УДК 512.552.1

Журавльов В. М.[1], доцент
Журавльов Д. В.[2]

Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності

Отримано опис з точністю до ізоморфізму всіх зведених черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.

Ключові слова: черепичний порядок, незвідний модуль, глобальна розмірність, ядро епіморфізму, матриця показників.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

Zhuravlev V. N.[1], Ass. Prof.
Zhuravlev D. V.[2]

Tiled orders in $M_6(D)$ of finite global dimension

We describe, up to isomorphism, all reduced tiled orders in $M_6(D)$ of finite global dimension.

Key Words: tiled order, irreducible module, global dimension, kernel of epimorphism, exponent matrix.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

E-mail: vshur@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Поняття черепичного порядку ввів І.Капланський. Його учень Р.Тарсі [2] вивчав глобальну розмірність черепичних порядків над локальним дедекіндовим кільцом $\mathcal{O}$ з полем часток k. Такі порядки мають класичні кільця часток, які є повними матричними алгебрами $M_n(k)$, де через $M_n(B)$ позначено кільце всіх квадратних матриць порядку n з елементами з кільця B. В.Ятегаонкар [9] довів, що в алгебрі $M_n(k)$ над полем часток k локального дедекіндового кільця $\mathcal{O}$ існує лише скінченне число, з точністю до ізоморфізму, черепичних порядків скінченної глобальної розмірності. Такі черепичні порядки вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [5]–[10], [8]–[12]). Фуджита в [10] описав зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 4, 5$.

Мета цієї роботи — побудова проективної резольвенти незвідного модуля над черепичним порядком в $M_6(D)$, опис з точністю до ізоморфізму всіх зведених черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.

Відмітимо, що в нашій термінології "черепичний порядок" — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненулевим радикалом Джекобсона.

2 Черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями

Означення 2.1. Кільце A називається **напівмаксимальним**, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [5].

Теорема 1. (див. [5]) *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i.

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця Λ, т.б. $\Lambda = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є *зведеним*, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Кільце $\mathcal{O}$ вкладається в класичне тіло часток $\mathcal{D}$, і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$, де $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця Λ.

Зрозуміло, що кільце Λ є як нетеровим справа, так і нетеровим зліва.

Означення 2.2. Модуль M називається **дистрибутивним**, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається **напівдистрибутивним**, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається **напівдистрибутивним справа (зліва)**, якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_AA$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним (див. [3]).

Теорема 2. [6] *Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:*

a) кільце A напівдистрибутивне;

b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем — це нетерове первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. В цьому випадку $\mathcal{O} = eAe$ є дискретно нормованим кільцем для кожного примітивного ідемпотента $e \in A$.

Означення 2.3. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A-граткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$-модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [5] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A-гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}$$

де буква T означає операцію транспонування. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

3 Глобальна розмірність кілець

Нехай A —кільце. Позначимо через $\mathrm{mod} - A$ ($A - \mathrm{mod}$) категорію правих (лівих) A-модулів.

Означення 3.1. Проективною резольвентою A-модуля M називається точна послідовність A-модулів

$$\cdots \quad P_2 \xrightarrow{d_2} P_{(1)} \xrightarrow{d_1} P_{(0)} \xrightarrow{\pi} M \quad 0\,,$$

в якій всі модулі P_i проективні. Якщо існує n таке, що $P_n \neq 0$ а $P_k = 0$ для всіх $k > n$, то говорять, що довжина проективної резольвенти дорівнює n (і ∞, якщо такого числа не існує).

Означення 3.2. Говорять, що проективна розмірність A-модуля M дорівнює n та пишуть $\mathrm{proj.dim}_A M = n$, якщо існує проективна резольвента довжини n:

$$0 \quad P_n \quad \cdots \quad P_{(1)} \quad P_{(0)} \quad M \quad 0\,,$$

та не існує коротшої проективної резольвенти.

Якщо не існує проективної резольвенти скінченної довжини, то покладають $\mathrm{proj.dim}_A M = \infty$.

Ін'єктивна резольвента та ін'єктивна розмірність модуля визначається дуальним чином.

