

5. Шкиль Н. И. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – К. : Высшая шк., 1991. – 207 с.
6. Gohberg I. Matrix polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – Philadelphia, 2009. – 410 p.

Надійшла до редколегії 08.06.19

С. Пафик, канд. физ.-мат. наук
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКРИТИЧЕСКИХ И КРИТИЧЕСКИХ СТОЙКИХ СЛУЧАЯХ

Используя асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и их систем, построено асимптотическое решение краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрены не критический и критический устойчивые случаи. Для каждого из случаев найдены соответствующие асимптотические оценки.

Ключевые слова: асимптотические решения, метод малого параметра, сингулярное возмущение, двухточечная краевая задача, асимптотические оценки.

S. Paŭyk, Ph. D.
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF A TWO-POINT EDGE-BASED PROBLEM FOR A LINEAR SINGULARLY DISTURBED SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN NONCRITICAL AND CRITICAL STABLE CASES

Using asymptotic methods in the theory of differential equations and their systems, an asymptotic solution of the boundary value problem for a linear singularly perturbed system of differential equations is constructed thjee are. Considered non-critical and critical resistant cases. For each of the cases, the corresponding asymptotic estimates were found.

Keywords: asymptotic solutions, small parameter method, singular perturbation, two-point boundary value problem, asymptotic estimates.

УДК 519.6, 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.06.25-30>

I. Гап'як, канд. фіз.-мат. наук, асист.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: igaryak@gmail.com

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ГРАНУЛЬОВАНИХ ГАЗІВ

Для систем частинок із дисипативною взаємодією розглянуто кінетичне рівняння типу Больцмана для гранульованих газів, яке є узагальненням класичного рівняння Больцмана. Побудовано чисельний розв'язок задачі Коші для такого кінетичного рівняння та досліджено його стійкість.

Ключові слова: кінетичне рівняння Больцмана, гранульовані гази, чисельні розв'язки, обчислювальні схеми.

Вступ. Класичне кінетичне рівняння Больцмана має фундаментальне значення в сучасній математичній фізиці [3, 5, 9]. Воно знаходить застосування як у класичних задачах теорії рідин і газів, так і при моделюванні масової поведінки великого скупчення однорідних мікрооб'єктів довільної природи [2]. Але для багатьох важливих практичних питань, пов'язаних із дослідженням динаміки частинок, взаємодія яких супроводжується втратою енергії, таке рівняння виявляється непридатним. Подібні ситуації набувають значення при розгляданні динаміки гранульованих середовищ, які включають у себе велику кількість явищ у самоорганізованих структурах: утворення великомасштабних кластерів (зоряні хмари, планетарні кільця), ударних хвиль тощо [10]. У зв'язку з цим виникає потреба будувати і вивчати властивості не тільки аналітичних розв'язків, які існують на скінченних інтервалах часу, а й чисельних розв'язків відповідних узагальнень рівняння Больцмана, у яких такі ефекти спостерігаються.

Одним із таких узагальнень є кінетичне рівняння Больцмана для гранульованих газів [4], яке відрізняється від свого класичного прототипу наявністю спеціального параметра (коефіцієнта відновлення), який відповідає за середній ступінь дисипації протягом одного акту міжчастинкової взаємодії. Незважаючи на те, що дисипативне рівняння Больцмана має широке практичне застосування, його розв'язки зазвичай шукають за допомогою прямого імітаційного моделювання методами Монте-Карло. Як добре відомо, результати, що отримані такими методами, містять суттєві стохастичні "забруднення", які значно спотворюють розв'язок і унеможливають його практичне використання в більшості прикладних задач. Водночас класичне рівняння Больцмана та чисельні методи його розв'язання добре вивчені [8] і можуть бути частково перенесені на дисипативний випадок, зважаючи на їхню спорідненість. Часткові результати містяться в [6].

Опишемо процедуру побудови чисельного розв'язку задачі Коші для кінетичного рівняння Больцмана з дисипативною взаємодією та просторово-однорідним інтегралом зіткнень, яке було отримано В.І. Герасименком та М.С. Боровченковою у [4] і наведемо приклади чисельної реалізації для окремих частинних випадків коефіцієнта відновлення.

