УДК 519.852:519.876

Кудін В.І. [1], д.т.н., п.н.с.

Метод базисних матриць та розв‘язки матричної гри у змішаних стратегіях

Проаналізовано зв‘язки метода базисних матриць для задачі лінійного програмування та матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв‘язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

V.I.Kudin [1], Dr. Sci.,

The method of basic matrix and matrix game with mixed strategies

Analysis of basic matrix methods for linear programming problems and matrix game with mixed strategies is reseatch.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

Для багатьох практичних задач встановити існування та знайти оптимальний розв‘язок задачі лінійного програмування (матричної гри) є лише однією із задач дослідження. Виникає ряд інших задач, наприклад, дослідити характер розв‘язків: встановити їх єдиність чи неєдиність, виявити структуру множини її розв‘язків (обмеженість чи необмеженість), її аналітичне представлення та оцінки множинами більш простої структури. Ці проблеми вцілому недостатньо досліджені. Наведені нижче умови дають змогу організувати більш розширений аналіз властивостей матричної гри, як моделей лінійного програмування.

Встановлено [1-4], як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування, розв’язок яких визначають оптимальні стратегії заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Можлива побудова матричної гри за заданою задачею лінійного програмування. Введення одного з найважливіших понять теорії ігор - поняття *стратегії* - дозволяє звести найрізноманітніші розгорнуті гри до єдиної стандартної форми, яка називається *нормальною* формою гри.

Стратегією гри [1-3] називається система правил, що однозначно визначають вибір поведінки гравця на кожному ході в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. Гравець, який вибрав стратегію, може не брати участь в грі. За складеною ним інструкцією гру може проводити нейтральна особа.

Кожна фіксована стратегія, яку може обрати гравець, називається його *чистою стратегією*. Чисті стратегії не вичерпують усіх можливостей гравців. Як ми побачимо далі, є ситуації, в яких гравцям доцільно вибирати не чисту стратегію, а частоту, з якою слід використовувати ту чи іншу чисту стратегію в грі.

Користуючись поняттям стратегії, можна будь-яку гру розглядати так: кожен гравець має один хід - вибір між стратегіями з деякої множини. При цьому гравець приймає рішення, *не маючи жодної інформації про вибір іншого гравця.*

При двох учасниках гра в нормальній формі називається *прямокутною*.

Прямокутна гра з скінченним числом чистих стратегій називається *матричної* грою.

Будемо розглядати тільки *матричні ігри з нульовою сумою*.

В даній роботі проведено дослідження властивостей розв'язків матричної гри на основі положень методу базисних матриць [6].

Постановка задачі

Нехай перший гравець має m стратегій, а другий $-n$. При цьому вважається відомим, що якщо перший гравець вибере i-ю стратегію, а другий - j-ю, виграш першого (і отже програш другого) дорівнює $\|a_{ij}\|$. Матриця $A=\|a_i\|$ $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ називається *платіжної матрицею* або *матрицею виграшу*.

Зауважимо, що складання платіжної матриці при формалізації реальних конфліктних ситуацій є складним завданням. Підстави для побудови платіжної матриці лежать, взагалі кажучи, поза теорією ігор і відносяться до певного застосування, з яким пов'язана постановка задачі.

Завдання теорії ігор полягає у виробленні принципів, що визначають поведінку гравців у кожній конкретній конфліктній ситуації.

Означення 1. Вектор $U=(u_1,u_2,...,u_m)$, кожна компонента якого вказує відносну частоту (ймовірність), з якою відповідна чиста стратегія використовується в грі, називається *змішаної стратегією* першого гравця.

Набір чисел $W=(w_1,w_2,...,w_n)$- змішана стратегія другого гравця.

Ясно, що

$$u_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

$$w_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

Чиста стратегія може бути визначена як змішана стратегія, в якій всі складові, крім однієї, рівні нулю.

Надалі будемо позначати чисті стратегії обох противників у вигляді одиничних векторів

$$e_i = (\overbrace{\underbrace{0,0,...,0,1}_{i},0,...,0}^{m})$$

та

$$e_j = (\overbrace{\underbrace{0,0,...,0,1}_{j},0,...,0}^{n})$$

відповідно.

Означення 2. Оптимальна стратегія гравця - це стратегія, що забезпечує йому максимально можливий гарантований середній виграш.

Властивості оптимальних стратегій матричної гри випливають з основних теоретичних результатів лінійного програмування.

Теорема 1. (Основна теорема теорії ігор [1]). Кожна матрична гра з нульовою сумою має рішення в змішаних стратегіях, тобто існують такі стратегії U^0 та W^0 першого і другого гравця відповідно, що

$$M(U,W^0) \le v = M(U^0,W^0) \le M(U^0,W)$$

В процесі доведення основної теореми теорії ігор матричної гри з платіжною матрицею $A=\|a_{ij}\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ $(a_{ij}>0)$ приведена в відповідність наступна пара двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6), які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\,n} \quad . \qquad (3)$$

де $C=(c_1,c_2,...,c_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $B=(b_1,b_2,...,b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)−(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків ("довга").

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\,, \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \quad (5)$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}) \quad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4] (1)-(3) та (4)-(6),

де $b_i = 1, \ j = \overline{1, m}, \ c_j = 1, \ j = \overline{1, n}$.

