УДК 532.595

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф., К. Семенович, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ РІДИНИ З РЕЗЕРВУАРОМ НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ ЗА НАЯВНОСТІ РІВНОМІРНОГО ВИТІКАННЯ

Досліджено задачу кутового руху циліндричного резервуара на маятниковому підвісі, частково заповненого рідиною, за наявності рівномірного витікання рідини. Вивчено динамічну взаємодію рідини з резервуаром і показано, що у випадку з витіканням спостерігаються істотні прояви нелінійних властивостей механічної системи, які не спостерігаються в задачі зі сталим об'ємом рідини.

Вступ. Задачі руху резервуарів з рідиною залишаються актуальними, починаючи з середини минулого століття. Динаміка рідини з вільною поверхнею представляє значну складність у теоретичному та обчислювальному аспектах, особливо при розгляді таких задач у сумісній постановці. При цьому із практичного погляду важливо розглянути випадок із витіканням рідини, оскільки експлуатація резервуарів зі змінним заповненням поширена в промисловості та транспорті. Вивчення й урахування особливостей динамічної взаємодії рідини з резервуаром при змінному заповненні дозволить розробити рекомендації для уникнення небезпечних режимів експлуатації конструкцій із рідиною. Метою цієї роботи є вивчення особливостей динамічної взаємодії рідини з резервуаром за наявності рівномірного витікання, а також порівняння з випадком сталого об'єму рідини.

Об'єкт дослідження. Розглянуто задачу про рух циліндричного резервуара, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, на маятниковому підвісі за наявності рівномірного витікання рідини через дно резервуара. У початковий момент часу резервуар є відхиленим від положення рівноваги на деякий кут, вільна поверхня рідини є горизонтальною. На рис. 1 наведено схематичне зображення механічної системи в початковий момент часу. Резервуар може коливатись лише в одній площині, дисипація в системі відсутня.

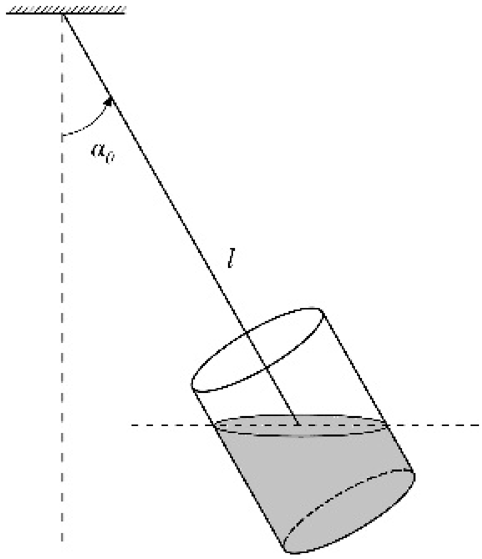


Рис. 1. Схематичне зображення механічної системи резервуар – рідина в початковий момент часу

Об'єм рідини не є сталим, відбувається рівномірне витікання через дно резервуара за законом $H = H_0 + t\Delta H$, де t – час, H – рівень заповнення рідиною резервуара, віднесений до радіуса основи резервуара R (індекс "0" відповідає початковому стану рідини), ΔH – швидкість зміни рівня рідини. Локальні ефекти витікання рідини не враховуються. Задачу розглянуто в сумісній постановці, що обумовило істотне ускладнення математичної моделі механічної системи. Перевагою цього підходу є можливість проаналізувати сили тиску рідини на стінки резервуара, що є предметом розгляду цієї статті.

