

## КООРДИНАТИ ТА ПІДСИЛЕННЯ КРИТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ГРАВІТАЦІЙНО-ЛІНЗОВИХ СИСТЕМАХ: ПОПРАВКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ОКОЛІ СИМЕТРИЧНОГО КАСПУ

*Знайдені та проаналізовані поправки до аналітичних асимптотичних формул, що описують координати та підсилення критичних зображень точкового джерела у околі каспу каустики. Показано, що у випадку, коли лінзове відображення є симетричним відносно осі каспу, поправки першого порядку тождивно дорівнюють нулю. Для цього випадку знайдені вирази поправок другого порядку. Як ілюстрацію розглянуто модель лінзи Чанг-Рефсдала. Продемонстровано, що врахування поправок другого порядку дозволяє значно розширити окіл, в якому асимптотичні формули мають задану точність.*

*Ключові слова: гравітаційно-лінзові системи, модель лінзи Чанг-Рефсдала.*

**1. Вступ.** Ефекти гравітаційного лінзування дають принципову змогу отримувати унікальні дані (про розподіли мас у Всесвіті та структуру джерел випромінювання), які часто є недоступними для прямих астрономічних спостережень. В даній роботі розглянуто задачу про гравітаційне лінзування для тих випадків, коли джерело випромінювання знаходиться в околі каустичної кривої. Відповідні спостережувані ефекти несуть важливу астрофізичну інформацію, оскільки саме в цих випадках відбувається найбільш інтенсивний вплив гравітаційного поля лінзи на пучок променів [1]. Каустична крива – це проекція на площину джерела критичної кривої лінзового відображення, тобто множини сингулярних точок, в яких якобіан обертається в нуль, а відображення втрачає взаємну однозначність. Саме перетин джерелом каустичної кривої супроводжується найбільш виразним ефектом – появою (зникненням) двох додаткових зображень джерела. При макролінзуванні взаємне розташування зображень, їх відносні інтенсивності та часи затримки можна пов'язати з положенням джерела відносно макрокаустики (див. напр. [2,3]). При мікролінзуванні сумарний потік від усіх мікрозображень змінюється протягом місяців і навіть тижнів, при цьому його найбільш швидкі і значні зміни пов'язуються саме з проходженням джерела в околі мікрокаустики (див. напр. [4,5]). Передбачається, що у недалекому майбутньому стане можливим спостерігати так зване астрометричне мікролінзування, при цьому можливі навіть стрибки зображень при перетині каустики [6].

Сучасний рівень обчислювальної техніки дає широкі можливості для вивчення різноманітних цікавих сценаріїв гравітаційного лінзування, а також статистичних оцінок впливу тих чи інших параметрів. Але він також дозволяє проводити аналітичні дослідження, здійснення яких у ручному режимі було би практично неможливим, і які дозволяють знаходити залежності спостережуваних величин від параметрів гравітаційно-лінзової системи.

В околі каустики вплив гравітації на пучок променів дуже швидко змінюється з координатами. Тому необхідно спочатку знайти відповідні формули для точкового джерела, а для протяжних джерел їх отримують інтегруванням по площі джерела. Звичайно, ця друга частина не завжди може бути проведена аналітично навіть із застосуванням спеціальних функцій. Що стосується формул для точкового джерела, то вони можуть використовуватися безпосередньо у випадку достатньо малих джерел.

Добре відомо, що для гладких відображень одного двовимірного многовиду на інший стійкими до малих збурень є критичні точки лише двох типів – складки та зборки. Каустика є замкненою кривою, яка є гладкою за можливим винятком окремих особливих точок, так званих каспів (рогів). Регулярні точки відповідають складкам, а каспи – зборкам. Точки всередині каустики мають на два зображення більше, ніж ті, що ззовні. Коли джерело наближається до складки (зборки) з внутрішнього боку, два (три) зображення прямують до критичної точки, а підсилення кожного з них формально прямує до нескінченності. Зображення, які таким чином пов'язані з критичними точками, називають критичними. Після перетину джерелом каустики, два критичні зображення зникають.

У роботах, які можна вважати класичними, були знайдені наближені координати критичних зображень у околах складок і каспів, а також формули для коефіцієнта підсилення [1]. Ці формули мають характер асимптотичних співвідношень, які виконуються тим точніше, чим ближче джерело до каустики. Але ці формули не дають уяви про їх точність. У подальшому були розроблені підходи, які дозволили будувати послідовні наближення за степенями допоміжного параметра, який характеризує близькість джерела до каустики. При цьому класичні результати можна розглядати як нульове наближення.

Задача оцінки та підвищення точності асимптотичних формул обговорювалася продовж значного часу [7-10]. Вона набула особливої актуальності, коли при моделюванні конкретних позагалактичних гравітаційно-лінзових систем з'ясувалися значні відхилення спостережуваних потоків, що відповідають різним зображенням, від очікуваних за формулами – так звана проблема аномальних відношень потоків. Ця проблема стимулювала знаходження поправок першого порядку до асимптотичних формул у околі складки [3] і каспу [2].

Поправки другого порядку, які мають місце в околі складки за відсутності неперервної матерії біля променя зору, були отримані у роботах [11, 12]. Важливість їх врахування в задачах мікролінзування була продемонстрована в роботах [13, 4]. В роботі [14] ці результати були узагальнені на випадок присутності в лінзі біля променя зору неперервної матерії. У роботі [15] ми знайшли поправки першого порядку для випадку, коли точкове джерело знаходиться в околі каспу. При цьому вирази, раніше отримані в роботі [16], були уточнені і перетворені до більш явного вигляду.