Означення 3.3. Права проективна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином: $\mathrm{r.proj.gl.dim} A =$
$\sup\{\mathrm{proj.dim}_A M : M \in \mathrm{mod} - A\}$.

Аналогічно визначається ліва проективна глобальна розмірність кільця: $\text{l.proj.gl.dim}A = \sup\{\text{proj.dim}_A N \; : \; N \in A - \text{mod}\}$.

Означення 3.4. Права ін'єктивна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:
$\text{r.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\text{inj.dim}_A M \; : \; M \in \text{mod}-A\}$.

Аналогічно визначається ліва ін'єктивна глобальна розмірність кільця:

$\text{l.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\text{inj.dim}_A N \; : \; N \in A - \text{mod}\}$.

Теорема 3. *Для будь-якого кільця A мають місце рівності*

$$\text{r.proj.gl.dim}\, A = \text{r.inj.gl.dim}\, A,$$

$$\text{l.proj.gl.dim}\, A = \text{l.inj.gl.dim}\, A.$$

Враховуючи попередню теорему, можна визначити праву (ліву) глобальну розмірність кільця як спільне значення правої (лівої) проективної глобальної розмірності та правої (лівої) ін'єктивної глобальної розмірності:
$\text{r.gl.dim}\, A = \text{r.proj.gl.dim}\, A = \text{r.inj.gl.dim}\, A$,
$\text{l.gl.dim}\, A = \text{l.proj.gl.dim}\, A = \text{l.inj.gl.dim}\, A$

Твердження 1. *Глобальна розмірність кільця є інваріантною в сенсі Моріти.*

Зауваження 1. *Права та ліва глобальна розмірність у випадку довільного кільця можуть не співпадати. Зокрема, спадкове справа кільце може не бути спадковим зліва (приклад такого кільця навів Капланський у 1958 році).*

Теорема 4. *М. Ауслендер.* *Якщо A — нетерове справа та зліва кільце, то* $\text{r.gl.dim}\, A = \text{l.gl.dim}\, A$.

Нехай маємо точну послідовність $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ та проективні резольвенти A-модулів M' та M'' відповідно:
$\cdots \quad P_2' \quad P_{(1)}' \quad P_{(0)}' \quad M' \quad 0$,
$\cdots \quad P_2'' \quad P_{(1)}'' \quad P_{(0)}'' \quad M'' \quad 0$. Тоді наступна точна послідовність

$$\cdots \quad P_2' \oplus P_2'' \quad P_1' \oplus P_1'' \quad P_0' \oplus P_0'' \quad M \quad 0$$

є резольвентою модуля M (див. Ауслендер). Звідси
$\text{proj.dim}_A M \leq \max(\text{proj.dim}_A M', \text{proj.dim}_A M'')$. Зокрема, якщо $M = M' \oplus M''$, то $\text{proj.dim}_A M = \max(\text{proj.dim}_A M', \text{proj.dim}_A M'')$.

В загальному випадку, якщо $M = \bigoplus\limits_i M_i$, то

$$\text{proj.dim}_A M = \sup_i(\text{proj.dim}_A M_i). \qquad (2)$$

Нехай A — зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ — розклад $1 \in A$ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів, $R = \text{rad}\, A$ — радикал Джекобсона кільця A. Тоді всі прості праві (ліві) A-модулі з точністю до ізоморфізму вичерпуються модулями $U_1 = e_1A/e_1R, \ldots, U_n = e_nA/e_nR$ ($V_1 = Ae_1/Re_1, \ldots, V_n = Ae_n/Re_n$).