Математична модель. Математичне формулювання задачі сумісного руху резервуара з рідиною складається з кінематичних та динамічних граничних умов, рівнянь руху та початкових умов. Розв'язок задачі побудовано на базі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з використанням підходу [1]. Розгляд кутового руху системи вимагає введення додаткового векторного потенціалу Стокса – Жуковського $\vec{\Omega}$ до виразу потенціалу швидкостей рідини. До кінематичних умов належать вимога нерозривності потоку в області, умова неперетікання на межі контакту резервуар – рідина та умова непротікання через вільну поверхню рідини (1). Таким чином маємо

$$\Delta\varphi = 0,\ \Delta\vec{\Omega} = 0 \ \text{ в } \ \tau;$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0,\ \ \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{n}} = \vec{r}\times\vec{n} \ \text{ на } \ \Sigma\ ;$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi\cdot\left[\vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega}\cdot\vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega}\times\vec{r}\right] = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega}\cdot\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega}\times\vec{r})\Big|_z\ ,\xi = z;$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \quad \text{на} \quad S, \tag{1}$$

де τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня резервуара. Динамічні граничні умови та рівняння сумісного руху системи отримано з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського для функції Лагранжа механічної системи, яка для випадку кутового руху системи має такий вигляд:

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\rho \int_{\tau} \left[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} I_{\text{res}}^{\text{ij}} \omega_i \omega_j + \rho g \left(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \right) \int_{S_0} r \cos\theta(\xi + H) dS - \\ -\rho g \left(\sin\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \right) \int_{S_0} r \sin\theta(\xi + H) dS - \frac{1}{2}\rho g \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - \\ -\left(M_r h_r + M_l h_l \right)\left(1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \right) + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \end{gathered} \tag{2}$$

Постановку задачі можна одержати з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, доповненого кінематичними граничними умовами (1),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0. \tag{3}$$

Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно забезпечити задовольняння кінематичних в'язей до початку розв'язання варіаційної задачі. Необхідність виконання цього етапу обумовлює вибір представлень шуканих величин так, щоб задовольнити кінематичні обмеження задачі. Алгоритм задовольняння кінематичних граничних умов задачі викладено в [1]. Після переходу до вільної системи рівняння руху одержують як рівняння Лагранжа другого роду для функції Лагранжа (2).

В узагальненій формі рівняння руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з нерухомою точкою підвісу відносно амплітудних параметрів коливань рідини a_i і параметрів кутового руху резервуара α_i можна подати так:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N} = q_r, \quad r = \overline{1, N+3}\,, \tag{4}$$

де N – кількість форм коливань рідини. Розмірність розв'язувальної системи рівнянь (4) мінімальна і збігається з кількістю ступенів вільності механічної системи, що вивчається.

Система рівнянь (4) є лінійною відносно других похідних від шуканих змінних, що дає можливість перетворити її до нормальної форми Коші і виконати інтегрування системи за часом методом Рунге – Кутти четвертого порядку. Коефіцієнти рівнянь (4) визначаються у квадратурах від форм коливань для довільного N. Наведені далі результати числових розрахунків отримано з урахуванням $N = 12$ форм коливань рідини відповідно до методики [1].

Особливості динамічної взаємодії рідини з резервуаром за наявності рівномірного витікання. Розглянемо рух циліндричного резервуара радіуса $R = 1$ м на маятниковому підвісі довжиною $l = 0.1R$, $l = R$. Вибір довжини підвісу обумовлений тим, що, як установлено у [2], при сталій масі рідини рух системи подібний до лінійного на малих довжинах маятникового підвісу. Узято довжини з діапазону, в якому прояви нелінійних властивостей системи послаблені, щоб виділити вплив на динаміку системи наявності витікання. Маса резервуара складає 10 % початкової маси рідини. У початковий момент часу резервуар відхилено від положення рівноваги на кут $\alpha_0 = \frac{\pi}{25}$.

Через дно резервуара відбувається рівномірне витікання рідини зі швидкістю $\Delta H = -0{,}05$. Досліджено випадки з різним рівнем початкового заповнення резервуара H_0. На рис. 2–5 подано числові результати для задач із витіканням (тонка лінія на графіках) та зі сталим рівнем заповнення резервуара (товста лінія).