У цій роботі ми продовжуємо дослідження поправок до асимптотичних формул, які стосуються околів каспу. В наступному розділі сформульовано вихідні співвідношення, введено параметр близькості до каустики та введено систему лінзових рівнянь у другому наближенні. У третьому розділі подано вирази для поправок першого порядку. Далі, в четвертому розділі ми показуємо, що поправки першого порядку обумовлені асиметрією лінзового відображення відносно віддзеркалення від осі каспу. Отже, для симетричного каспу вони тождивно обертаються на нуль. Для цього випадку ми знаходимо аналітичні вирази для поправок другого порядку. У п'ятому розділі на прикладі лінзи Чанг-Рефсдала ми демонструємо, наскільки врахування цих поправок поліпшує точність формули для коефіцієнта підсилення.

**2. Виведення другого наближення до рівнянь гравітаційного лінзування поблизу зборки.** Нормоване рівняння гравітаційного лінзування зіставляє кожній точці  $\mathbf{x}$  в площині зображень точку  $\mathbf{y}$  в площині джерела і має такий вид [1]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \nabla\Phi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де  $\Phi(\mathbf{x})$  – потенціал гравітаційного лінзування. У загальному випадку одному положенню точкового джерела відповідає декілька зображень  $\mathbf{X}^{(l)}(\mathbf{y})$  –розв'язків рівняння (1). Потенціал  $\Phi(\mathbf{x})$  задовольняє рівнянню  $\Delta\Phi = 2k$ , де  $k(\mathbf{x})$  – густина неперервної матерії на промені зору, нормована на так звану критичну густину.

Коефіцієнт підсилення кожного окремого зображення дорівнює  $K^{(l)}(\mathbf{y}) = 1/|J(\mathbf{X}^{(l)}(\mathbf{y}))|$ , де  $J(\mathbf{x}) = |D(\mathbf{y})/D(\mathbf{x})|$  – якобіан відображення площини зображень на площину джерел; індексом у дужках позначено номер розв'язку.

Нагадаємо, що критичні криві відображення (1) визначаються рівнянням  $J(\mathbf{x}) = 0$ . Каустика – це образ критичної кривої при відображенні (1). Стейкі критичні точки диференційованих відображень двовимірних многовидів бувають лише двох типів: складки і зборки.

У стандартному підході до розгляду околу каустики, потенціал поблизу точки  $p_{cr}$  критичної кривої апроксимується поліномом Тейлора. При цьому лінзове відображення можна дещо спростити, обертаючи систему координат на площині джерел так, щоб вісь абсцис була дотичної до каустики. Вважаємо, що розглядувана точка  $p_{cr}$  знаходиться в початку координат площини зображень, а її образ – в початку координат площини джерела; при цьому  $|y_2|$  визначає відстань до дотичної до каустики, а  $y_1$  – зсув уздовж цієї дотичної. Коли точка  $p_{cr}$  є каспом, вісь  $y_1$  – це спільна на границя дотичних до двох гілок каустики, яку ми називаємо віссю каспу.

Випишемо с достатньою точністю загальний розклад рівняння (1), а далі отримаємо частинні випадки. Введемо позначення:  $k_0 \equiv k(0)$ ,  $\sigma \equiv 1 - k_0$ . У координатах, що адаптовані до точки на каустиці маємо:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sigma x_1 - \Phi_{,111} x_1^2/2 - \Phi_{,122} x_2^2/2 - \Phi_{,112} x_1 x_2 - \Phi_{,1111} x_1^3/6 - \Phi_{,1122} x_1 x_2^2/2 - \Phi_{,1222} x_2^3/6 - \Phi_{,1112} x_1^2 x_2/2 - \\ &- \Phi_{,1222} x_2^4/24 - \Phi_{,11122} x_1^2 x_2^2/4 - \Phi_{,11222} x_1 x_2^3/6 - \Phi_{,11112} x_1^3 x_2/6 - \Phi_{,11111} x_1^4/24 + \dots \\ y_2 &= -\Phi_{,112} x_1^2/2 - \Phi_{,222} x_2^2/2 - \Phi_{,122} x_1 x_2 - \Phi_{,1112} x_1^3/6 - \Phi_{,1222} x_1 x_2^2/2 - \Phi_{,2222} x_2^3/6 - \Phi_{,1122} x_2 x_1^2/2 - \\ &- \Phi_{,2222} x_2^4/24 - \Phi_{,11222} x_1^2 x_2^2/4 - \Phi_{,11112} x_1^4/24 - \Phi_{,11222} x_1 x_2^3/6 - \Phi_{,11122} x_1^3 x_2/6 - \Phi_{,22222} x_2^5/120 + \dots \end{aligned}$$

Введемо такі скороченні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\Phi_{,111}/2; \quad a_2 = \Phi_{,122}/2; \quad b_1 = \Phi_{,222}/2; \quad b_2 = -\Phi_{,112}/2; \quad c_1 = \Phi_{,1122}/6; \quad c_2 = -\Phi_{,2222}/6; \\ c_3 &= -\Phi_{,1111}/6; \quad d_1 = \Phi_{,1222}/6; \quad d_2 = -\Phi_{,1112}/6; \quad g_1 = -\Phi_{,12222}/24; \quad g_2 = \Phi_{,11122}/24; \\ g_3 &= -\Phi_{,11111}/24; \quad f_1 = \Phi_{,11222}/24; \quad f_2 = -\Phi_{,11112}/24; \quad f_3 = -\Phi_{,22222}/24; \quad h = -\Phi_{,22222}/120. \end{aligned} \quad (2)$$

Для повноти можна також нагадати, що координати вибрані таким чином, що на початку координат  $\Phi_{,11} = 2k_0 - 1$ ,  $\Phi_{,12} = 0$ ,  $\Phi_{,22} = 1$ .

