УДК 519.21

Г. Верьовкіна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *ganna.verov@gmail.com*

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ПРЯМОКУТНОЮ РЕШІТКОЮ ВУЗЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Досліджуються інтерполяційні зображення деяких класів стохастичних процесів за прямокутною решіткою вузлів інтерполяції. Побудовано інтерполяційний ряд та доведено збіжність одержаного ряду до стохастичного процесу з імовірністю одиниця рівномірно в довільній обмеженій області зміни параметра.

Вступ. Одним з основних результатів теорії передачі інформації є теорема про представлення функції з обмеженим спектром у періодичній послідовності початкових моментів часу. Дані питання стосуються застосувань теореми Котєльнікова – Шеннона [4] та її узагальнень. Отримані результати широко використовують у теорії зв'язку та інших галузях техніки, де неперервний випадковий сигнал можна замінити дискретним набором значень процесу та його похідних. Сучасні дослідження пов'язані з побудовою інтерполяційних поліномів, сплайн-апроксимації, поданням руху у 3D-моделюванні за допомогою інтерполяційних схем та іншими питаннями сучасної теорії передачі сигналу. Ця робота присвячена питанням побудови інтерполяційних зображень деяких класів стохастичних процесів за вузлами інтерполяції, що утворюють прямокутну решітку на площині.

Основна частина. Нехай $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in R^2$ – сепарабельний стохастичний процес з $\mathrm{M}\xi(\bar{t}) = 0$, який має зображення вигляду

$$\xi(\bar{t}) = \int_{\Lambda^2} \prod_{i=1}^{2} f_i(t_i, \lambda_i)\ Z(d\bar{\lambda}) \ , \tag{1}$$

де Λ – деяка множина параметрів, $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, $Z(d\bar{\lambda})$ – така випадкова функція множин на $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$, що

$$\mathrm{M}Z(d\bar{\lambda}) = 0, \quad \mathrm{M}Z(A_1, A_2) \cdot \overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2) \ , \tag{2}$$

де F – комплексна функція множин, адитивна за всіма аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda^2 \times \Lambda^2} \left| F(d\bar{\lambda}, d\bar{\mu}) \right| < +\infty \ . \tag{3}$$

Нехай функції $f_i(t_i, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, такі, що кожну з них можна довизначити у комплексній площині відносно t_i до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma_i(\lambda_i)$ і такої, що

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sigma_i(\lambda_i) = \sigma_i < \infty \ , \tag{4}$$

$$\sup_{\lambda_i \in \Lambda} \sup_{t_i \in \mathrm{R}} \left| f_i(t_i, \lambda_i) \right| = L_{f_i} < \infty \ . \tag{5}$$

Властивості стохастичних процесів указаного вигляду досліджені Ядренком М. Й. у [5]. Справедлива така теорема.

Теорема. Нехай $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathrm{R}^2$ – сепарабельний стохастичний процес вигляду (1), що задовольняє умови (2) – (5). Тоді з імовірністю одиниця виконується зображення

$$\xi(\bar{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \xi_{k_1,k_2}(\bar{t}) \omega_{k_1,k_2}(\bar{t}) \ . \tag{6}$$

У формулі (6) величини

$$\xi_{k_1,k_2}(\bar{t}) = \xi_{k_1,k_2}(t_1, t_2) \quad \text{та} \quad \omega_{k_1,k_2}(\bar{t}) = \omega_{k_1,k_2}(t_1, t_2)$$

визначаються таким чином

$$\xi_{k_1,k_2}(\bar{t}) = \xi_{k_1,k_2}(t_1, t_2) =$$

$$= \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}) \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{3} - \sqrt{3} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} - \frac{2\pi}{\alpha_1} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) +$$

$$+ \xi(k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} + \frac{2\pi}{\alpha_1}, k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2}) \left(t_1 - k_1 \frac{3\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{4} \left(t_2 - k_2 \frac{4\pi}{\alpha_2} \right) \right)^2 \right) -$$

$$-\frac{\partial\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_2}{4}\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\partial\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2}\frac{2}{3}\frac{\alpha_1}{3}\left(\frac{\alpha_1}{3}-\sqrt{3}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_2}{4}\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\partial\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}+\frac{2\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_2}{4}\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right)-$$

$$-\frac{\partial^2\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1\partial t_2}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_2}{4}\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\partial^2\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^{\,2}}\frac{1}{3}\frac{\alpha_1}{3}\left(\frac{\alpha_1}{3}-\sqrt{3}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial^2\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}+\frac{2\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^{\,2}}\frac{1}{2}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^2-$$

$$-\frac{\partial^3\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1\partial t_2^{\,2}}\frac{1}{2}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial^3\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^{\,3}}\frac{1}{9}\frac{\alpha_1}{3}\left(\frac{\alpha_1}{3}-\sqrt{3}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^3+$$

$$+\frac{\partial^3\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}+\frac{2\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_2^{\,3}}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^3-$$

$$-\frac{\partial^4\xi(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2})}{\partial t_1\partial t_2^{\,3}}\frac{1}{6}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right), \tag{7}$$

$$\omega_{k_1,k_2}(\bar{t})=\omega_{k_1,k_2}(t_1,t_2)=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha_1}{3}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)\sin\frac{\alpha_1}{3}\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)}{\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^3\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}\right)^2\left(t_1-k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\right)}\frac{\sin^4\frac{\alpha_2}{4}\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}{\left(\frac{\alpha_2}{4}\right)^4\left(t_2-k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)^4}. \tag{8}$$