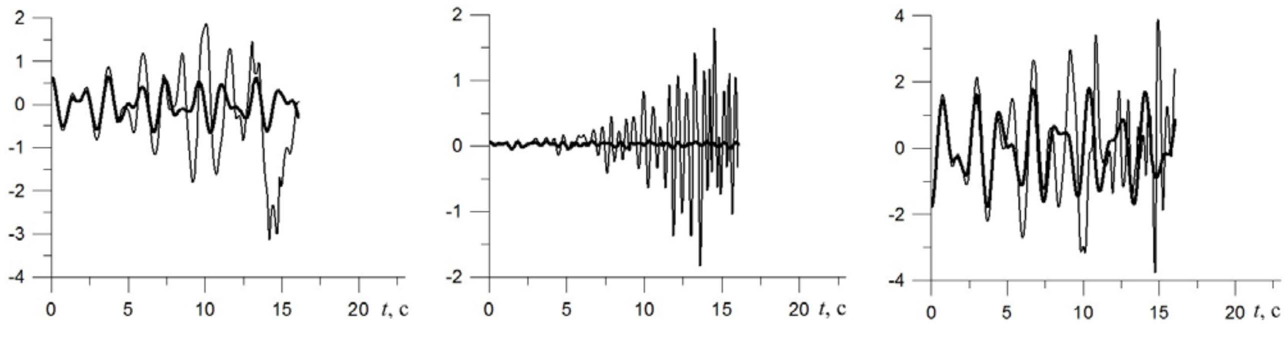
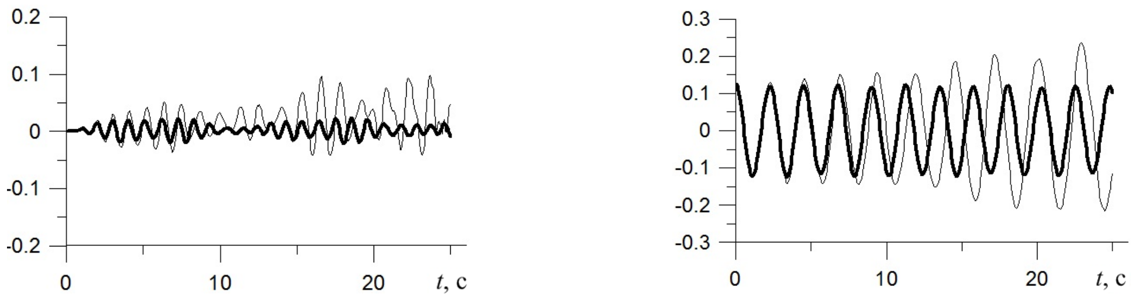


Рис. 2. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: горизонтальна R_x (а); вертикальна R_z (б), ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x (в), віднесені до маси системи, для $H_0 = R,\ l = 0.1R$

Із рис. 3 (б) при аналізі зміни в часі кута відхилення резервуара від вертикалі видно, що у випадку з витіканням зростає амплітуда коливань резервуара і зменшується частота коливань із часом, що узгоджується з теоремою про зміну моменту кількості руху і свідчить про адекватне відображення механічних властивостей системи на основі побудованої математичної моделі.



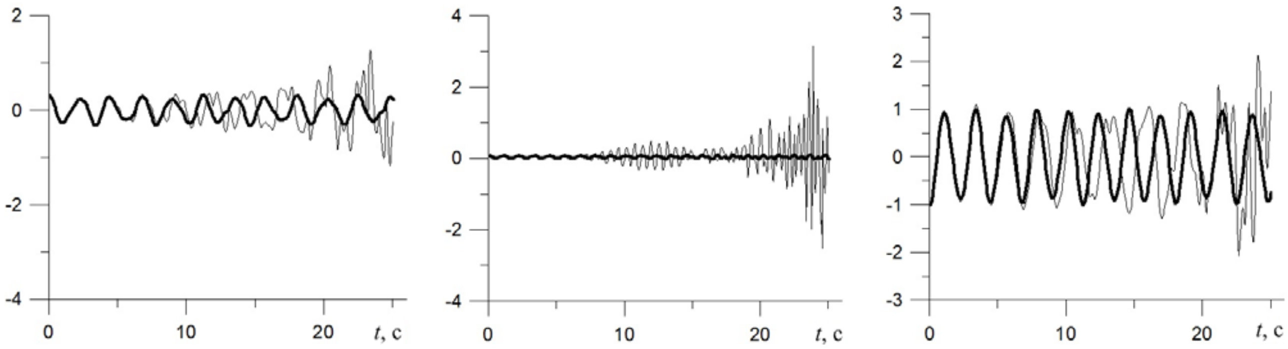
а) б)