В цих позначеннях розклад рівняння (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sigma x_1 + a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 + 2b_2 x_1 x_2 + c_3 x_1^3 - 3c_1 x_1 x_2^2 - d_1 x_2^3 + 3d_2 x_1^2 x_2 + g_1 x_2^4 - \\ &- 6g_2 x_1^2 x_2^2 - 4f_1 x_1 x_2^3 + 4f_2 x_1^3 x_2 + g_3 x_1^4 + \dots \\ y_2 &= b_2 x_1^2 - b_1 x_2^2 - 2a_2 x_1 x_2 + d_2 x_1^3 - 3d_1 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3 - 3c_1 x_2 x_1^2 + f_3 x_2^4 - \\ &- 6f_1 x_1^2 x_2^2 + f_2 x_1^4 + 4g_1 x_1 x_2^3 - 4g_2 x_1^3 x_2 + h x_2^5 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Позначення (2) введені таким чином, що, аби отримати рівняння за умови сталості густини  $k(\mathbf{x}) \equiv k_0$  достатньо відкинути індекси біля коефіцієнтів, тобто покласти  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = c_2$ ,  $d_1 = d_2$ ,  $g_1 = g_2 = g_3$ ,  $f_1 = f_2 = f_3$ . Точніше, з урахуванням рівняння для потенціалу маємо:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= k_{,1}; \quad b_1 - b_2 = k_{,2}; \quad c_1 - c_2 = \frac{1}{3}k_{,22}; \quad c_1 - c_3 = \frac{1}{3}k_{,11}; \quad d_1 - d_2 = \frac{1}{3}k_{,12}; \\ g_2 - g_1 &= \frac{1}{12}k_{,122}; \quad g_2 - g_3 = \frac{1}{12}k_{,111}; \quad f_1 - f_2 = \frac{1}{12}k_{,112}; \quad f_1 - f_3 = \frac{1}{12}k_{,222}. \end{aligned}$$

Умова того, що точка  $\mathbf{x} = 0$  є каспом – це  $b_1 = 0$ . Параметр близькості у цьому разі вводиться такими співвідношеннями:  $y_1 = t^2 \tilde{y}_1$ ,  $y_2 = t^3 \tilde{y}_2$ ,  $x_1 = t^2 \tilde{x}_1$ ,  $x_2 = t \tilde{x}_2$ . Після підстановки в рівняння (3) з точністю до квадратичних складових знаходимо:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 2\sigma \tilde{x}_1 - a_2 \tilde{x}_2^2 + (2b_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - d_1 \tilde{x}_2^3) \cdot t + (a_1 \tilde{x}_1^2 - 3c_1 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 + g_1 \tilde{x}_2^4) \cdot t^2 + \dots \\ \tilde{y}_2 &= -2a_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + c_2 \tilde{x}_2^3 + (b_2 \tilde{x}_1^2 - 3d_1 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 + f_3 \tilde{x}_2^4) \cdot t + (-3c_1 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 + 4g_1 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^3 + h \tilde{x}_2^5) \cdot t^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Це є рівняння другого наближення в околі каспу. У цьому разі модель лінзи характеризується параметрами  $a_1, a_2, b_2, c_1, c_2, d_1, f_3, g_1, h$ . У подальшому ми будемо відкидати більшість індексів біля параметрів, вважаючи:  $a = a_2, b = b_2, c = c_2, d = d_1, f = f_3, g = g_1$ .

**3. Наближення першого порядку для координат та підсилення критичних зображень в околі каспу.** З формул (4) знаходимо, що з точністю до членів першого порядку лінзові рівняння у околі каспу приймають вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 2\sigma\tilde{x}_1 - a\tilde{x}_2^2 + (2b\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - d\tilde{x}_2^3) \cdot t, \\ \tilde{y}_2 &= -2a\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + c\tilde{x}_2^3 + (b\tilde{x}_1^2 - 3d\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + f\tilde{x}_2^4) \cdot t. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язки шукаємо у вигляді:  $\tilde{x}_1 = x_{10} + tx_{11}, \tilde{x}_2 = x_{20} + tx_{21}$ . В основі побудови розв'язків лежить рівняння третього порядку для  $x_{20}$ :

$$Cx_{20}^3 - a\tilde{y}_1x_{20} - \sigma\tilde{y}_2 = 0, \quad (6)$$

де  $C = c\sigma - a^2$ .

Рівняння (6) має один чи три дійсних корені в залежності від знака виразу  $Q = \frac{\tilde{y}_2^2\sigma^2}{4C^2} - \frac{a^3\tilde{y}_1^3}{27C^3}$ . Один дійсний корінь, коли  $Q > 0$ ; три дійсних кореня, коли  $Q \leq 0$  (два з них збігаються, коли  $Q = 0$ ). На осі  $y_2 = 0$  маємо один тривіальний корінь  $x_{20}^{(1)} = 0$  і ще два дійсні корені  $x_{20}^{(2,3)} = \pm\sqrt{a\tilde{y}_1/C}$ , які існують на тій півосі, де  $a(\sigma c - a^2)y_1 > 0$ . Явні вирази розв'язків рівняння (6), тобто нульове наближення для другої координати зображень  $x_{20}$ , даються відомими формулами Кардано.

