = \overline{0; q}$, то кожна із цих систем при $r = \overline{0; q-1}$ і фіксованому $i = 1;2$ визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta^0_{i3r}(x)$ і $\beta^0_{i4r}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ikr} = \left(\beta^0_{i1r}, \beta^0_{i2r}, \beta^0_{i3r}, \beta^0_{i4r}\right)$.

Третій і четвертий формальні розвязки одержимо в результаті дії розширеного оператора (4) на елемент ПБР $\omega(x, \varepsilon)$. Матимемо таке векторне рівняння:

$$\mu^3 \cdot \omega'_k(x,\varepsilon) - A_0(x,\varepsilon)\cdot\omega_k(x,\varepsilon) = \mu^3 \cdot A_1 \cdot \omega_k(x,\varepsilon), \tag{24}$$

де $\omega_k(x,\varepsilon) = \mathrm{colon}(\omega_1(x,\varepsilon), \omega_2(x,\varepsilon), \omega_3(x,\varepsilon), \omega_4(x,\varepsilon))$. Із векторного рівняння одержимо систему вигляду

$$\begin{cases} \omega'_1(x,\varepsilon) = \omega_2(x,\varepsilon), \\ \omega'_2(x,\varepsilon) = \omega_3(x,\varepsilon), \\ \mu^3\omega'_3(x,\varepsilon) - \omega_4(x,\varepsilon) = 0, \\ \mu^3\omega'_4(x,\varepsilon) + c(x)\omega_1(x,\varepsilon) + b(x)\omega_2(x,\varepsilon) + a(x)\omega_3(x,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Для того, щоб знайти компоненти невідомих функцій у (25), підставимо ряд

$$\omega_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \omega_{kr}(x,\varepsilon)$$

у систему (25). Матимемо такі рекурентні рівності. При $r = 0$ дістаємо

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x,\varepsilon) = \omega_{20}(x,\varepsilon), \\ \omega'_{20}(x,\varepsilon) = \omega_{30}(x,\varepsilon), \\ -\omega_{40}(x,\varepsilon) = 0, \\ c(x)\omega_{10}(x,\varepsilon) + b(x)\omega_{20}(x,\varepsilon) + a(x)\omega_{30}(x,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Випишемо окремо останнє рівняння системи. З урахуванням (26) отримуємо

$$a(x)\omega''_{10}(x) + b(x)\omega'_{10}(x) + c(x)\omega_{10}(x) = 0. \tag{27}$$

Шляхом зведення рівняння (27) до самоспряженого вигляду, одержимо загальний розвязок вигляду

$$\omega_{10}(x) = \omega^{01}_{10} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega^{02}_{10} \cdot \exp\{k_2 \cdot x\}, \tag{28}$$

де $k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c(x)}{\tilde{a}(x)} \cdot x^{\frac{2b(0)}{\tilde{a}(0)} - 1}}$. Таким чином нами побудовано нульове наближення, яке містить дві довільні сталі:

$$\omega_0(x) = \mathrm{colon}(\omega^{01}_{10} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega^{02}_{10} \cdot \exp\{k_2 \times x\};\ \ \frac{d}{dx}[\omega^{01}_{10} \cdot \exp\{k_1 \times x\} + \omega^{02}_{10} \cdot \exp\{k_2 \times x\}]; \\ \frac{d^2x}{dx^2}[\omega^{01}_{10} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega^{02}_{10} \cdot \exp\{k_2 \cdot x\}]; 0). \tag{29}$$

На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розвязуванні якої знову знайдемо розвязок, який міститиме одну довільну сталу ω^{01}_{11} і ω^{02}_{11}. Продовжуючи далі розвязувати системи рівнянь (25), поступово визначимо всі розвязки $\omega_r(x)$, тобто отримаємо третій і четвертий розвязки системи (1).

Таким чином, нами одержано загальний розвязок системи (1) у вигляді формального ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{1/3}\beta_{ikr}(x)U'_i(t)\right]\right] + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x).$$

Звуження цього розвязку при $t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i\left(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\right) + \varepsilon^{1/3}\beta_{ikr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x))}\right]\right] + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x) \tag{30}$$

є формальним розвязком ССЗДР (1).

Висновки. Таким чином встановлено таке твердження:

Теорема. *Нехай* $a(x), b(x), c(x) \in C^{\infty}[-l;l]$ *та виконуються умови* $a(x) = x \cdot \tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) > 0, b(x) \neq 0,\ c(x) \neq 0.$ *Тоді на відрізку* $[-l,l]$ *можна побудувати загальний розвязок сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді асимптотичного ряду (5), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на відрізку* $[-l,l]$.