Задача (4)-(6) є двоїстою або спряженою до задачі (1)-(3), яку називають прямою (основною, початковою).

Ставиться завдання дослідити властивості оптимальних стратегій ігроків у матричній грі, що подається у еквівалентному вигляді (1)-(3) та (4)-(6).

Положення методу базисних матриць (МБМ)

МБМ може бути застосований як до прямої так і до двоїстої задачі, причому розв'язання кожної з задач буде давати інформацію про властивості стратегій відповідно першого та другого ігроків.

Без обмеження загальності, при викладенні положень методу будемо розглядати задачу лінійного програмування у вигляді (4)-(6), а саме:

($\max Bu, \ A^T u \le C^T, \ u \ge 0$).

Для визначеності, будемо вважати, що задача (1)−(3) має n>>m, матриця А обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m. Задача виду (4),(5) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально.

Означення 3. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв′язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Нехай: $\beta_{ij}, \quad i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ - елементи $A_б$;

e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$;

$\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі $a_r u_1 \le c_r$ за рядками $A_б$,

$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками $A_б$;

$\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = B u_0^T$ - значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ - множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}, \quad \overline{\alpha}_r, \overline{L}_i, \quad \overline{\Delta}_k, \quad \overline{e}_{ri}, (\overline{A}_b^{-1})_i \quad \overline{\alpha}_0$.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l - вектор-нормалі $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$, $a_l u \le c_l$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Теорема 2. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв′язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{0,n}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \quad (7)$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$
$$r = \overline{1,m}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \ne k; \quad (8)$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \ j = \overline{1,m}, \quad (9)$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$
$$r = \overline{1,n}; \quad r \ne k; \quad (10)$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \quad (11)$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв‘язку - $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції - $\alpha_{0k} < 0$.

Встановлено [7], що якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \geq 0, k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{ok} > 0, \quad k = \overline{1,m}$, розв‘язок єдиний, при $\exists i_0 \in I, \alpha_{0i0} = 0$, розв‘язок неєдиний.

Нехай $S_1^c, S_2^c, ..., S_m^c$- суми елементів стовпців, а $S_1^r, S_2^r, ..., S_m^r$- суми елементів рядків оберненої матриці $A_б^{-1}$.

Про дослідження розв'язків матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць.

Твердження 1. Компоненти вектора розкладу цільової функції задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$\alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji}, \ i = \overline{1,m},$$

тобто

$$S_i^c = \alpha_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji}, \ i = \overline{1,m}$$

де $S_1^c, S_2^c, ..., S_m^c$- суми елементів стовпців оберненої матриці, причому співпадають з невід‘ємними компонентами вектора опорного розв‘язку двоїстої задачі.

Доведення. Оскільки вектор цільової функції задачі (4)-(6) є вектором обмеження двоїстої задачі (в даному випадку задачі (1)-(3)), а оптимальна базисна матриця (рядкова) задачі (4)-(6) при транспонуванні буде утворювать оптимальні стовпці, що відповідають невід‘ємним компонентам опорного розв‘язку задачі (1)-(3)- умова доповнюючої не жорсткості (тобто для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}).$$

Витікає, що обчислення компонент вектору розкладу цільової функції (4) будуть співпадать із знаходженням компонент опорного розв‘язку задачі (1)-(3).

Наслідок 1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $S_k^c \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $S_k^c > 0$, $k = \overline{1,m},$ розв‘язок єдиний, при $\exists i_0 \in I,\ S_{i_0}^c = 0$, розв‘язок неєдиний.

Твердження 2. Компоненти вектора розв‘язків задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами

$$u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}, \ i = \overline{1,m},$$

тобто

$$S_i^r = u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}, \ i = \overline{1,m},$$

де $S_1^r, S_2^r, ..., S_m^r$- суми елементів рядків оберненої матриці).

Доведення. Неважко переконатись, що вектор обмежень відповідний рядкам, що утворюють базисну матрицю на ітераціях методу базисних матриць буде одиничним (як під вектор одиничного). Розрахунок компонент базисного розв‘язку на ітераціях методу буде знаходитись множенням справа оберненої матриці (до базисної) на одиничний вектор-стовпець і буде справедливо

$$u_{0i} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}, \ i = \overline{1,m}.$$

Наслідок 2. Сума елементів векторів стовпців оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору розкладу цільової функції за рядками базисної матриці.

Наслідок 3. Сума елементів рядків оберненої матриці співпадають із значенням відповідної компоненти вектору проміжного розв‘язку на ітераціях методу базисних матриць.

Доведення. Справедливість тверджень 1,2 є наслідком властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці та співвідношень (7) та (9).

Висновок.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], то складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j\ ,\ u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i\ .$$

тобто розв‘язання двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) (1)-(3) та (4)-(6) на основі методу базисних матриць встановлює властивості оптимальних розв‘язків прямої та двоїстої задачі, зокрема вказує на властивості єдності та неєдиності.

Після встановлення властивостей розв’язків прямої та двоїстої задач можна зробити висновки про рівноважні стани матричної гри (про сідлові точки задачі та їх властивості).

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, − 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B* Linear programming and application. M.: Progress, − 1966. (in Russian).
3. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, − 1997, − 435p.
4. *Dantzig G.B.* Dikin’s Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, − 1988.
5. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, − 1963. – 776p. (in Russian).
6. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 28.03.13