Для першої координати зображень у нульовому порядку знаходимо:

$$x_{10} = \frac{1}{2\sigma}(\tilde{y}_1 + ax_{20}^2). \quad (7)$$

Перейдемо до розгляду поправок першого порядку. Ми не зупинялися тут на проміжних формулах, які аналогічні тим, що подані в [16], і децю їх уточнюють [15]. Наводимо одразу кінцеві спрощені вирази для поправок, які можна перевірити підставленням у рівняння (5). Отже маємо:

$$x_{11} = \frac{CB_1\tilde{y}_2x_{20}^2 + A_1\tilde{y}_1^2x_{20} + A_2\tilde{y}_1\tilde{y}_2}{4\sigma C^2E}, \quad (8)$$

$$x_{21} = \frac{B_1\tilde{y}_1x_{20}^2 + B_2\tilde{y}_2x_{20} + Cb\tilde{y}_1^2}{4\sigma CE}, \quad (9)$$

де введені позначення:

$$E = a\tilde{y}_1 - 3Cx_{20}^2, \quad (10)$$

$$A_1 = \sigma a(5bc^2 - 10acd + 4a^2f), \quad (11)$$

$$A_2 = a^4b - 2\sigma a^2bc + \sigma^2(6bc^2 - 10acd + 4a^2f), \quad (12)$$

$$B_1 = 6\sigma abc - a^3b - 4\sigma a^2d - 6\sigma^2cd + 4\sigma^2af, \quad (13)$$

$$B_2 = \sigma(5a^2b - 10\sigma ad + 4\sigma^2f), \quad (14)$$

Для складових якобіана  $\tilde{J} = t^2(J_0 + tJ_1)$  знаходимо такі вирази:

$$J_0 = -2E, \quad (15)$$

$$J_1 = \frac{I_1(3Cx_{20}^2 + a\tilde{y}_1)\tilde{y}_2 + I_2x_{20}\tilde{y}_1^2}{CE}, \quad (16)$$

де

$$I_1 = a^2b + \sigma(10ad - 6bc) - 4\sigma^2f, \quad (17)$$

$$I_2 = 16a^3d - 8a^2bc - \sigma(6acd - 3bc^2 + 4a^2f). \quad (18)$$

Підсилення окремого зображення у цьому наближенні дається наступним виразом:

$$K = \frac{1}{|J|} = \frac{1}{t^2} \frac{1}{|J_0 + tJ_1|} = \frac{1}{t^2|J_0|} \left(1 - t \frac{J_1}{J_0}\right). \quad (19)$$

При отриманні останньої рівності ми врахували, що для достатньо малих  $t$  маємо  $|tJ_1/J_0| < 1$ .

**4. Наближення другого порядку у випадку локально симетричного каспу.** Важливою особливістю каспів є та обставина, що поправки першого порядку, які були розглянуті в попередньому підрозділі, пов'язані виключно з асиметрією лінзового відображення відносно віддзеркалення  $y_2 \rightarrow -y_2$ . Будемо називати лінзу локально симетричною в околі каспу, коли з потрібною точністю виконуються такі умови:

$$y_1(x_1, -x_2) = y_1(x_1, x_2), \quad y_2(x_1, -x_2) = -y_2(x_1, x_2). \quad (20)$$

З рівнянь (4) неважко побачити, що за цих умов

$$b = d = f = 0 \quad (21)$$

і всі доданки першого порядку за  $t$  взагалі відсутні.

При виконанні умов (21) усі поправки першого порядку тотожно дорівнюють нулю і на перший план виходять поправки другого порядку по  $t$ . Рівняння (4) у цьому випадку приймає такий вигляд:

$$\tilde{y}_1 = 2\sigma\tilde{x}_1 - a\tilde{x}_2^2 + (a_1\tilde{x}_1^2 - 3c_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + g\tilde{x}_2^4) \cdot t^2 + \dots \quad (22)$$

$$\tilde{y}_2 = -2a\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + c\tilde{x}_2^3 + (-3c_1\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 4g\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3 + h\tilde{x}_2^5) \cdot t^2 + \dots$$

Розв'язки шукаємо у вигляді:  $\tilde{x}_1 = x_{10} + t^2x_{12}$ ,  $\tilde{x}_2 = x_{20} + t^2x_{22}$ . Для поправок знаходимо такі вирази:

$$x_{12} = \frac{1}{8\sigma^3C^2E} (A_3x_{20}^2\tilde{y}_1^2 + A_4x_{20}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + A_5\tilde{y}_2^2 - C^2aa_1\tilde{y}_1^3), \quad (23)$$

$$A_3 = -a^6a_1 + 3\sigma a^4a_1c - 3\sigma^2a^2a_1c^2 + \sigma^3(24a^2cg + 8a^3h - 18ac^2c_1 + 3a_1c^3), \quad (24)$$

$$A_4 = \sigma a^5a_1 - 3\sigma^2a^3a_1c + 6\sigma^3(2a^3g - 3a^2cc_1 + aa_1c^2) + 2\sigma^4(18acg + 8a^2h - 9c^2c_1), \quad (25)$$

$$A_5 = -\sigma^2a^4a_1 + 3\sigma^3a^2a_1c + 6\sigma^4(2a^2g - 3acc_1) + 4\sigma^5(3cg + 2ah). \quad (26)$$

Для другої координати знаходимо:

$$x_{22} = \frac{1}{4\sigma C^2E} (CB_3x_{20}^2\tilde{y}_2 + B_4x_{20}\tilde{y}_1^2 + B_5\tilde{y}_1\tilde{y}_2), \quad (27)$$

$$B_3 = a^3a_1 - 9\sigma a^2c_1 + 12\sigma^2a g_1 + 4\sigma^3h, \quad (28)$$

$$B_4 = \sigma(-6a^2cc_1 + aa_1c^2 + 4a^3g) + \sigma^2(8acg + 4a^2h - 3c^2c_1), \quad (29)$$

$$B_5 = -a^4a_1 + \sigma(3a^3c_1 + 2a^2a_1c) + 4\sigma^2(-3acc_1 + a^2g) + 4\sigma^3(ah + 2cg), \quad (30)$$