За теоремою Баса кожен скінченнопороджений A-модуль M над напівдосконалим кільцем має проективне накриття $P(M)$, причому $P(M) = P(M/\text{rad}\, M)$. Оскільки для довільного модуля $M/\text{rad}\, M \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i^{m_i}$ — напівпростий модуль, то

$$P(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P(U_i)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} (e_iA)^{m_i}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\text{r.gl.dim}\, A = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{proj.dim}_A U_i\}. \qquad (3)$$

4 Проективне накриття незвідних модулів

Твердження 2. [11] *Нехай $X_1, \ldots, X_s$ — всі максимальні підмодулі незвідного і непроективного Λ-модуля M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(X_i) = \mathcal{E}(M) + e_{j_i}$, де $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$ та $M = \sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$.*

Доведення. Оскільки $\text{rad } M = \bigcap\limits_{i=1}^{s} X_i$, то $\mathcal{E}(\text{rad } M) = \mathcal{E}(M) + \sum\limits_{i=1}^{s} e_{j_i}$, $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Для кожного i маємо $\pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subset M$, тому $\sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subset M$. Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \neq M$. Тоді існує максимальний підмодуль X_k такий, що $\pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \subseteq X_k$. Отримали протиріччя, бо $\pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k} \nsubseteq X_k$. $\square$

З твердження 2 випливає наступне твердження.

Твердження 3. [11] *Нехай незвідний Λ-модуль M має рівно два максимальних непроективних підмодуля X і Y з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{E}(X) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(Y) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Тоді $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j$ та маємо точну послідовність*

$$0 \to \pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j \to \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \to M \to 0.$$

Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$. Тоді $K = (\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j)(e_i - e_j) + (\pi^{\alpha_j} P_j \cap \pi^{\alpha_k} P_k)(e_j - e_k) + (\pi^{\alpha_k} P_k \cap \pi^{\alpha_i} P_i)(e_k - e_i)$.

Нехай модуль K має проективне накриття $P(K) = \pi^{\alpha_a} P_a \oplus \pi^{\alpha_b} P_b \oplus \pi^{\alpha_c} P_c$. Маємо 2 точні послідовності
$0 \to L \to P(K) \to K \to 0$,
$0 \to K \to P(M) \to M \to 0$.

Теорема 5. [11] *$L \simeq \pi^{\alpha_a} P_a \cap \pi^{\alpha_b} P_b \cap \pi^{\alpha_c} P_c$.*

В.Ятегаонкар довів, що в алгебрі $M_n(k)$ над полем часток k локального дедекіндового кільця $\mathcal{O}$ існує лише скінченне число, з точністю до ізоморфізму, черепичних порядків скінченної глобальної розмірності.

Теорема 6. [9] *Нехай $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з максимальним ідеалом $\mathbf{m}$ і тілом дробів D. Тоді*

- *Якщо $\Lambda = (\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})) \subseteq M_n(D)$ — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з $\mathrm{gl.dim}\ \Lambda < \infty$, то $\alpha_{ij} \leq n - 1$ для $1 \leq i, j \leq n - 1$.*
- *Існує лише скінченна кількість черепичних порядків в $M_n(D)$ над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ скінченної глобальної розмірності, які містять фіксовану множину з n ортогональних ідемпотентів.*
- *Існує з точністю до спряження лише скінченна кількість черепичних порядків в $M_n(D)$ над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ скінченної глобальної розмірності.*

5 Ядро проективного накриття незвідного модуля

Лема 1. [11] *Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля M та $\varphi\colon M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \to M_1 + M_2 + M_3$ — епіморфізм прямої суми незвідних модулів на їх суму, визначений за правилом: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$. Тоді $\ker \varphi = \{(m_{12} - m_{31}, m_{23} - m_{12}, m_{31} - m_{23}) \mid m_{12} \in M_1 \cap M_2, m_{23} \in M_2 \cap M_3, m_{31} \in M_3 \cap M_1\}$.*

Теорема 7. [11] *Нехай $M_1, \ldots, M_n$ — підмодулі дистрибутивного модуля $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ та епіморфізм $\varphi\colon \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \mapsto M$ діє за правилом $\varphi(m_1, \ldots, m_n) = m_1 + \ldots + m_n$. Тоді $\ker \varphi = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_i = \sum_{j \neq i} m_{ij},\ m_{ij} = -m_{ji} \in M_i \cap M_j\}$.*

Наслідок 1. [11] *Нехай M — незвідний Λ-модуль і $P(M) = \bigoplus_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$, $M = \sum_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi\colon P(M) \mapsto M$ дорівнює $\ker \varphi = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_i = \sum_{k \neq i} m_{ik},\ m_{ik} = -m_{ki} \in \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \cap \pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k}\}$.*

Доведення. Черепичний порядок Λ є напівдистрибутивним кільцем. Тому кожен незвідний Λ-модуль є дистрибутивним. За попередньою теоремою ядро епіморфізму має вказаний вигляд. □

Ядро K як підмодуль в $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ можна формально записати у вигляді

$$K = \sum_{i<j} (M_i \cap M_j)(e_i - e_j),$$

де $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$.