1. Рівняння типу Больцмана для гранульованих газів. Для гранульованих систем частинок припускається, що середня довжина вільного пробігу гранул значно більша за їхній типовий розмір і динаміка таких систем визначається дисипативною природою короткодючої взаємодії між гранулами. Тому розглядаємо систему нефіксованої кількості

пружних куль одиначної маси з діаметром $\sigma > 0$, що рухаються у двовимірному просторі. Кожна пружна куля характеризується фазовими координатами $(q_i, v_i) = x_i, i \geq 1$, координатаю q_i і швидкістю v_i . Дисипативна динаміка такої системи описана в [4].

При непружних зіткненнях відповідні ефекти дисипації моделюються за допомогою коефіцієнта відновлення α ($0 < \alpha < 1$), який характеризує ступінь непружності, а саме: $g'_{i,j} \cdot \omega = -\alpha(g \cdot \omega)$, де $g_{i,j} = v_i - v_j$ – відносна швидкість i та j частинок до взаємодії, v_i, v_j – відповідні абсолютні швидкості i та j частинок до взаємодії та $g'_{i,j} = v'_i - v'_j$ – відносна швидкість тієї ж пари частинок після взаємодії і v'_i, v'_j – відповідні абсолютні швидкості i та j частинок після взаємодії; ω – одиничний вектор, що характеризує кут розсіяння i -ї частинки, що рухається з відносною швидкістю g .

Зазвичай коефіцієнт відновлення вважається фізичною сталою, хоча насправді він пов'язаний з відносною швидкістю таким чином, що зіткнення на близьких швидкостях будуть майже пружними. При побудові чисельного розв'язку кінетичного рівняння Больцмана для гранульованих газів будемо вважати, що $\alpha = \text{const}$. Задача Коші для кінетичного рівняння Больцмана з дисипативною взаємодією твердих куль має такий вигляд:

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t} + v \nabla_q F_1(t) = I(F_1(t), F_1(t)), \tag{1}$$

$$F_1(0, q, v) = F_1^0(q, v), \tag{2}$$

де $F_1(t) = F_1(t, q, v)$ – інтегрована, нерівноважна функція розподілу з координатами q і швидкостями v , фізичний зміст якої полягає в тому, що вираз $F_1(t, q, v) dq dv$ визначає ймовірність того, що існує пружна куля в околі dq та dv з координатою q і швидкістю v у момент часу t , $I(F_1(t), F_1(t))$ – інтеграл зіткнень, який визначений у [4].

Розглянемо просторово-однорідний інтеграл зіткнень. Визначимо інтеграл зіткнень через його дію на тестову функцію $\psi \in C_0^\infty(R^2)$, де C_0^∞ – простір неперервно-диференційованих функцій з компактним носієм [6], за допомогою формули

$$\int_{R^2} I(F_1, F_1)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{R^2} \int_{R^2} \int_{S^1} B(\omega, g) F_1(v) F_1(v_1) [\psi(v') + \psi(v'_1) - \psi(v) - \psi(v_1)] d\omega dv_1 dv, \tag{3}$$

де $S^1 = \{\omega \in R^2 \mid |\omega| = 1, \omega \cdot (v - v_1)\}$, $B(\omega, g)$ – ядро інтеграла зіткнень (ядро розсіяння), яке задає механізм взаємодії.

У випадку реальних газів вираз для $B(\omega, g)$ може бути досить складним. Фактично ця функція містить у собі всі характерні ефекти взаємодії частинок, повне урахування яких не завжди можливе. Тому найчастіше обмежуються певними спрощеними моделями, які у більшості випадків не призводять до значних помилкових відхилень у чисельних розв'язках. Розглянемо випадок, коли ядро описується формулою

$$B(\omega, g) = C_\lambda |g|^\lambda, \quad \text{де } C_\lambda > 0 \text{ – певна стала.} \tag{4}$$

Вираз (4) узагальнює два відомих випадки: максвеллівський газ, коли $\lambda = 0$, і газ, який складається із твердих куль, коли $\lambda = 1$.