Нарешті, для поправки другого порядку до якобіану отримуємо:

$$J_2 = \frac{1}{2\sigma^2CE} (I_3x_{20}^2y_1^2 + I_4x_{20}y_1y_2 + I_5y_1^3 + I_6y_2^2), \quad (31)$$

$$I_3 = a^5a_1 + \sigma(3a^4c_1 - 2a^3a_1c) + 3\sigma^2(14a^2cc_1 - aa_1c^2 - 16a^3g) - \sigma^3(16a^2h + 9c^2c_1), \quad (32)$$

$$I_4 = -\sigma a^4a_1 + 3\sigma^2(3a^3c_1 + 2a^2a_1c) + 6\sigma^3(18acc_1 - 3a_1c^2 - 22a^2g) - 4\sigma^4(13ah + 6cg), \quad (33)$$

$$I_5 = -C(a^2a_1 + 3\sigma a c_1), \quad (34)$$

$$I_6 = 9\sigma^2(a^3a_1 + \sigma(3a^2c_1 - 2aa_1c) - 6\sigma^2(2ag - cc_1) - 4\sigma^3h). \quad (35)$$

Відповідна поправка до коефіцієнта підсилення дається формулою (19) із заміною  $tJ_1 \rightarrow t^2J_2$ .

**5. Приклад: лінза Чанг-Рефсдала.** Аби оцінити наскільки значущим є внесок поправок другого порядку порівняємо знайдені наближені вирази для підсилення з точними значеннями для моделі, яка допускає повний аналітичний розгляд. Модель Чанг-Рефсдала описує гравітаційну лінзу, яка утворюється точковою масою та великомасштабним зовнішнім гравітаційним полем. Останнє характеризується параметром зсуву  $\gamma$ . Будемо вважати  $\gamma < 1$ . Рівняння лінзи у координатах, початок яких співпадає з положення маси (центровані координати позначаємо "кришкою") і які перенормовані на масу, має вид:

$$\hat{y}_1 = (1+\gamma)\hat{x}_1 - \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}, \quad \hat{y}_2 = (1-\gamma)\hat{x}_2 - \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}. \quad (36)$$

Відповідний потенціал дається таким виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - \frac{1}{2} \gamma (\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2).$$

Точне значення якобіана відображення (36):

$$J = 1 - \gamma^2 - \frac{1 + 2\gamma(\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2)}{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^2}. \quad (37)$$

Критична крива визначається рівнянням:  $J(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ . Форма критичної кривої, а також і каустики для цієї лінзи добре відомі. Каспові критичні точки – це точки перетину критичної кривої з координатними осями. Як приклад будемо розглядати точку з координатами:  $\hat{x}_1 = (1-\gamma)^{-1/2}$ ,  $\hat{x}_2 = 0$ . Відповідна точка на каустиці лежить на осі  $\hat{y}_2 = 0$  і має координату  $\hat{y}_1 = 2\gamma/\sqrt{1-\gamma}$ . Перенесенню початку координат у цю каспову точку відповідають такі перетворення координат:

$$x_1 = \hat{x}_1 - (1-\gamma)^{-1/2}, \quad x_2 = \hat{x}_2; \quad y_1 = \hat{y}_1 - 2\gamma(1-\gamma)^{-1/2}, \quad y_2 = \hat{y}_2$$

В цій моделі немає неперервної матерії в околі променя зору, отже  $\sigma = 1$ ,  $a_1 = a$ ,  $c_1 = c$ . Умови симетрії каспу (20) виконуються. Далі неважко знайти відповідні значення коефіцієнтів  $a, c, g, h$ . Маємо:

$$a = -(1-\gamma)^{3/2}, \quad c = (1-\gamma)^2, \quad g = -(1-\gamma)^{5/2}, \quad h = -(1-\gamma)^3, \quad C = \gamma(1-\gamma)^2. \quad (38)$$

На базі цих формул можна знайти вирази для коефіцієнтів усіх раніше отриманих поправок. Тут ми обмежуємося коефіцієнтами поправки для підсилення. Знаходимо:

$$I_3 = a^6 + a^4c + 39a^2c^2 - 48a^3g - 16a^2h - 9c^3 = \gamma(1-\gamma)^6(4 - 4\gamma - \gamma^2), \quad (39)$$

$$I_4 = -a^5 + 15a^3c + 90ac^2 - 132a^2g - 52ah - 24cg = \sqrt{1-\gamma} \left[ (1-\gamma)^7 - 15(1-\gamma)^6 + 42(1-\gamma)^5 - 28(1-\gamma)^4 \right], \quad (40)$$

$$I_5 = a^5 + 2a^3c - 3ac^2 = \sqrt{1-\gamma} \left[ -(1-\gamma)^7 - 2(1-\gamma)^6 + 3(1-\gamma)^5 \right], \quad (41)$$

$$I_6 = 9(a^4 + a^2c - 12ag - 4h + 6c^2) = 9 \left[ (1-\gamma)^6 + (1-\gamma)^5 - 6(1-\gamma)^4 - 4(1-\gamma)^3 \right]. \quad (42)$$

Розглянемо ситуацію, коли точкове джерело знаходиться на осі  $y_2 = 0$ . У цьому випадку рівняння для  $x_{20}$  приймає такий вид  $Cx_{20}^3 - ay_1x_{20} = 0$  і має три розв'язки:  $x_{20}^{(1)} = 0$ ,  $x_{10}^{(1)} = \frac{y_1}{2}$ ;  $x_{20}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{a}{C}} y_1$ ,  $x_{10}^{(2,3)} = \frac{c}{2C} y_1$ . Індeksi в дужках показують номери розв'язків.

