УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах

Запропоновано альтернативний підхід отримання виразу для числа частинок квантованого поля, що народжуються з вакууму на момент часу τ при нестаціонарному розширенні всесвіту, який ґрунтується на узгодженості отриманих результатів з перенормованими компонентами тензора енергії-імпульсу.

Ключові слова: вакуум, тензор енергії імпульсу, метод діагоналізації.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

O. V. Barabash[1], PhD

Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces.

We propose an alternative approach for deriving an expression for the number of particles of quantized fields created from the vacuum at time τ with unsteady expansion of the Universe. The method is based on the consistency of the results obtained from the renormalized components of the energy-momentum tensor.

Key Words: vacuum, energy-momentum tensor, diagonalization method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

У квантовій теорії поля вакуум визначається як стан, для якого

$$\hat{a}_k|0\rangle=0, \quad \forall k, \tag{1}$$

де $\hat{a}_k$ – оператори знищення квантів поля φ. В свою чергу, оператори $\hat{a}_k$ та $\hat{a}_k^\dagger$ визначаються з розкладу польового оператора $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi} = \sum(u_k\hat{a}_k + u_k^*\hat{a}_k^+) \tag{2}$$

де $u_k(x)$ – додатночастотні розв'язки класичних рівнянь. У викривленому просторі-часі процедура квантування формально залишається без зміни, доповнюючись лише коваріантним узагальненням рівнянь. Проте, тепер з'являються складності принципового характеру. Як видно з (2) визначення операторів народження та знищення залежить від вибору розв'язків u_k: різний набір мод приводить, взагалі кажучи, до різного означення вакууму поля φ [1]. В просторі Мінковського існують привілейовані системи відліку (інерційні), в яких простір-час має повну групу симетрії Пуанкаре. По відношенню до цих систем і проводиться розділення мод на додатно- та від'ємно-частотні складові. В загальному ж випадку довільного простору-часу не існує інваріантного способу розділення мод. Поняття вакууму (і відповідно частинок поля) стає невизначеним. Така ситуація певної міри зберігається і у випадку просторів з високою симетрією, таких як однорідний та ізотропний простір Фрідмана. Незважаючи на існування виділеної (супутньої) системи відліку, не вдається однозначно ввести поняття додатночастотної моди. Існують різні підходи до цієї проблеми. Відповідно, в літературі можна зустріти поняття адіабатичного вакууму, конформного вакууму та ін. Як правило, ці вакууми не узгоджуються між собою. Більш того, "вакуумний" стан зовсім не обов'язково виявляється позбавленим частинок: супутній детектор може реєструвати кванти поля [1].

Ситуація змінюється, якщо існують асимптотично стаціонарні області, в яких простір наближається до простору Мінковського. Відповідно, якщо існують асимптотичні in- (при $t\to-\infty$) або out- (при $t\to+\infty$) області, то можна ввести відповідні вакууми $|0_{in}\rangle$ та $|0_{out}\rangle$, які визначаються згідно (1) та (2) на модах, що задовольняють асимптотичним умовам

$$u_k(x) \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}} e^{i(kx-\omega_{in}t)}, \quad t \to -\infty \quad (3)$$

$$\tilde{u}_k(x) \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} e^{i(kx-\omega_{out}t)}, \quad t \to +\infty \quad (4)$$

Якщо поле φ спочатку знаходилось у вакуумному стані $|0_{in}\rangle$, то при розширенні всесвіту відбувається народження частинок, і при $t \to +\infty$ стан $|0_{in}\rangle$ не буде співпадати з $|0_{out}\rangle$. Кількість народжених частинок N_k моди k визначається коефіцієнтами Боголюбова $\beta_{kk'}$ розкладу in-мод по out-модам

$$u_k = \sum_k (\alpha_{kk'} u_{k'} + \beta_{kk'} u^*_{k'}) \quad (5)$$

$$N_k = \sum_k |\beta_{kk'}|^2 \ . \quad (6)$$

Вираз (6) визначає спектр народжених частинок за *весь* час розширення і не дає відповіді на питання, як саме відбувається народження частинок в часі. Поширений метод дослідження динаміки народження квантів поля є метод діагоналізації гамільтоніану [2].

Метод діагоналізації гамільтоніану

Метод діагоналізації полягає у введені вакуумного стану $|0_\tau\rangle$ в момент часу τ. Як добре відомо, вакуум є суттєво нелокальною конструкцією як в просторі, так і в часі. Не існує поняття вакууму в даній точці простору. Зокрема, така нелокальність проявляється, наприклад, в залежності вакууму від глобальних властивостей простору, таких як його топологія, наявність границь і т.п. Нелокальність у часі означає, що властивості квантованого поля в даний момент залежать від усієї його попередньої еволюції. В зв'язку з цим термін "вакуум у момент τ" викликає відчуття недовіри. Як відмічають автори [3] в ситуації, далекій від адіабатичної, інтерпретація стану $|0_\tau\rangle$ як вакуумного "є дуже умовною, і застосовувати цей метод треба з великою обережністю".