2. Побудова обчислювальної схеми. Для побудови наближеного розв'язку для задачі Коші (1), (2) на часовому відрізку $[0, T]$, де $T > 0$ скористуємося схемою розщеплення, яку запропоновано в [8] для класичного рівняння Больцмана. Для цього введемо до розгляду два оператори A і B , які визначено таким чином:

$$A(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla_q u,$$

$$B(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} - I(\xi, \xi).$$

Утворимо далі рівномірне з кроком Δt розбиття (сітку) $\{t^m\}_{m=0}^M$ часового проміжку $[0, T]$, на кожному кроці якого замість задачі Коші (1), (2) будемо розглядати таку пару задач:

$$A(u) = 0, \tag{5}$$

$$u(t, q, v) = u_0(q, v), \tag{6}$$

$$B(\xi) = 0, \tag{7}$$

$$\xi(t, q, v) = \xi_0(q, v). \tag{8}$$

При цьому кажуть, що задача Коші (5), (6) відповідає транспортній фазі процесу, а задача Коші (7), (8) – релаксаційній.

Ідея методу розщеплення полягає в тому, що кожна з цих задач розв'язується окремо. Одразу зазначимо, що коректність такого розщеплення визначається тим, як саме будуть поєднані розв'язки транспортного та релаксаційного етапів. Позначимо через $S_A^{\Delta t}$ і $S_B^{\Delta t}$ однокрокові оператори розв'язку для задач Коші (5), (6) та (7), (8), відповідно.

Позначимо за допомогою $S_A^{\Delta t} u_0$ наближене значення розв'язку задачі Коші (5), (6) у момент часу Δt , а за допомогою $S_B^{\Delta t} \xi_0$ – наближене значення розв'язку задачі Коші (7), (8) у момент часу Δt .

Найпростіша схема полягає в поєднанні, на кожному кроці розв'язанні задач Коші (5), (6) та (7), (8):

$$F_1(t^{m+1}) = S_B^{\Delta t} S_A^{\Delta t} F_1(t^m).$$

Легко перекоонатися, що така схема поєднання задач Коші (5), (6) та (7), (8) завжди даватиме наближений розв'язок задачі Коші (1), (2) порядку якого не більший одиниці. З метою покращення властивостей апроксимації зазвичай обирають більш складні схеми. Наприклад, для другого порядку апроксимації можна використовувати процедуру симетричного розщеплення за Стренґом [11]:

$$F_1(t^{m+1}) = S_A^{\Delta t/2} S_B^{\Delta t} S_A^{\Delta t/2} F_1(t^m). \quad (9)$$

Розглянемо спочатку транспортну задачу Коші (5), (6). Очевидно, що це звичайна задача Коші для рівняння перенесення, розв'язок якої може бути представлений аналітично: $u(t, q, v) = u_0(q - vt, v)$. Проста структура розв'язку обумовлена насамперед відсутністю граничних умов. У загальному випадку, при моделюванні динаміки газів у замкненій просторовій області, необхідно враховувати ефекти відбиття від її стінок, для чого треба задати відповідні крайові умови. У цій статті ми розглядаємо еволюцію частинок у всьому просторі, а тому крайові умови відсутні.

Більш складного підходу до знаходження чисельного розв'язку потребує задача Коші (7), (8). Зазвичай розв'язок таких задач шукають як результат розкладання за певним базисом, як правило ортогональним, за функціями від просторових змінних з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для такого розвинення, ґрунтуючись на методах Фур'є–Гальоркіна, можна записати систему звичайних диференціальних рівнянь відносно вказаних коефіцієнтів, для розв'язку якої зазвичай використовується відповідний чисельний метод, зазвичай це метод Рунге–Кутти або його варіації. Оскільки цей підхід подібний методам, які використовуються при вивченні спектральних задач, що виникають у теорії інтегральних рівнянь, то відповідні чисельні методи називають *спектральними*. Точність таких методів (спектральна точність) залежить лише від точності розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь і кількості базисних елементів, що входять у розвинення шуканої функції.