Для якобіанів знаходимо такі вирази. Для першого розв'язку:

$$J_0^{(1)}(y_1) = 2(1-\gamma)\sqrt{1-\gamma} \cdot y_1, \quad J_2^{(1)}(y_1) = -\frac{1}{2}(1-\gamma)^2(4-\gamma) \cdot y_1^2. \quad (43)$$

Для другого та третього розв'язків:

$$J_0^{(2,3)}(y_1) = -4(1-\gamma)\sqrt{1-\gamma} \cdot y_1, \quad J_2^{(2,3)} = -\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} y_1^2. \quad (44)$$

Поряд з точним значенням коефіцієнта підсилення кожного із зображень, яке дорівнює  $K^{(l)} = 1/|J^{(l)}|$ , будемо розглядати його наближенні значення у нульовому та другому наближеннях:

$$K_0^{(l)} = 1/|J_0^{(l)}| \quad \text{і} \quad K_2^{(l)} = 1/|J_0^{(l)} + J_2^{(l)}| \approx \left(1 - J_2^{(l)}/J_0^{(l)}\right) / |J_0^{(l)}|.$$

Потрібно звернути увагу, що, на відміну від інших величин, які розглядалися вище, і які фактично ототожнювалися зі своїми наближеними значеннями (при цьому індексами позначалися відповідні поправки), для коефіцієнта підсилення ми розрізняємо точне значення  $K$  і друге наближення, яке позначено символом  $K_2$ .

Цікаво відзначити, що у розглядуваному прикладі різниця  $\Delta K^{(l)} = K_2^{(l)} - K_0^{(l)}$  не залежить від координати джерела:  $\Delta K^{(1)} = \pm(4-\gamma)/8(1-\gamma)$  (лише знак цього виразу співпадає із знаком  $y_1$ ),  $\Delta K^{(2,3)} = 1/16\gamma(1-\gamma)$ .

На рис. 1 подано порівняння точного та наближених значень коефіцієнта підсилення для першого зображення в залежності від положення джерела на осі  $y_1$ . На наступному рис. 2 подане те ж саме для другого і третього зображень. Зауважимо, що в останньому випадку точне значення якобіана збігається з його другим наближенням  $J^{(2,3)} = J_0^{(2,3)} + J_2^{(2,3)}$ . Відмінність між  $K$  та  $K_2$  на рис. 2 обумовлена розкладанням в ряд з точністю до  $J_2/J_0$ .

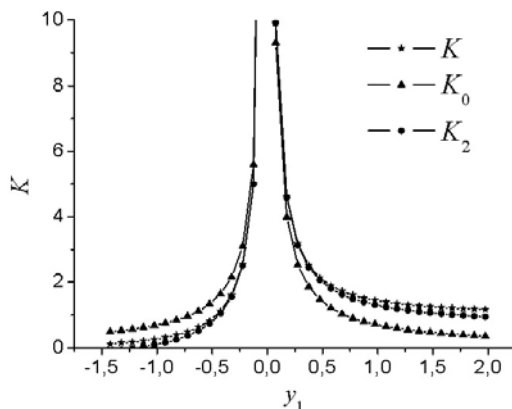


Рис. 1. Порівняння точного і наближених значень коефіцієнта підсилення першого зображення джерела (лінза Чанг-Рефсдала з  $\gamma = 0.3$ )

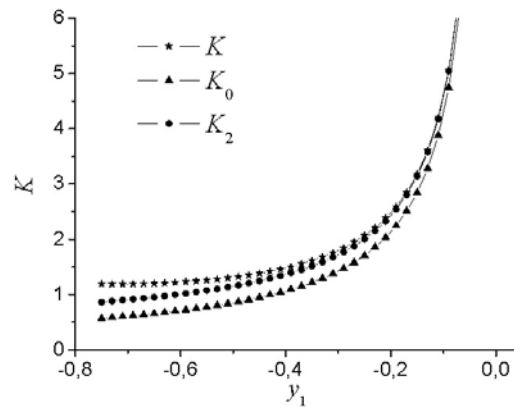


Рис. 2. Те ж саме для другого і третього зображень, які існують лише, коли джерело знаходиться у середині каустики ( $y_1 < 0$ )

Відносний внесок поправок залежить звичайно від значення параметра  $\gamma$ . Тому розглянемо це питання трохи більш детально. Аби чисельно охарактеризувати точність наближених формул для підсилення введемо відношення

$$\delta_{0,2}(\gamma_1) = |K(\gamma_1) - K_{0,2}(\gamma_1)| / K(\gamma_1) \tag{45}$$

Для ілюстрації в табл. 1 подані значення цих величин у випадку першого зображення і чотирьох значень координат джерела та значень параметра  $\gamma$  у діапазоні від 0.1 до 0.9. З таблиці видно, що нульове наближення  $K_0$  є застосовним, наприклад, з п'ятивідсотковою точністю, лише приблизно в діапазоні  $-0.1 \leq \gamma_1 \leq 0.1$  при  $\gamma > 0.6$ . Область застосовності наближених формул доцільно порівнювати з розміром каустики, для цього у другому стовпчику наведені значення координати  $\tilde{y}_{c1}$  каспу відносно центру каустики (тобто половинний розмір каустики вздовж цієї координати). У двох останніх стовпчиках подано границі інтервалів  $y_{1(-)}(\gamma) \leq y_1 \leq y_{1(+)}(\gamma)$ , в яких похибка другого наближення менша за п'ять відсотків,  $\delta_2(\gamma_1) < 5\%$ .