Список використаних джерел

1. *Бобочко В. М.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту / В. М. Бобочко, М. О. Перестюк. – К. : Наук. думка, 2002. – 310 с.
2. *Бобочко В.Н.* Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 5(528). – С. 8–18.
3. Бобочко В. Н. Внутренняя точка поворота в теории ингулярных возмущений / В. Н. Бобочко // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
4. Болилый В. А. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с дифференциальной точкой поворота II рода / В. А. Болилый, И. А. Зеленская // Междунар. науч. журн. «Спектральные и эволюционные задачи». – 2013. – Т. 23. – С. 21–31.
5. *Болілий В. О.* Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку / В. О. Болілий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 44–50.
6. *Зеленская И. А.* Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода / И. А. Зеленская // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 3. – С. 63–74.
7. *Langer R. E.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics / R. E. Langer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 84. – P. 144–191.
8. *Lin C.C.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order / C. C. Lin, A. L. Rabenstein // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 94. – P., 24–57.
9. *Nishimoto T.* On the Orr-Sommerfeld type equations, I; W.K.B. Approximation / T. Nishimoto // KODAI. Math. Sem. Rep. – 1972. – Vol. 24 – P. 281–307.
10. *Wasow W.* Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point / W. Wasow // Annals of mathematics. – 1958. – Vol. 58, № 2. – 222–252.

Надійшла до редколегії 02.12.16

В. Болилый, канд. физ.-мат. наук, доц., И. Зеленская, асп.
Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА ПОВОРОТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной и точкой поворота, получены условия для построения равномерной асимптотики решения. Асимптотика построена методом существенно-особых функций, который позволяет в окрестности точки поворота применить модельный оператор Эйри – Лангера. Доказано существование решения системы при условии, что точка поворота расположена внутри рассматриваемого отрезка.

V. Boliliy, PhD, I. Zelenska, PhD graduate
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko state pedagogical university, Kropivnitskyi, Ukraine

INTERIOR TURNING POINT FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THE ORR – SOMMERFELD TYPE

For system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the higher derivative and with turning point the conditions are obtained for the construction of a uniform asymptotic of solution. Asymptotic forms of solutions are constructed using the method of essential singular functions, which allows to apply the Airy – Langer model operator. It has been proven the existence of solutions of the system when turning point is in the middle of the interval $[-l,l]$.

УДК 517.95:519.63

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Л. Вакал, канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова, Київ
E-mail*: jvakal@gmail.com*

РОЗВЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Розглянуто математичну модель руху рідини для неоднорідних середовищ із тонкими слабко проникними включеннями. Запропоновано ефективний числовий алгоритм розвязування сформульованої крайової задачі для еліптичного рівняння зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту. Здійснено числовий експеримент із розвязання задачі фільтрації рідини в основі гідротехнічної споруди. Проаналізовано отримані результати та зроблено висновки щодо застосування запропонованого підходу для визначення фільтраційної стійкості ґрунтів.

Вступ. Крайові задачі математичної фізики для рівнянь зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту можуть виникати при моделюванні різноманітних фізичних процесів в областях, що містять тонкі (порівняно з геометричними розмірами області) слабко проникні прошарки. Так, наприклад, при фільтраційних розрахунках гідротехнічних споруд слабко проникними включеннями можна вважати тонкі шпунти та протифільтраційні завіси [1, 6, 9]. Специфіка подібних задач вимагає застосування спеціального підходу для їх розвязування. Доцільність такого підходу обумовлена кількома обставинами. По-перше, часто неможливо точно виміряти окремі фізичні характеристики прошарку і доводиться використовувати його інтегральні, або усереднені, характеристики. По-друге, при числовому розвязанні таких задач у прошарку необхідно розташувати певну кількість вузлів сітки, що вимагає її невиправданого подрібнення в основній частині області розвязку і приводить до ускладнення обчислювальної роботи, зниження ефективності застосованих методів. З урахуванням цих обставин для розвязування крайових задач в областях з указаними особливостями пропонується підхід [2–5], згідно з яким при розробці математичної моделі прошарки виключаються з розвязку, а створювані ними ефекти враховуються формулюванням спеціальних умов спряження типу неідеального контакту на внутрішніх межах поділу середовищ.