Перед побудовою розв'язку релаксаційної задачі (6) зробимо одне зауваження. Згідно з означенням (2) інтеграл зіткнень береться по необмеженій області всіх можливих швидкостей. Але, оскільки початкова умова обирається майже цілком зосередженою на скінченній області двовимірної площини, а початкова функція розподілу близька до максвеллівської функції розподілу, то шукану функцію можна вважати такою, яка зосереджена на компактному носії. Формально для цього достатньо перевизначити початкову умову, визначивши її нулем на тій частині площини, на якій її значеннями можна знехтувати, але додатково слід забезпечити неперервність такої функції. Зрозуміло, що з часом початкова область може розширюватися, але для обмежених часових інтервалів на це можна не звертати уваги. Така можливість обґрунтовується такою теоремою [6].

Теорема 1. Нехай $\text{supp}[\xi(t, q, v)] \subset U(0, r)$, де $U(0, r)$ – диск радіуса $r > 0$ із центром у початку координат, тоді

$$1) \text{supp}[I(\xi, \xi)(t, q, v)] \subset U(0, \sqrt{2}r);$$

$$2) \int_{R^2} I(\xi, \xi)(\eta) \psi(\eta) d\eta = \frac{C_1}{2} \int_{U(0, \sqrt{2}r)} \int_{U(0, 2r)} \int_{S^1} |g| \xi(\eta) \xi(\eta - g) [\psi(\eta') - \psi(\eta)] d\omega dg d\eta,$$

де $\eta - g \in U(0, (2 + \sqrt{2})r)$ і $\eta' \in U(0, (1 + \alpha + \sqrt{2})r)$.

Фактично теорема 1 стверджує, що у випадку функцій розподілу зосереджених на деякому диску скінченних розмірів, значення інтеграла зіткнень не зміниться, якщо межі інтегрування "обрізати" відповідно до розмірів носія функції. При цьому сам інтеграл зіткнень є функцією з компактним носієм відносно швидкісної змінної.

Зауважимо, що носій функції ξ по змінній v повністю належить диску радіуса r із центром у початку координат.

Завдяки теоремі 1 функцію $\xi(t)$ можна вважати визначеною на квадраті $[-V, V]^2$, де $V \geq (3 + \sqrt{2})R$, і періодично продовжити за межі цього квадрата. Дійсно, твердження теорема гарантує, що такий вибір виключає можливість перетинання відрізків періодичності і позбавляє похибок, що можуть виникнути внаслідок нашарування періодів.

Нехай $k = (k_1, k_2)$ – мультиіндекс (цілочисловий вектор), для якого введемо звичайні (евклідові) означення скалярного добутку і норми. Під записом $k = -N \dots N$ будемо розуміти, що всі k_i пробігають значення з діапазону $-N \dots N$ одночасно. Апроксимуємо функцію ξ частинною сумою ряду Фур'є ξ_N за тригонометричним базисом:

$$\xi_N(t, v) = \sum_{k=-N}^N \tilde{\xi}_k(t) e^{ik \cdot v},$$

де

$$\tilde{\xi}_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} \xi(t, v) e^{-ik \cdot v}.$$

Підставимо це зображення в задачу (6) і запишемо визначальну умову методу Гальоркіна – умову ортогональності нев'язки до базисних функцій:

$$\int_{[-\pi, \pi]^2} \left(\frac{\partial \xi_N}{\partial t} - I(\xi_N, \xi_N) \right) e^{ik \cdot v} dv = 0.$$

Враховуючи властивість ортогональності тригонометричного базису, після деяких математичних перетворень отриману умову можна переписати в такий спосіб:

$$\frac{\partial \hat{\xi}_k}{\partial t} = \sum_{r+s=k}^N \hat{\xi}_r \hat{\xi}_s (\hat{B}(r,s) - \hat{B}(s,s)), \tag{10}$$

де модальні коефіцієнти $\hat{B}(r,s)$ визначаються згідно з теоремою 1, у якій на місце тестових функцій для слабкого представлення інтеграла зіткнень (2) послідовно підставлено відповідні функції тригонометричного базису:

$$\hat{B}(r,s) = \frac{C_1}{2} \int_{U(0,2\beta\pi)} \int_{S^1} |g| \exp\left(-ig \cdot s + i \frac{1+\alpha}{4}(r+s) \cdot (g - |g|\omega)\right) d\omega dg.$$