Твердження 4. *Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$ і модуль $\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j$ є проективним. Тоді ядро L проективного накриття $P(K)$ модуля K співпадає з ядром L_2 проективного накриття $P((\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k)$ модуля $(\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k$.*

Доведення. Нехай модуль M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ має проективне накриття $P(M) = \pi^{\alpha_i} P_i \oplus \pi^{\alpha_j} P_j \oplus \pi^{\alpha_k} P_k$ і $M = \pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k$. Тоді $K = (\pi^{\alpha_i} P_i \cap \pi^{\alpha_j} P_j)(e_i - e_j) + (\pi^{\alpha_j} P_j \cap \pi^{\alpha_k} P_k)(e_j - e_k) + (\pi^{\alpha_k} P_k \cap \pi^{\alpha_i} P_i)(e_k - e_i)$. Також маємо три епіморфізма з K на $(\pi^{\alpha_i} P_i + \pi^{\alpha_j} P_j) \cap \pi^{\alpha_k} P_k$, $(\pi^{\alpha_j} P_j + \pi^{\alpha_k} P_k) \cap$

$\pi^{\alpha_i}P_i$, $(\pi^{\alpha_k}P_k+\pi^{\alpha_i}P_i)\cap\pi^{\alpha_j}P_j$ з ядрами $\pi^{\alpha_i}P_i\cap\pi^{\alpha_j}P_j$, $\pi^{\alpha_j}P_j\cap\pi^{\alpha_k}P_k$, $\pi^{\alpha_k}P_k\cap\pi^{\alpha_i}P_i$ відповідно.

Позначимо $\pi^{\alpha_i}P_i \cap \pi^{\alpha_j}P_j = X$, $(\pi^{\alpha_i}P_i+\pi^{\alpha_j}P_j)\cap\pi^{\alpha_k}P_k = Y$

Для довільної точної послідовності

$$0\to X\to K\to Y\to 0$$

наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & L_1 & L & L_2 & 0\\
0 & P(X) & P(X)\oplus P(Y) & P(Y) & 0\\
0 & X & K & Y & 0\\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

має точні стовпчики і два точні рядки. Тому за лемою 3×3 перший рядок також точний.

Якщо модуль $\pi^{\alpha_i}P_i\cap\pi^{\alpha_j}P_j = X$ проективний, то $L_1=0$. Тоді $L=L_2$. $\square$

6 Розклад ядра у пряму суму

Твердження 5. *Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля M, $K=(M_1\cap M_2)(e_1-e_2)+(M_1\cap M_3)(e_1-e_3)+(M_2\cap M_3)(e_2-e_3)$. Модуль K розкладається у пряму суму підмодулів тоді і тільки тоді, коли $M_i\cap M_j\subseteq M_k$ для деяких попарно різних $i,j,k\in\{1,2,3\}$.*

Доведення. Позначимо $M_{ij}=M_i\cap M_j$. Тоді $K=M_{12}(e_1-e_2)+M_{13}(e_1-e_3)+M_{23}(e_2-e_3)$ або $K=\{(m_{12}+m_{13},-m_{12}+m_{23},-m_{13}-m_{23})\mid m_{ij}\in M_{ij}\}$.