Рис. 3. Зміна в часі: амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини (а) та кута відхилення резервуара від вертикалі для $H_0 = 2R,\ l = 0{,}1R$ (б)

Для задач із витіканням характерним є зростання амплітуди першої осесиметричної форми порівняно з випадком сталого заповнення, яка є показником активізації нелінійних процесів у системі. Як відомо, ця форма може зазнати збурення лише в результаті нелінійного перерозподілу енергії між формами коливань. Як показує рис. 3 (а), ця форма також має суттєве зміщення середнього, що є проявом властивості нелінійних хвиль – перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини. Для випадку сталого заповнення цей ефект проявляється суттєво слабкіше.

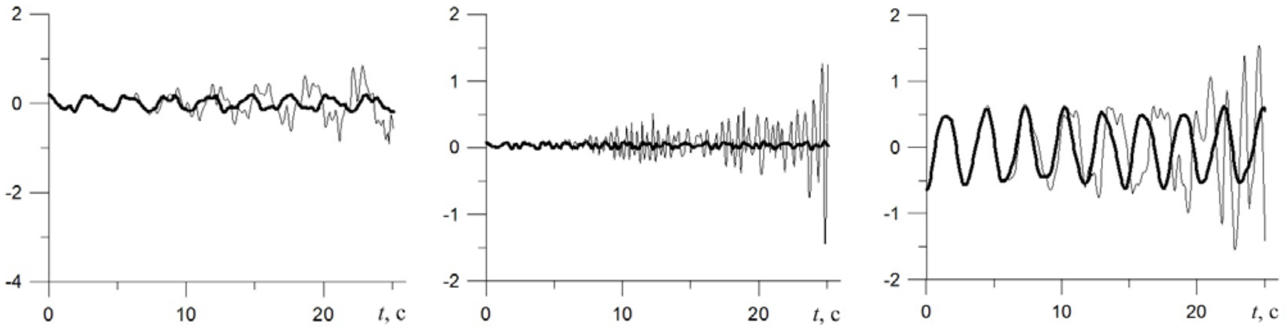
Для аналізу силової взаємодії рідини з резервуаром вивчено зміну в часі складових сил тиску рідини на стінки резервуара за наявності витікання при різних рівнях початкового заповнення резервуара. Як видно з рис. 2, 4, 5, при витіканні відбувається зростання амплітуд горизонтальної складової сил тиску рідини на стінки резервуара R_x та ненульової складової головного моменту сил тиску M_x із часом, що відповідає теоретичним очікуванням і пояснюється зростанням амплітуди коливань резервуара зі зменшенням маси рідини. Витікання сприяє модуляції вертикальної складової сил тиску рідини R_z, її амплітуда із часом також зростає, присутні високочастотні складові. При сталому заповненні вертикальна складова сил тиску рідини практично відсутня для коротких підвісів, як видно з рис. 2, 4, 5 (б), що було детально показано у [2].

Також розглянуто задачу руху системи з витіканням для різних значень початкового заповнення резервуара. На рис. 2, 4 наведено випадки з початковим рівнем заповнення резервуара $H_0 = R$ та $H_0 = 2R$. Порівнюючи зміни в часі вертикальної складової R_z головного вектора сил тиску (рис. 2, 4 (*б*)), зазначимо, що прояви нелінійності протікання процесів при зміні рівня рідини значніші, ніж у випадку сталого рівня заповнення, незалежно від рівня початкового заповнення.