Перепишемо вираз для $\hat{B}(r,s)$, відокремивши вкладені інтеграли:

$$\hat{B}(r,s) = \frac{C_1}{2} \int_{U(0,2\beta\pi)} |g| \exp\left(ig \cdot r \frac{1+\alpha}{4} - ig \cdot s \frac{3-\alpha}{4}\right) f_0(|g|, r+s, \alpha) dg,$$

де $f_0(|g|, r+s, \alpha) = \int_{S^1} \exp\left(-i|g|\omega \cdot (r+s) \frac{1+\alpha}{4}\right) d\omega$. Оскільки $\int_{S^1} \exp(-iq \cdot \omega) d\omega = 2 \int_0^\pi \cos(|q| \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(|q|)$, де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, то $f_0(|g|, r+s, \alpha) = 2\pi J_0\left(\frac{1+\alpha}{4}|g|(r+s)\right)$ і, відповідно:

$$\hat{B}(r,s) = C_1 \pi \int_{U(0,2\beta\pi)} |g| \exp\left(ig \cdot r \frac{1+\alpha}{4} - ig \cdot s \frac{3-\alpha}{4}\right) J_0\left(\frac{1+\alpha}{4}|g|(r+s)\right) dg.$$

Переходячи в останньому виразі до полярних координат, матимемо

$$\begin{aligned} \hat{B}(r,s) &= C_1 \pi \int_0^{2\beta\pi} \rho^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)|\rho}{4}\right) \cos \theta d\theta \right] J_0\left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4}\right) d\rho = \\ &= 2C_1 \pi^2 \int_0^{2\beta\pi} \rho^2 J_0\left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)|\rho}{4}\right) J_0\left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4}\right) d\rho = \\ &= 2C_1 \pi^2 (2\beta\pi)^3 \int_0^1 \rho^2 J_0\left(\frac{|r(1+\alpha) - s(3-\alpha)|\rho}{4}\right) J_0\left(\frac{|r+s|(1+\alpha)\rho}{4}\right) d\rho. \end{aligned}$$

Нехай $C_1 = (2\pi^2 (2\beta\pi)^3)^{-1}$, $\mu = |r(1+\alpha) - s(3-\alpha)|/4$, $\sigma = |r+s|(1+\alpha)/4$, тоді остаточний вираз для модальних коефіцієнтів набуває форми

$$\hat{B}(r,s) = \int_0^1 \rho^2 J_0(\mu\rho) J_0(\sigma\rho) d\rho. \tag{11}$$

Формула (11) замінює багатократну апроксимацію інтеграла зіткнень набором відносно простих одновимірних інтегралів. Кожний із цих інтегралів може бути попередньо обчислений і збережений ще до початку основного обчислювального циклу. Далі на кожному часовому перерізі достатньо звертатися до утвореного таким чином масиву для побудови і подальшого розв'язання основної системи (10).

Зауважимо, що при $\alpha = 1$ отримані формули збігаються з результатами для звичайного рівняння Больцмана [8].

3. Швидкість алгоритму та стійкість чисельного розв'язку. Швидкість алгоритму значною мірою обумовлена складністю обчислення інтеграла (2). У розглянутих нами випадках, зважаючи на зроблені припущення, інтеграл вдається згрупувати у відносно прості формули, завдяки чому швидкодія цілком визначається можливостями обраної реалізації методу Рунге–Кутти, а також складністю формування системи (10), яке потребує на кожному кроці $O(N^{2d})$ одиниць часу [6]. У більш загальних ситуаціях із нетривіальним ядром розсіяння подібні спрощення зазвичай недосяжні.

Для обґрунтування стійкості побудованого розв'язку, очевидно, достатньо показати, що стійкою є дискретизація інтеграла зіткнень. Щоб сформулювати основний результат, введемо деякі позначення. Нехай P^N – лінійна оболонка, натягнута на підмножину тригонометричного базису до N -го степеня включно:

$$P^N = \text{span}\{e^{ik \cdot \xi} \mid -N \leq k_j \leq N, j = 1, 2\}.$$

Нехай далі $\mathfrak{X}_N : L^2([-\pi, \pi]^2) \rightarrow P^N$ – оператор ортогонального проектування на P^N , узгоджений зі скалярним добутком у $L^2([-\pi, \pi]^2)$. Символом $I^B(\xi, \xi)$ позначимо інтеграл зіткнень, межі інтегрування в якому скорочені до розмірів диска $U(0, 2\beta\pi)$. Додатково будемо розглядати такий об'єкт: $I_N^B = \mathfrak{X}_N I^B(\xi_N, \xi_N)$. Справедливе таке твердження [8].