**Таблиця 1.** Відносна точність нульового та другого наближень для підсилення першого зображення в залежності від координати джерела і значень параметра  $\gamma$

$\gamma$	$\tilde{y}_{c1}$	$\delta_0(-0.2) \setminus \delta_2(-0.2)$ (%)	$\delta_0(-0.1) \setminus \delta_2(-0.1)$ (%)	$\delta_0(0.1) \setminus \delta_2(0.1)$ (%)	$\delta_0(0.2) \setminus \delta_2(0.2)$ (%)	$y_{1(-)}$	$y_{1(+)}$
0.1	0.211	20.94 \ 1.43	9.84 \ 0.325	8.71 \ 0.27	16.43 \ 0.97	-0.34	0.53
0.2	0.447	19.15 \ 1.10	9.01 \ 0.25	8.02 \ 0.21	15.17 \ 0.75	-0.38	0.62
0.3	0.717	17.35 \ 0.82	8.19 \ 0.19	7.33 \ 0.16	13.89 \ 0.57	-0.44	0.74
0.4	1.033	15.52 \ 0.59	7.35 \ 0.13	6.23 \ 0.11	12.60 \ 0.42	-0.50	0.90
0.5	1.414	13.66 \ 0.40	6.50 \ 0.09	5.90 \ 0.08	11.27 \ 0.29	-0.59	1.13
0.6	1.897	11.75 \ 0.26	5.62 \ 0.06	5.15 \ 0.05	9.89 \ 0.20	-0.71	1.44
0.7	2.556	9.76 \ 0.16	4.69 \ 0.04	4.36 \ 0.03	8.40 \ 0.12	-0.88	1.92
0.8	3.578	7.62 \ 0.08	3.69 \ 0.02	3.47 \ 0.02	6.74 \ 0.07	-1.17	2.73
0.9	5.692	5.12 \ 0.03	2.50 \ 0.01	2.40 \ 0.01	4.70 \ 0.03	-1.79	4.46

**6. Висновки.** Ми розглянули задачу підвищення точності асимптотичних формул для координат критичних зображень та їх підсилення в околі каспових критичних точок. Для загального рівняння гравітаційного лінзування ми знайшли аналітичні вирази для поправок першого порядку (8-14, 16-19) за степенями параметра близькості. Ці вирази записано через коефіцієнти тейлорівського розкладу лінзового потенціалу (2) та корені кубічного рівняння (6), яке визначає координати критичних зображень у нульовому наближенні. У багатьох випадках лінзове відображення в околі каспу з достатньою точністю є симетричним відносно осі каспу (20). У такому випадку всі поправки першого порядку тотожно дорівнюють нулю, і для нього ми знайшли поправки другого порядку (23-35). Аби проілюструвати роль цих поправок ми розглянули модель Чанг-Рефсдала і показали, що їх врахування дозволяє розширити окіл каспу, в якому асимптотичні формули мають задану точність.

**Список використаних джерел:**

- Schneider P., Ehlers J., Falco E. E. Gravitational Lenses. – Berlin: Springer, 1992.
- Keeton C.R., Gaudi B.S., Petters A.O. Identifying lenses with small-scale structure. I. Cusp lenses // *Astrophys. J.* – 2003. – Vol. 598. – P. 138–161.
- Keeton C.R., Gaudi B.S., Petters A.O. Identifying lenses with small-scale structure.II. Fold lenses // *Astrophys. J.* – 2005. – Vol. 635. – P. 35–59.
- Alexandrov A.N., Zhdanov V.I. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554; arXiv:1006.5903. 2010.
- Zhdanov V.I., Alexandrov A.N. Fedorova E.V., Sliusar V.M. Analytical methods in gravitational microlensing // *ISRN Astronomy and Astrophysics.* – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 906951, doi:10.5402/2012/906951.
- Федорова О.В., Жданов В.І., Александров О.М. Стрибки зображення джерела при перетині каустики в гравітаційній лінзі Чанга-Рефсдала // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2003. – Вип. 39–40. – С. 108–111.
- Fluke C.J., Webster R.L. Investigating the geometry of quasars with microlensing // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* – 1999. – Vol. 302. – P. 68–74.
- Александров О.М., Жданов В.І., Федорова О.В. Аналітичні співвідношення для гравітаційно-лінзового відображення в околі критичної кривої // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2003. – Вип. 39–40. – С. 52–59.
- Fedorova E.V., Alexandrov A.N., Zhdanov V.I. High amplification microlensing events and source structure in Q2237+030 // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2005. – Вип. 41–42. – С. 49–54.
- Pejcha O., Heyrovsky D. Extended-source effect and chromaticity in two-point-mass microlensing // *Astrophys. J.* – 2009. – Vol. 690. – P. 1772-1796.
- Александров О.М. Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2007. – № 44. – С. 21–29.
- Александров О., Жданов В. Коефіцієнт підсилення блиску малого гаусівського джерела поблизу каустики гравітаційної лінзи // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2009. – № 45. – С. 4–8.
- Alexandrov A.N., Zhdanov V.I., Fedorova E.V. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic // *Astronomy Letters.* – 2010. – Vol. 36, №5. – P. 329-337.
- Александров О.М., Жданов В.І., Коваль С.М. Асимптотичні формули для подій сильного мікролінзування з урахуванням темної матерії // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* – 2012. – № 49. – С. 16–19.
- Alexandrov A. N., Koval S.M., Zhdanov V.I. Gravitational lens equation: critical solutions and magnification near folds and cusps // *Advances in Astronomy and Space Physics.* – 2012. –Vol. 2, Is. 2. – P. 184-187.
- Congdon A.B., Keeton C.R., Nordgren C.E. Analytic relations for magnifications and time delays in gravitational lenses with fold and cusp configurations // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* – 2008. – Vol. 389. – P. 398–406.