Нехай $X=X_{12}(e_1-e_2)+X_{13}(e_1-e_3)+X_{23}(e_2-e_3)=\{(x_{12}+x_{13},-x_{12}+x_{23},-x_{13}-x_{23})\mid x_{ij}\in X_{ij}\}$, $Y=Y_{12}(e_1-e_2)+Y_{13}(e_1-e_3)+Y_{23}(e_2-e_3)=\{(y_{12}+y_{13},-y_{12}+y_{23},-y_{13}-y_{23})\mid y_{ij}\in Y_{ij}\}$ — ненульові підмодулі модуля K. Тоді X_{ij} та Y_{ij} — підмодулі M_{ij}.

Нехай $K=X\oplus Y$. Тоді $X\cap Y=0$ і $X+Y=K$. Припустимо, що множини $\{x_{12}+x_{13}\}$, $\{-x_{12}+x_{23}\}$, $\{-x_{13}-x_{23}\}$ ненульові і $\{y_{12}+y_{13}\}$ теж ненульова множина. Тоді $X_{12}\cap Y_{12}=L_{12}\neq 0$ і $X_{13}\cap Y_{13}=L_{13}\neq 0$. Модуль $L_{12}(e_1-e_2)+L_{13}(e_1-e_3)=\{l_{12}+l_{13},-l_{12},-l_{13})\}$ є ненульовим підмодулем модуля K. Тому $X\cap Y\neq 0$.

Отже, хоча б одна з множин $\{x_{12}+x_{13}\}$, $\{-x_{12}+x_{23}\}$, $\{-x_{13}-x_{23}\}$ дорівнює 0. Аналогічно хоча б одна з множин $\{y_{12}+y_{13}\}$, $\{-y_{12}+y_{23}\}$, $\{-y_{13}-y_{23}\}$ теж дорівнює 0.

Якщо $\{x_{12}+x_{13}\}=0$ і $\{y_{12}+y_{13}\}=0$, то $x_{13}=-x_{12}$, $y_{13}=-y_{12}$ і $X=\{(0,-x_{12}+x_{23},-(-x_{12}+x_{23}))\}$, $Y=\{(0,-y_{12}+y_{23},-(-y_{12}+y_{23}))\}$. Очевидно, що $X\cap Y\supset\{(0,-l_{12}+l_{23},-(-l_{12}+l_{23}))\}\neq 0$, де $l_{12}\in L_{12}=X_{12}\cap Y_{12}\neq 0$, $l_{13}\in L_{13}=X_{13}\cap Y_{13}\neq 0$.

Нехай $\{x_{12}+x_{13}\}=0$ і $\{-y_{12}+y_{23}\}=0$. Тоді $x_{12}=-x_{13}$, $y_{12}=y_{23}$, $X=\{(0,x_{13}+x_{23},-(x_{13}+x_{23}))\}$, $Y=\{(y_{13}+y_{23},0,-(y_{13}+y_{23}))\}$. Зрозуміло, що $X\cap Y=0$.

З'ясуємо тепер, за якої умови $X+Y=K$. Нехай $X=\{(0,x_{13}+x_{23},-(x_{13}+x_{23}))\}$, $Y=\{(y_{13}+y_{23},0,-(y_{13}+y_{23}))\}$ і $K=X+Y=\{(y_{13}+y_{23},x_{13}+x_{23},-(x_{13}+x_{23}+y_{13}+y_{23}))\}$. Тоді $y_{13}+y_{23}=m_{12}+m_{13}$, $x_{13}+x_{23}=-m_{12}+m_{23}$. Звідси $m_{12}=y_{13}+y_{23}-m_{13}\in M_3$. Тому $M_{12}\subseteq M_3$.

Навпаки, нехай $M_{12}\subseteq M_3$. Тоді $M_{12}\subseteq M_{13}$ і $M_{12}\subseteq M_{23}$. $K=\{(m_{12}+m_{13},-m_{12}+m_{23},-m_{13}-m_{23})\}=\{(m_{12}+m_{13},-m_{12}+m_{23},-(m_{12}+m_{13})-(-m_{12}+m_{23}))\}$. Оскільки $M_{12}\subseteq M_{13}$ і $M_{12}\subseteq M_{23}$, то $m_{12}+m_{13}=m'_{13}\in M_{13}$, $-m_{12}+m_{23}=m'_{23}\in M_{23}$. $K=\{(m'_{13},m'_{23},-m'_{13}-m'_{23})\}=M_{13}(e_1-e_3)+M_{23}(e_2-e_3)$. Оскільки $\{(m'_{13},0,-m'_{13})\}\cap\{(0,m'_{23},-m'_{23})\}=0$, то $K\simeq M_{13}\oplus M_{23}$. Твердження доведено. $\square$