У формулах (7), (8) вузли інтерполяції інтерполяційної формули (6) утворюють на площині прямокутну сітку

$$\left(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right),\ \left(k_1\frac{3\pi}{\alpha_1}+\frac{2\pi}{\alpha_1},k_2\frac{4\pi}{\alpha_2}\right),\ k_1,k_2\in Z\ , \tag{9}$$

де α_1,α_2 – довільні дійсні числа такі, що $\alpha_1>\sigma_1,\ \alpha_2>\sigma_2,\ k_1,k_2\in Z$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо результат із теорії цілих функцій. Нехай $f_1(t_1,\lambda_1)$ та $f_2(t_2,\lambda_2)$ задовольняють умови (4), (5). Тоді

$$f(\bar{t},\bar{\lambda})=\prod_{i=1}^{2}f(t_i,\lambda_i)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}f_{k_1,k_2}(\bar{t},\bar{\lambda})\omega_{k_1,k_2}(\bar{t}), \tag{10}$$

де функція $f_{k_1,k_2}(\overline{t},\overline{\lambda})$ визначається аналогічно (7). Використовуючи [1]–[3], отримаємо оцінку залишку інтерполяційного ряду (10), а саме,

$$R_n(\bar{t}) = \sup_{\bar{\lambda}\in\Lambda^2}\left| f(\overline{t},\overline{\lambda}) - \sum_{k_1=-n}^{n}\sum_{k_2=-n}^{n} f_{k_1,k_2}(\overline{t},\overline{\lambda})\omega_{k_1,k_2}(\overline{t})\right| \le G(\bar{t})\frac{1}{n}\ , \tag{11}$$

де $G(\bar{t})$ – функція, що є обмеженою в довільній обмеженій області комплексної площини.

Розглянемо стохастичний процес

$$\xi_n(\overline{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\xi_{k_1,k_2}(\overline{t})\omega_{k_1,k_2}(\overline{t})\ . \tag{12}$$

Згідно із зображенням (1) стохастичний процес (12) можна записати у вигляді

$$\xi_n(\overline{t}) = \int_{\Lambda^2}\Big(\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1,k_2}(\overline{t},\overline{\lambda})\omega_{k_1,k_2}(\overline{t})\Big)Z(d\overline{\lambda})\ . \tag{13}$$

Використовуючи зображення (1) та (13) отримаємо

$$M\,|\,\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})\,|^2 \le R_n^2(\bar{t}) \int_{\Lambda^2\times\Lambda^2} \left|\,F\left(d\overline{\lambda}, d\overline{\mu}\right)\right|\ . \tag{14}$$

Із нерівності (14), ураховуючи умову (3) та оцінку (11), маємо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до стохастичного процесу $\xi(\bar{t})$, $\bar{t}\in \mathrm{R}^2$, у середньому квадратичному. Використовуючи сепарабельність процесу $\xi(\bar{t})$ та збіжність ряду $M\,|\,\xi(\bar{t}) - \xi_n(\bar{t})\,|^2$, одержимо, що інтерполяційний ряд (6) збігається до стохастичного процесу $\xi(\bar{t})$ з імовірністю одиниця рівномірно відносно $\bar{t}$ в кожній обмеженій області зміни $\bar{t}$.

Висновки. Досліджено інтерполяційні зображення одного класу стохастичних процесів за вузлами інтерполяції, що складають прямокутну решітку на площині. Основним результатом статті є теорема про збіжність інтерполяційного ряду до стохастичного процесу з імовірністю одиниця рівномірно в довільній обмеженій області зміни параметра.

Список використаних джерел

1. *Верьовкіна Г. В.* Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів / Г. В. Верьовкіна, В. Н. Нагорний // Вісн. Київ. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 4. – С. 9–11.
2. *Нагорний В. Н.* Інтерполяційні зображення випадкових процесів за рівновіддаленими вузлами інтерполяції / В. Н. Нагорний// Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. – 1990. – Вип. 32. – С. 82–85.
3. *Нагорний В. Н.* Одне інтерполяційне зображення випадкових процесів / В. Н. Нагорний // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. – 1986. – Вип. 28. – С. 128–130.
4. *Хургин Я. И.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М., – 1962. – 220 с.
5. *Ядренко М. О.* Аналітичні випадкові поля // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка / М. О. Ядренко. – 1969. – Вип. 1. – С. 56–60.

Надійшла до редколегії 20.10.16

А. Веревкина, канд. физ.-мат. наук, доц.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Исследуются интерполяционные представления некоторых стохастических процессов по прямоугольной решетке узлов интерполяции. Получен интерполяционный ряд и доказана сходимость полученного ряда к стохастическому процессу с вероятностью единица равномерно в произвольной ограниченной области перемены параметра.

G. Verovkina, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE INTERPOLATION REPRESENTATION SOME CLASSES OF STOCHASTIC PROCESSES ON THE RECTANGULAR GRID OF INTERPOLATION KNOTS

Paper deals with some interpolation representations of stochastic processes on the rectangular grid of interpolation knots. The interpolation row is built. The convergence with probability 1 of the corresponding interpolation series to a stochastic process in any bounded domain of changes of parameter is proved.