Теорема 2. Нехай $f \in L^2([-\pi, \pi]^2)$. Тоді справджується оцінка

$$\|I^B(\xi, \xi) - I_N^B(\xi_N, \xi_N)\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)} \leq C \left(\|\xi - \xi_N\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)} + \frac{\|I_N^B(\xi_N, \xi_N)\|_{H_p^r([-\pi, \pi]^2)}}{N^r} \right), \forall r \geq 0,$$

де $H_p^r([-\pi, \pi]^2)$ – підпростір соболевського простору $H^r([-\pi, \pi]^2)$, що складається з періодичних функцій, а стала C залежить від $\|\xi\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)}$.

Нерівність, сформульована в теоремі 2, фактично є умовою неперервної інтеграла зіткнень від підінтегральної функції. Оскільки задача (6) додатково містить лише лінійний оператор диференціювання, апроксимація якого методом Рунге–Кутти стійка, то можна стверджувати [1], що відповідний розв'язок задачі (6), а отже, і задачі Коші (1), (2), умовно стійкий де умова стійкості визначається характером залежності коефіцієнта C від $\|\xi\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)}$.

Зауважимо, що для випадку, коли кожний оператор $S_A^{\Delta t}$ і $S_B^{\Delta t}$ забезпечує не менш ніж другий порядок точності, можна показати, що схема (10) гарантує також другий порядок точності за часом для задачі Коші (1), (2) [11].

У розглядуваному випадку розв'язок транспортної задачі (5), (6) точний, а тому взагалі знімається питання щодо порядку наближення. Апроксимація інтеграла зіткнень має спектральну точність, завдяки чому порядок релаксаційного етапу визначається порядком чисельного методу для відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Таким чином, при використанні методу Рунге–Кутти четвертого порядку, як найбільш поширеного, метод розщеплення для задачі Коші (1), (2) буде завжди давати щонайменше другий порядок апроксимації.

4. Результати. Для тестування алгоритму було розглянуто декілька тестових прикладів для різних значень коефіцієнта відновлення: $\alpha = 0,3$ (рис. 1), $\alpha = 0,5$ (рис. 2) та $\alpha = 0,7$ (рис. 3). В усіх випадках розглядалася безрозмірна задача Коші (1), (2), для якої значення визначальних параметрів бралися порядку одиниці. За початкову умову обиралося деяке збурення нормованого максвеллівського розподілу. Основна мета тестування полягала в тому, щоб визначити еволюцію функції розподілу гранульованого газу, яку моделює побудований чисельний розв'язок, протягом трьох одиниць часу $t = 0.5, t = 1.1, t = 1.8$. Усі розв'язки показали однакову типову поведінку, приклади яких зображено на рис. 1–3.

5.