Твердження 6. *Нехай M — незвідний Λ-модуль, $P(M)=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$, $M=\sum\limits_{i=1}^{s}\pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}$ $\mathrm{rad}\ M=\mathrm{rad}\ \pi^{\alpha_{j_s}}P_{j_s}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi\colon P(M)\mapsto M$ дорівнює*

$$\ker\varphi=\bigoplus_{i=1}^{s-1}\mathrm{rad}\ \pi^{\alpha_{j_i}}P_{j_i}.$$

Доведення. Наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & L & L & 0 & 0\\
0 & \mathrm{rad}\, P(M) & P(M) & P(M)/\mathrm{rad}\, P(M) & 0\\
0 & \mathrm{rad}\, M & M & M/\mathrm{rad}\, M & 0\\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

має точні рядки і два точні стовпчики. Тому за лемою 3×3 перший стовпчик також точний. Звідси $0 \to L \to \mathrm{rad}\; P(M) \to \mathrm{rad}\; M \to 0$, тобто $0 \to L \to \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \to \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_s}} P_{j_s} \to 0$.

Зазначимо, що з $\varphi(m_1, \ldots, m_s) = m_1 + \cdots + m_s$ та $\ker \varphi = \sum\limits_{i<k} (\pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \cap \pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k})\,(e_{j_i} - e_{j_k}) = \sum\limits_{i<k} (\pi^{\alpha_{j_i}} R_{j_i} \cap \pi^{\alpha_{j_k}} R_{j_k})\,(e_{j_i} - e_{j_k})$ випливає, що $\ker\; \varphi = \ker\; \psi$ для $\psi\colon \mathrm{rad}\; P(M) \to \mathrm{rad}\; M$, де $\psi(m_1, \ldots, m_s) = m_1 + \cdots + m_s$. Існує гомоморфізм $\overline{\psi}\colon \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_s}} P_{j_s} \to \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$ такий, що $\psi\overline{\psi} = 1_s$ — тотожне відображення модуля $\pi^{\alpha_{j_s}} P_{j_s}$. Отже, послідовність $0 \to L \to \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \to \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_s}} P_{j_s} \to 0$ розщеплюється і $L \simeq \overset{s-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{rad}\; \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Твердження доведено. □

7 Ізоморфізм черепичних порядків

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$, $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ — зведені черепичні порядки над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ і $\Lambda \simeq A$

Нехай φ — ізоморфне перетворення першого типу, тобто $\varphi(\Lambda) = A$, $\varphi(\mathcal{E}(\Lambda)) = \mathcal{E}(A)$, де $\varphi(\alpha_{ij}) = a_{ij} = \alpha_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Для довільного ізоморфного перетворення ψ другого типу, що задається підстановкою τ, маємо $\psi(A) = \Omega$, $\psi(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(\Omega) = (\omega_{ij})$, де $\omega_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$.

Теорема 8. *Два зведені черепичні порядка $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k.*

Доведення. Нехай зведені черепичні порядки $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні. Тоді матрицю показників $\mathcal{E}(B)$ можна отримати з матриці $\mathcal{E}(A)$ наступним чином: спочатку виконати над $\mathcal{E}(A)$ ізоморфні перетворення φ першого типу, а потім над $\varphi(\mathcal{E}(A))$ виконати еквівалентні перетворення psi другого типу.

Якщо $\varphi(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(G) = (g_{ij})$, то $g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору цілих чисел $t_1, \ldots, t_n$. Нехай перетворення ψ задається підстановкою τ. Тоді $b_{\tau(i)\tau(j)} = g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$. Позначимо $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, $C = (c_{ij})$. Оскільки $c_{ij} = t_i - t_j$, то вони задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k.