За означенням, стан $|0_\tau\rangle$ мінімізує повну енергію, яка складається з трьох складових: казимірівська енергія (доданок, що пов'язаний топологією простору і не зникає в граничному випадку $a(\tau) \to const$), поляризаційна енергія (яка залежить лише від миттєвого значення $a(\tau)$ і зникає у випадку $a(\tau)=const$) та частина, що безпосередньо пов'язана з частинками (квантами поля) і визначається усією попередньою еволюцією $a(\tau)$. Крім останньої частини, дві перші складові енергії можуть бути будь-якого знаку. Мінімізація повної енергії не гарантує відсутності частинок.

В той же час тензор енергії-імпульсу (ТЕІ) квантованого поля є величиною локальною і добре означеною для як завгодно нерегулярної динаміки $a(\tau)$. Опис стану квантованого поля через його значення ТЕІ $\langle 0_{in} | T_0^0 | 0_{in} \rangle$ представляється більш об'єктивним і координатно незалежним. На використані ТЕІ для дослідження динаміки народження частинок заснований метод, який ми назвали методом зшивки.

Метод зшивки

Проілюструємо метод на прикладі скалярного поля в 1+1 просторі-часі з інтервалом $ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\varphi^2)$. Нехай залежність $a(\tau)$ така, що існує in-область, але відсутня out. Стаціонарна out-область необхідна для правильної трактовки частинок (і вакууму) квантованого поля. Тому введемо цю область "руками". Припустимо, що розширення у момент часу $\tau = \tau_0$ припиняється, тобто розглянемо

$$\tilde{a}(\tau) = \begin{cases} a(\tau) & ,\tau<\tau_0 \\ a_0 = a(\tau_0), & \tau \geq \tau_0 \end{cases} .$$

Після моменту τ_0 маємо простір Мінковського зі стандартним набором лінійно незалежних розв'язків польових рівнянь у вигляді плоских хвиль з частотою $\omega_0 = \sqrt{k^2 + m^2 a_0^2}$:

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{4\pi\omega_0}}, \quad \tau > \tau_0$$

Повний розв'язок $u_k(\tau,\varphi) = u_k(\tau) e^{ik\varphi}$ отримується зшивкою $u_k(\tau)$ і $\dot{u}_k(\tau)$ до та після моменту τ_0 :

$$u_k(\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_0}}(\alpha_k e^{-i\omega_0 t}+\beta_k e^{i\omega_0 t}),$$
$$\dot{u}_k(\tau)=\frac{-i\omega_0}{\sqrt{4\pi\omega_0}}(\alpha_k e^{-i\omega_0 t}-\beta_k e^{i\omega_0 t}),\qquad (7)$$

де α_k та β_k – комплексні коефіцієнти, а $u_k(\tau)$ – розв'язок польового рівняння

$$\ddot{u}_k(\tau)+(k^2+m^2a_0^2(\tau))u_k(\tau)=0,\quad \tau>\tau_0 \qquad (8)$$

що має асимптотику

$$u_k(\tau)\to\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}}e^{-i\omega_{in}\tau},\quad \tau\to-\infty.$$

З (7) знаходимо

$$|\alpha_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2-i\omega_0(u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*))$$
$$|\beta_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2+i\omega_0(u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*))$$

Функції u_k та u_k^* є лінійно незалежними розв'язками (8), вронскіан яких є величиною сталою:

$$W=u_k\dot{u}_k^*-\dot{u}_k u_k^*=\frac{i}{2\pi}.$$

В результаті, попередні вирази приймають вигляд

$$|\beta_k|^2=\frac{\pi}{\omega_0}(\omega_0^2|u_k|^2+|\dot{u}_k|^2)-\frac{1}{2},$$
$$|\alpha_k|^2-|\beta_k|^2=1.$$

Обрахуємо тепер значення компонент ТЕІ на in-модах в момент $\tau>\tau_0$.

$$\left\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\right\rangle=\frac{1}{2a_0^2}\sum_k(|\dot{u}_k|^2+\omega_0|u_k|^2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\omega_0+\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\omega_0.$$

Величина

$$\left\langle T_0^0\right\rangle_{част}=\left\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\right\rangle-\left\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\right\rangle$$

має смисл густини енергії народжених частинок. Віднімаючи $\left\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\right\rangle$ від $\left\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\right\rangle$ ми усуваємо з розгляду казимірівську частину ТЕІ (що не пов'язана з частинками), яка одночасно присутня як в $\left\langle 0_{in}|T_0^0|0_{in}\right\rangle$, так і в $\left\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\right\rangle$. При цьому також віднімається і розбіжна частина ТЕІ. Оскільки

$$\left\langle 0_{out}|T_0^0|0_{out}\right\rangle=\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\omega_0,$$

то

$$\left\langle T_0^0\right\rangle_{част}=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\omega_0(k).\qquad (9)$$

Аналогічно для тиску ($P=-T_1^1$) отримуємо

$$\left\langle 0_{in}|P|0_{in}\right\rangle=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum(|\beta_k|^2-\frac{1}{2})\omega_0-m^2\sum|u_k|^2,$$
$$\left\langle 0_{out}|P|0_{out}\right\rangle=\frac{1}{4\pi a_0^2}\sum_k\frac{k^2}{\omega_0(k)}.$$