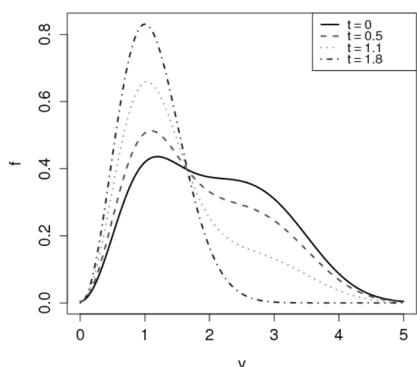


Рис. 1

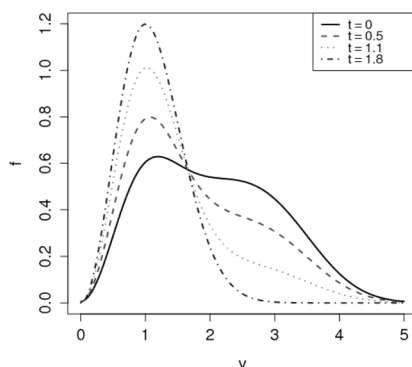


Рис. 2

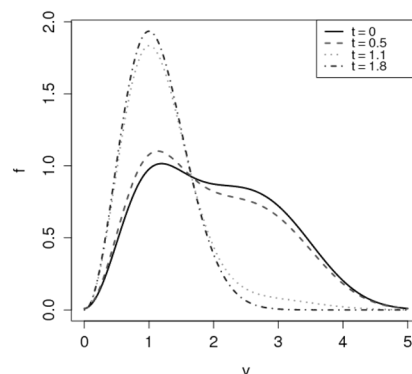


Рис. 3

Із наведених графіків бачимо, що розв'язок наближається до деякої граничної конфігурації. Це узгоджується із загальною властивістю розв'язків кінетичного рівняння Больцмана про те, що розв'язки цього рівняння прямують з часом до рівноважного стану і виконується відома H -теорема.

Результати моделювання показали також, що у випадках малих чисел Кнудсена на релаксаційному етапі ми отримуємо погано обумовлену задачу. Це може призводити до значного спотворення розв'язку. Деякі сучасні адаптації методу Рунге–Кутти [7] дозволяють покращити результат для таких випадків, але на даний час це питання ще відкрите.

Зауважимо, що при побудові чисельного розв'язку класичного рівняння Больцмана використовується така сама слабка форма інтеграла зіткнень (2), що і в дисипативному випадку [8].

Висновки. У цій статті побудовано алгоритм пошуку чисельного розв'язку кінетичного рівняння типу Больцмана для гранульованих газів (1) і за певних умов обґрунтовано його стійкість. Для задачі Коші для кінетичного рівняння типу Больцмана з дисипативною взаємодією частинок зроблена процедура розщеплення на два етапи: вільномолекулярної течії і просторово-однорідної релаксації. Обидві фази опрацьовано незалежно одна від одної й отримано чисельні розв'язки.

Наведені чисельні результати показують можливості розглянутих методів. Встановлено, що у випадку поганої обумовленості множини параметрів, наприклад, коли число Кнудсена, або коефіцієнт відновлення відрізняються від інших параметрів на порядки, система звичайних диференціальних рівнянь, до якої зводиться процедура апроксимації інтеграла зіткнень, стає жорсткою і не може бути розв'язана звичайними методами. Розробка більш "делікатних" методів залишається відкритою проблемою і вимагає подальших досліджень.

Список використаних джерел:

1. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Резибуа П. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов / П. Резибуа, М. де Ленер. – М. : Мир, 1980. – 424 с.
3. Черчињьяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / К. Черчињьяни. – М. : Мир, 1978. – 496 с.
4. Borovchenkova M.S. On the non-Markovian Enskog equation for granular gases / M.S. Borovchenkova, V.I. Gerasimenko // J. of Phys. A: Mathematical and Theoretical., 2014. – Vol. 47, N 3. – Article ID 035001.
5. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations / C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

6. Filbet F. Accurate Numerical Methods for the Collisional Motion of (Heated) Granular Flows / F. Filbet, L. Pareschi, G. Toscani // J. of Computational Phys., 2005. – Vol. 202. – P. 216–235.
7. Pareschi L. Implicit-Explicit Runge–Kutta Schemes for Stiff Systems of Differential Equations / L. Pareschi, G. Russo // Recent Trends in Numerical Analysis. – 2000. – P. 269–288.
8. Pareschi L. Numerical Solution of the Boltzmann Equation I: Spectrally Accurate Approximation of the Collision Operator / L. Pareschi, G. Russo // SIAM J. on Numerical Analysis, 2000. – Vol. 37, N 4. – P. 1217–1245.
9. Petrina D.Ya. Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy / D.Ya. Petrina. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008. – 400 p.
10. Toscani G. The Large-Time Behavior of Nonconservative Evolution Equations / G. Toscani // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. Seconda Università di Napoli, 2005. – Vol.16. – P. 145–320.
11. Strang G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes / G. Strang // SIAM J. on Numerical Analysis, 1968. – Vol. 5(3). – P. 506–517.