Навпаки, нехай для зведених черепичних порядків $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ існує підстановка τ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k. Виконаємо над зведеною матрицею показників $\mathcal{E}(A)$ ізоморфне перетвореня ψ другого типу, що задається підстановкою τ. Отримаємо зведену матрицю показників $\mathcal{E}(F) = \psi(\mathcal{E}(A)) = (f_{ij})$, де $f_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$ для всіх i, j.

Виконаємо тепер над $\mathcal{E}(F)$ ізоморфне перетворення φ першого типу $\varphi(\mathcal{E}(F)) = \mathcal{E}(H) = (h_{ij})$, де $h_{ij} = f_{ij} + x_i - x_j$, $x_i = c_{\theta(i)1}$, $\theta = \tau^{-1}$. Тоді

$$h_{\tau(i)\tau(j)} = f\tau(i)\tau(j) + x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)} = a_{ij} + c_{i1} - c_{j1}.$$

Оскільки $c_{i1} - c_{j1} = c_{ij}$ та $a_{ij} + c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)}$, то $h_{\tau(i)\tau(j)} = b_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i, j.

Отже, $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(B)$ і черепичні порядки A та B ізоморфні. Теорема доведена. □

Зауваження 2. *Цілочисельна матриця C з умови теореми 8 кососиметрична та $c_{ij} = c_{i1} - c_{j1}$ для всіх i, j. Дійсно, оскільки $c_{ii} = b_{\tau(i)\tau(i)} - a_{ii} = 0$ для всіх i, то $c_{ij} + c_{ji} = c_{ii} = 0$. Звідси $c_{ji} = -c_{ij}$, тобто $C = -C^T$, C — кососиметрична матриця. Крім цього, $c_{ij} = c_{ik} - c_{jk}$ для всіх i, j, k. Зокрема, $c_{ij} = c_{i1} - c_{j1}$.*

Наслідок 2. *Два зведених черепичних порядка $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})$ в*

$M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що

$$b_{\tau(i)\tau(j)} + b_{\tau(j)\tau(k)} - b_{\tau(i)\tau(k)} = a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} \quad (4)$$

для всіх i, j, k.

Доведення. Рівність (4) при $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$ еквівалентна рівності $c_{ij} + c_{jk} + c_{ik}$. $\square$

Теореми 6 та 8 дають можливість виділити з точністю до ізоморфізму скінченну множину черепичних порядків в $M_6(D)$, яка містить всі черепичні порядки скінченної глобальної розмірності. За теоремами 7, 5 та твердженнями 3, 2, 5, 6, 4 будується проективна резольвента незвідного модуля над черепичним порядком в $M_6(D)$. На основі цього написана програма для обчислення всіх з точністю до ізоморфізму черепичних порядків в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності.

Висновок: Всього існує з точністю до ізоморфізму 659 черепичних порядків скінченної глобальної розмірності. Максимальна скінченна глобальна розмірність черепичних порядків в $M_6(D)$ дорівнює 6. З точністю до ізоморфізму існує три черепичних порядка глобальної розмірності 6. Це черепичні порядки з наступними матрицями показників

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Література

1. Auslander, M., *On the dimension of modules and algebras*, III, Nagoya Math. J., **9**, 1955, pp. 67-77.
2. Tarsy R.B., *Global dimension of orders*, Trans. of the Amer. Math.Soc., v. 151, 1970, p. 335-340.
3. Tuganbaev, A. A., Semidistributive modules and rings, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
4. Zavadskij A.G., *The Structure of Orders with Completely Decomposable Representations*, Mat. Zametki, v. 13, N 2, 1973, pp. 325-335 (in Russian).
5. Zavadskij, A.G. and Kirichenko, V.V.,*Torsion-free Modules over Prime Rings*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian). English translation in J. of Soviet Math., v. 11, N 4, April 1979, p. 598-612.
6. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.
7. M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish., 2007, xii+400pp.
8. V. A. Jategaonkar, Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), pp. 8–14.
9. V. A. Jategaonkar, Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **196** (1974), pp. 313–330.
10. H.Fujita, Tiled orders of finite global dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 (1991), pp. 919–920.
11. V.Zhuravlev, D.Zhuravlyov, Tiled orders of width 3, J. Algebras and discrete mathematics 1 (2009), 111-123.
12. W.S.Jansen and C.J.Odenthal, A tiled order of finite global dimension, J. Algebra 192 (1997), 572-591.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 514.764

Костянтин М. Зубрілін[1], к.ф.-м.н.