а) б) в)

Рис. 4. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: горизонтальна R_x (а); вертикальна R_z (б), ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x (в), віднесені до маси системи, для $H_0 = 2R,\ l = 0.1R$



а) б) в)

Рис. 5. Складові головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара: (а) – горизонтальна R_x; (б) – вертикальна R_z, (в) – ненульова компонента головного моменту сил тиску рідини M_x, віднесені до маси системи, для $H_0 = 2R,\ l = R$

Для перевірки коректності отриманих результатів числових розрахунків виконано обчислення зі зменшенням кроку інтегрування в 5 разів і встановлено, що зростання амплітуд, зокрема, першої осесиметричної форми коливань, не обумовлені накопиченням обчислювальної похибки.

Висновки. Досліджено динаміку системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі в сумісній постановці за наявності рівномірного витікання рідини через дно резервуара. Показано, що побудована математична модель адекватно відображає рух механічної системи при змінному заповненні резервуара.

Установлено, що наявність витікання рідини призводить до зростання внеску нелінійних механізмів у системі, зокрема, помітно зростає амплітуда вертикальної складової головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара, присутні значні модуляції.

Розглянуто задачу для різних рівнів початкового заповнення резервуара і показано, що прояви нелінійностей не пояснюються безпосередньо зниженням рівня рідини до певного граничного значення, а присутні за наявності витікання як такого.

Список використаних джерел

1. *Лимарченко О.С.* Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В. В. Ясинский. – К. : Гнозис. – 2002. – 168 с.

2. *Семенович К. О.* Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / К. О. Семенович, О. С. Лимарченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 67–70.

Надійшла до редколегії 10.05.17

О. Лимарченко, д-р техн. наук, К. Семенович, канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖИДКОСТИ С РЕЗЕРВУАРОМ НА МАЯТНИКОВОМ ПОДВЕСЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАВНОМЕРНОГО ИСТЕЧЕНИЯ

Исследована задача углового движения цилиндрического резервуара на маятниковом подвесе, частично заполненного жидкостью, при наличии равномерного истечения жидкости. Изучено динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром и показано, что в случае с истечением существенны проявления нелинейных свойств механической системы, чего не наблюдается в задаче с постоянным объемом жидкости.

O. Limarchenko, Full Doctor, K. Semenovych, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DYNAMIC INTERACTION OF LIQUID WITH THE RESERVOIR ON PENDULUM SUSPENSION IN THE PRESENCE OF UNIFORM OUTFLOWING

Problem of dynamics of cylindrical reservoir, partially filled with ideal liquid, on pendulum suspension in the case of uniform outflowing of liquid is considered within the framework of combined motion approach. Peculiarities of dynamic response of liquid are studied and compared with the case of constant volume of liquid.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р фіз-мат. наук
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв,
Л. Федорченко, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Email: *fedorchenko555@gmail.com*
Л. Васильєва, канд. фіз.-мат. наук
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ЗРІЗАНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

У рамках розв'язування важливої задачі магнітопружності теорії гнучких ортотропних оболонок обертання сформульовано постановку крайової задачі. Запропоновано методику її розв'язування. Досліджено та проаналізовано вплив граничних умов на характеристики напружено-деформованого стану.

Вступ. Розвиток сучасного обладнання, призначеного для роботи під дією механічних та електромагнітних полів, вимагає використання теорії зв'язаних полів при дослідженні пружних тіл для оптимального проектування конструкцій у ядерній та авіаційній техніці [13,14]. Пружні тіла, які перебувають у нестаціонарному магнітному полі, часто знаходяться під дією стороннього електричного струму. Задачі магнітопружності з урахуванням дії стороннього струму на ортотропні оболонки є складними і мало дослідженими через те, що для розкриття ефектів зв'язаності полів і визначення напружено-деформованого стану необхідним є застосування нелінійної теорії [1,4,7,8].

У цій статті проведено аналіз впливу граничних умов зрізаної сферичної ортотропної оболонки з урахуванням ортотропної електропровідності на її напружено-деформований стан.

Постановка задачі. Розглядаємо гнучку ортотропну сферичну оболонку змінної товщини, у якої координатна поверхня має форму, замкнену в коловому напрямку. Припускаємо, що оболонка перебуває під дією нестаціонарного механічного й електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями, приймемо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм $J_{\theta CT}$ від зовнішнього джерела.