Надійшла до редколегії 15.02.13

О. Александров, канд. физ.-мат. наук, В. Жданов, д-р физ.-мат. наук, проф., С. Коваль, студ. КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

**КООРДИНАТЫ И УСИЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ГРАВИТАЦИОННО-ЛИНЗОВЫХ СИСТЕМАХ: ПОПРАВКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ СИММЕТРИЧНОГО КАСПА**

*Найденны и проанализированы поправки к аналитическим и асимптотическим формулам, описывающим координаты и усиление критических изображений точечного источника в окрестности каспа каустики. Показано, что в случае, когда Размытие при малой глубине отражения является симметричным относительно оси каспа, поправки первого порядка тождественно равны нулю. Для этого случая найдены выражения поправок второго порядка. В качестве иллюстрации рассмотрена модель линзы Чанг – Рефсдала. Продемонстрировано, что учет поправок второго порядка позволяет значительно расширить окрестность, в котором асимптотические формулы имеют заданную точность.*

**Ключевые слова:** гравитационно-линзовые системы, модель линзы Чанг-Рефсдала.

A. Alexandrov, Ph.D. in Phys. and Math. Sciences, V. Zhdanov, Dr. Phys. and Math. Sciences, Prof., S. Koval, stud.  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

### COORDINATES AND MAGNIFICATIONS OF THE GRAVITATIONAL LENS CRITICAL IMAGES: SECOND ORDER CORRECTIONS NEAR SYMMETRIC CUSP

*We found and analyzed corrections to the asymptotic formulae that describe coordinates and magnifications of the point source critical images near a cusp. We show that in the case when the lens mapping is symmetric with respect to the cusp axis, the first-order corrections equal to zero identically. For this case, expressions of the second order corrections are found. The Chang-Refsdal lens model is used as an illustration. It is shown that the account of the second order corrections can significantly extend the region near the cusp, where the asymptotic formulae have the prescribed accuracy.*

*Key words: gravitational lens systems, Chang-Refsdal lens model.*

УДК 524.8

A. Bogdan, postgrad. stud., V. Marchenko, Ph.D. in Phys. and Math. Sciences,  
B. Hnatyk, Dr. Phys. and Math. Sciences  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

### THE X-RAY STRUCTURE OF EXTRAGALACTIC JETS

*The X-ray internal structure of extragalactic jets is analyzed. We have elaborated a method for recovering of the multi-component structure of a source on the basis of the observational data. The analysis was applied to the Chandra observations of core-dominated quasar 3C 273.*

*Key words: extragalactic jets, Chandra telescope.*

**1. Introduction.** In spite of great progress in exploring active galactic nuclei (AGN) these objects remain one of the most enigmatic in modern astrophysics [1]. One of the manifestations of AGN activity is the existence of extragalactic jets that constitute the longest collimated structures in the Universe [2]. The detailed study of extragalactic jet structures in all wavelengths is important task for modeling the different astrophysical processes that take place in jets, for example the acceleration of cosmic rays up to the ultra high energies due to Fermi acceleration mechanisms [3-5].

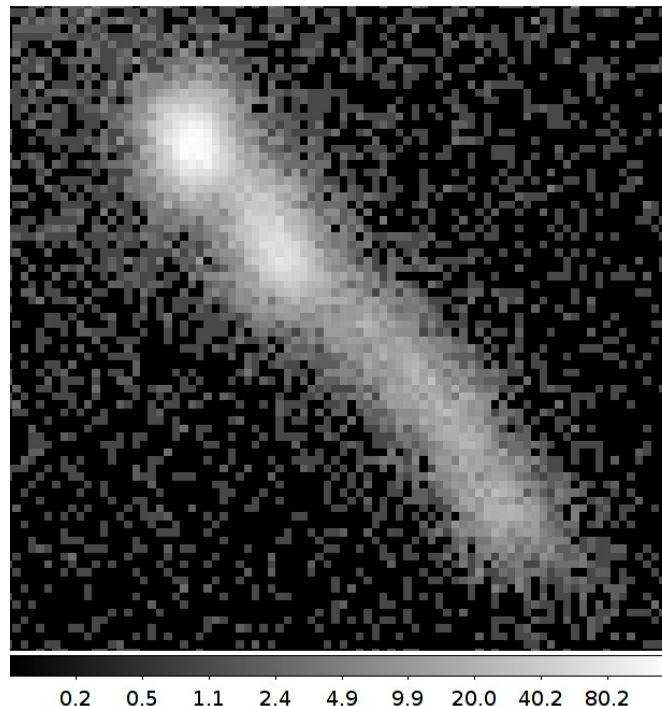


Figure 1. The merged Chandra image (counts) of the 3C 273 jet binned in 0.123" bins

**2. Observational data.** We have used four Chandra observations of core-dominated quasar 3C 273 and its jet (ObsIDs: 4876, 4877, 4878, 4879) with total exposure time of 160 ks [6]. The X-ray data analysis was processed with CIAO 4.4 – a software package for Chandra interactive analysis of the observations [7]. Before analysis we have reprocessed the data using reprocessing script that makes all recommended data processing steps presented in the CIAO analysis threads.

The pixel randomization was removed during reprocessing. We have not included energy-dependent sub-pixel event repositioning algorithm (EDSER) because the current version of SAOsim ray-trace simulator does not model the dither motion of the telescope, so currently it's not possible to use EDSER in a point spread function (PSF) model.

We have merged four observations for the further analysis (ObsIDs: 4876, 4877, 4878, 4879) and have binned them with the binning factor of 0.25 (it corresponds to the bin size 0.123"). The merged and binned image of the jet is presented on Figure 1.