Сплощуючі властивості ліфтів аналітичних HP-перетворень келерових просторів.

У роботі вивчаються сплощуючі властивості інфінітезимальних перетворень дотичних розшарувань першого та другого порядків, породжені ліфтами аналітичних HP-перетворень келерових просторів.

Ключові слова: сплощення, порядок сплощення, p-геодезична крива, p-геодезичне відображення, p-геодезичне інфінітезимальне перетворення.

[1]Феодосійський політехнічний інститут Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, вул.Радянська, 19, м. Феодосія, смт. Приморський, АР Крим

Kostyantyn M. Zubrilin[1], Ph.D.

Flattening properties of the lifts of analytic HP-transformations Kählerian manifolds.

In this paper we are study the flattening properties of the infinitesimal transformations of tangent bundles of orders 1 and 2, which generate the lifts of analytic HP-transformations of Kählerian manifold.

Key Words: flattening, the order of flattening, the p-geodesic curve, the p-geodesic map, the p-geodesic infinitesimal transformation.

[1]Feodosijsky polytechnical institute of National University of Shipbuilding, 19 Soviet Str. Feodosiya, Crimea

E-mail: zubrilin@rambler.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.В.Кириченко

1 Introduction.

Generalisations of geodesic curves of a different aspect are known. In particular, A. Fialkow considers geodesics circles in Riemannian space ([1]). T. Otsuki, Y. Tashiro have introduced concept a holomorphically planar curve in Kählerian space ([2]). P. K. Rashevsky considers flattening curves of a arbitrary order in affine connected spaces, using concept of a flattening ([3]).

On the basis of these curves of generalisation of geodesic maps have been defined: concircular transformations K. Yano ([4]), holomorphically projective maps Y. Tashiro ([5]), p-geodesic maps S. G. Leiko ([6], [7]).

Their infinitesimal analogues were considered in works: for concircular transformations Riemannian spaces (S. Ishihara [8]), for holomorphic projective transformations Kählerian spaces (S. Tachibana, S. Ishihara [9]). P-geodesic infinitesimal transformations are defined S. G. Leiko in work [10].

Lifts of infinitesimal transformations were studied K. Yano and S. Ishihara ([11], [12]). By them it is established, that the complete lift X^{C} of the geodesic infinitesimal transformation X is infinitesimal geodesic transformation to a tangent bundle if and only if X is affine infinitesimal transformation. S. G. Leiko studied lifts of infinitesimal transformations from the point of view of the theory p-geodesic (flattening) maps. He has established, that for a tangent bundle of the first order, vertical lift X^{V} of the geodesic infinitesimal transformation X is canonical 2-geodesic infinitesimal transformation, and the complete lift X^{C} is not canonical 2-geodesic infinitesimal ([10]). The case of a tangent bundle of the second order also is considered S. G. Leiko in work [10]. Lifts of infinitesimal concircular transformation in a tangent bundle of the first order were studied S. G. Leiko ([13]). The case of a tangent bundle of the second order is considered in work [14].

The given work is devoted study of flattening properties of lifts analytical HP-transformations of Kählerian spaces.

2 Elements of the theory of flattening maps.

We will consider in affine connected space (M, ∇) curve $\mathscr{C}$ admiting parametre t; ξ - a field of tangent vectors along a curve $\mathscr{C}$. The vector q-th curvature ξ_q is defined by a rule $\xi_q = \nabla_t \xi_{q-1}$, $\xi_0 = \xi$.

Definition 2.1. ([10], [13]). Arbitrarily we take a point $p \in \mathscr{C}$ on a curve $\mathscr{C}$. If at a point p vectors ξ, $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ are linearly independent, and vectors