Надійшла до редколегії 24.12.19

И. Гапьяк, канд. физ.-мат. наук, ассист.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ ГАЗОВ

Для систем частиц с диссипативной взаимодействием рассмотрено обобщение классического уравнения Больцмана, а именно, кинетическое уравнение типа Больцмана для гранулированных газов. Построено численное решение задачи Коши для такого кинетического уравнения и исследована его устойчивость.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, гранулированные газы, многочисленные развязки, вычислительные схемы.

I. Gapyak, Ph. D., assist. prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE BOLTZMANN KINETIC EQUATION FOR GRANULAR GASES

For a system of particles with a dissipative interaction we consider the Boltzmann type kinetic equation for granular gases. A numerical solution of the Cauchy problem for the Boltzmann type kinetic equation is constructed in two dimensional space and its stability is investigated.

Keywords: the Boltzmann kinetic equation, granular gases, numerical solutions, computing schemes.

УДК 532.59

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.07.30-35>

О. Авраменко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
М. Луньова, асп.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна
E-mail: oavramenko777@gmail.com, luneva.mariya@ukr.net

МОДУЛЯЦІЙНА СТІЙКІСТЬ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Присвячено задачі про поширення слабконелінійних хвильових пакетів уздовж поверхонь контакту в тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою". Отримано умову розв'язності задачі в наближенні третього порядку, виведено еволюційне рівняння у формі нелінійного рівняння Шредінгера та умову модуляційної стійкості його розв'язків. Для розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю, представлено діаграму стійкості та її аналіз.

Ключові слова: тришарова гідродинамічна систем, хвильові пакети, модуляційна стійкість, нелінійне рівняння Шредінгера.

Вступ. Аналіз умов стійкості внутрішніх хвиль у рідких системах різної густини викликають великий інтерес як у теоретичному, так і практичному плані, а дослідження хвильових процесів у рідинах та їхніх загальних властивостей на сьогодні залишається актуальним. Уперше нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для слабконелінійних хвиль з дисперсією було отримане Бенні та Ньюеллом. НРШ для хвиль скінченної глибини було виведено Хасімото і Оно методом багатьох масштабів. Нелінійне рівняння еволюції у формі НРШ для різних двовимірних слабконелінійних гідродинамічних систем ідеальної рідини скінченної глибини були отримані в [3], [10] за допомогою того ж методу. Згодом Томас та ін. [14] вивели НРШ для поверхневих хвиль скінченної глибини з вихорами.

Найфе в статті [13] провів достатньо повний та розгорнутий аналіз хвильового руху і системі "півпростір–півпростір", методом багатомасштабних розвинень до третього порядку виведено еволюційне рівняння Шредінгера. Аналогічні дослідження про поширення хвильових пакетів у двохшарових гідродинамічних системах представлені у ряді праць, зокрема, для випадку "півпростір – шар з твердою кришкою" – у [4], для випадку "шар з твердим дном – шар з твердою кришкою" – у [5], для випадку "шар з твердим дном – шар" – у [6, 8]. Аналогічні підходи застосовані для дослідження поширення хвильових пакетів у тришаровій системі "шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою" у працях [11, 12]. Задача про поширення внутрішніх хвиль у тришаровій гідродинамічній системі "півпростір – шар – шар з твердою кришкою" розглядалася у [1, 7, 9], де отримано дисперсійне рівняння та його розв'язки, побудовано три лінійні наближення слабконелінійної задачі, отримано умову розв'язуваності задачі другого наближення, досліджено енергетичні характеристики та форму хвильових пакетів на поверхнях контакту.

Ця стаття є продовженням згаданих вище досліджень. Тут виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів та отримано умову модуляційної стійкості розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю.

1. Постановка задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів на поверхні нев'язкої нестисливої рідини під впливом сили тяжіння. Вважається, що хвилі поширюються вздовж осі x , а вертикальна вісь z спрямована в напрямку протилежному до напрямку дії сили тяжіння. Гідродинамічна система (рис. 1) складається з нижнього півпростору, середнього шару та верхнього шару з твердою кришкою $z = h_2 + h_3$. Середній шар обмежений поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = h_2 + \eta_2(x, t)$.