Виражаючи $|u_k|^2$ через α_k і β_k за допомогою 1-го рівняння (7)

$$|u_k|^2=\frac{1}{4\pi\omega_0}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2+2\Re e(\alpha_k\beta_k^* e^{2i(k\varphi-\omega_0\tau)}))$$

та усереднюючи, отримуємо

$$|u_k|^2=\frac{1}{4\pi\omega_0}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2)=\frac{1}{4\pi\omega_0}(1+2|\beta_k|^2).$$

В результаті

$$\left\langle P\right\rangle_{част}=\left\langle 0_{out}|P|0_{out}\right\rangle-\left\langle 0_{in}|P|0_{in}\right\rangle=$$
$$=\frac{1}{2\pi a_0^2}\sum_k|\beta_k|^2\frac{k^2}{\omega_0(k)}.\qquad (10)$$

Знайдені вирази (9) та (10) мають стандартний вигляд ТЕІ газу невзаємодіючих частинок, де $|\beta_k|^2$ – число частинок моди *k*. Дійсно, для повної енергії поля маємо:

$$H=\int\left\langle T_0^0\right\rangle_{част}(ad\varphi)=\sum_k|\beta_k|^2\,\widetilde{\omega}_0(k),$$

де $\widetilde{\omega}_0(k)=\omega_0(k)/a_0$ – частота (енергія) по відношенню до власного часу. Видно, що величини $|\beta_k|^2$ можна трактувати як число частинок моди *k*. Теж саме стосується і тиску. В одновимірному випадку величина сили, яка діє на "стінку" при пружному відбиванні частинок з імпульсом p, дорівнює

$$F_p = \frac{1}{2}(v dt n_p) \cdot 2p/d\tau,$$

де $\frac{1}{2}(v dt n_p)$ – число частинок, які рухаються в напрямку "стінки" і стикаються з нею за час dt, $2p$ – переданий імпульс, n_p – густина частинок з імпульсом p і енергією E_p. В результаті для тиску отримуємо

$$P = \sum_p n_p v p = \sum_p n_p \frac{p^2}{E_p}. \qquad (11)$$

Вираз (11) співпадає з (10) якщо в ньому покласти

$$n_p = \frac{|\beta_k|^2}{2\pi a_0}, \qquad p = \frac{k}{a_0},$$

$$E = \widetilde{\omega}_0(k) = \frac{\omega_0(k)}{a_0}.$$

Щоб пов'язати величину $|\beta_k|^2$ з числом народжених частинок безпосередньо до моменту зшивки необхідно з'ясувати, чи не відбувається народження частинок в сам момент зшивки τ_0 (в цей момент $\dot{a}(\tau)$ має розрив, а $\ddot{a}(\tau)$ нескінченно велике). Якщо б таке народження частинок мале місце, то компоненти ТЕІ зазнавали б стрибок при $\tau = \tau_0$ (вклад від народжених частинок). Проте, оскільки компоненти ТЕІ є функціями від u_k та їх перших похідних і не залежать від вищих похідних, то в силу умов зшивки (7) усі компоненти ТЕІ залишаються неперервними. Те ж саме стосується залежності ТЕІ від метрики: компоненти ТЕІ залежать від метрики, але не від її похідних. Таким чином, точка зшивки не вносить вклад в народження частинок.

Процедура "обрізання" розширення була суто уявною, необхідною лише для коректного визначення поняття частинки в нестаціонарному просторі-часі. В результаті, для довільного закону розширення число народжених частинок моди k на момент τ дається коефіцієнтами $|\beta_k|^2$ і має вигляд:

$$N_k(\tau) = \frac{\pi}{\omega_k(\tau)}(\omega_k^2(\tau)|u_k|^2 + |u_k'|^2) - \frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Значення $|\beta_k|^2$ з (12) співпадає з аналогічним виразом, отриманим методом діагоналізації гамільтоніану.

Висновки

Метод діагоналізації гамільтоніану має добре відомі складності з фізичним обґрунтуванням тих методів і понять, за допомогою яких отримується вираз для числа частинок, народжених на момент τ. В той же час, метод зшивки, який базується на використанні ТЕІ квантованого поля, є фізично прозорим і координатно незалежним. Отриманий за допомогою цього методу спектр $N_k(\tau)$ співпадає з тим, що дається методом діагоналізації. Таким чином, метод зшивки не має нових наслідків, але, як на нашу думку, дає суттєву перевагу в фізичному обґрунтуванні результату.

Список використаних джерел

1. *Birrel N.D., Davies P.C.* Quantum field in curved spsce. – Cambridge university press, 1982. – 356 p.
2. *Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M.* Quantum effects in strong external fields. – Moscow: Mir, 1980. – 296 p. (in Russian).
3. *Gorbunov D.S., Rubakov V.A.* Interaction to theory of early universe. – Moscow: URSS, 2008. – 543 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 05.02.13