УДК 517.929.4

Шатирко А.В. [1], к ф.-м.н., доц.,
Хусаінов Д.Я. [1], д. ф.-м.н., проф.

Стабілізація скалярних процесів прямого регулювання нейтрального типу

З використанням прямого методу Ляпунова розглянуто задачу стабілізації до стану абсолютної стійкості нелінійних скалярних процесів прямого регулювання нейтрального типу. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей..

Ключові слова: функціонал Ляпунова, абсолютна стійкість, відхилення аргументу нейтрального типу, стабілізація

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, Київ, пр-т Глушкова 4д
E-mail: a_shatyrko@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua

A.V.Shatyrko[1], PhD in Math., Docent,
D.Ya. Khusainov[1], Dr.Sc., Prof..

Stabilization of scalar processes of direct regulator of neutral type

By employing the direct Lyapunov method stabilization problem of nonlinear scalar Lurie-type direct control systems of neutral type is considered. Conditions are constructed in terms of matrix algebraic inequalities

Key Words: Lyapunov's functional, absolute stability, neutral type time-delay, stabilization.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
E-mail: a_shatyrko@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Як відомо, постановка задач абсолютної стійкості, тобто асимптотичної стійкості в цілому нелінійних систем регулювання виникла в технічних системах і описана, наприклад, в роботах [1-6]. При дослідженні цієї проблеми використовуються два підходи: «частотний метод», який розвинуто в роботах [3-5], та прямий метод Ляпунова з використанням функцій Ляпунова типу Лур'є-Постнікова [1,2,7]. При подальшому розвитку задач абсолютної стійкості розглядалися динамічні системи, що описані різницевими та диференціально-різницевими рівняннями з відхиленням аргументу [7]. Дослідження абсолютної стійкості з використанням прямого методу Ляпунова в системах з післядією проводилося в роботах [8-11].

В даній роботі розглянуто процеси регулювання, які можуть бути описані скалярним рівнянням нейтрального типу. Вважається, що розв'язок не є абсолютно стійким, або ж не вдалося підібрати належні параметри функціоналу Ляпунова-Красовського для встановлення цього факту. Наведено розв'язок задачі стабілізації до стану абсолютної стійкості в обраному класі функціоналів Ляпунова-Красовського за допомогою введення оберненого зв'язку за фазовими координатами, що взяті в даний та попередній моменти часу.

1. Умови абсолютної стійкості

Розглянемо процес регулювання, який описано скалярним диференціально-різницевим рівнянням наступного вигляду

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+bf(\sigma(t)),$$
$$\sigma(t)=cx(t). \qquad (1)$$

Тут a_1, a_2, b, d – сталі, $|d|<1$, початкові умови задаються функціями $x(t)\equiv\varphi(t)$, $x'(t)\equiv\varphi'(t)$, $-\tau\le t\le 0$. Нелінійна функція регулювання $f(\sigma)$ задовольняє умову Ліпшиця, та так звану, «секторну умову»

$$0\le f(\sigma)\sigma\le k\sigma^2,\ k>0. \qquad (2)$$

Дослідження абсолютної стійкості проводиться з використанням функціоналу Ляпунова-Красовського вигляду [9,11]

$$V[x(t),t]=hx^2(t)+ + \int_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}\left\{g_1x^2(s)+g_2\dot{x}^2(s)\right\}ds + + \beta\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)d\sigma, \qquad (3)$$

$$h>0,\ g_1>0,\ g_2>0,\ \beta>0,\ \varsigma>0,$$

Також використовуються поняття та означення дані свого часу в роботі [9].
Введемо до розгляду наступну матрицю

$$S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 & s_{24}^1 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix},$$

$$s_{11}^1=-2a_1h-g_1-a_1^2g_2,\quad s_{12}^1=-ha_2-a_1a_2g_2,$$

$$s_{13}^1=-hd-(a_1+a_2)d,$$

$$s_{14}^1=-hb-a_1g_2b-\frac{1}{2}(\beta a_1+\nu)c,$$

$$s_{22}^1=e^{-\varsigma\tau}g_1-a_2^2g_2,\quad s_{24}^1=-a_2\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$s_{33}^1=e^{-\varsigma\tau}g_2-d^2g_2,\quad s_{34}^1=-d\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$s_{44}^1=-b^2g_2-\beta cb+\frac{1}{k}\nu, \tag{4}$$

Умови абсолютної стійкості систем регулювання нейтрального типу отримані в роботах [9,10]. Стосовно скалярного рівняння (1) вони можуть бути переформульовані наступним чином.

Теорема 1. Нехай параметри рівняння (1), сталі $h>0$ $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$ функціонала Ляпунова-Красовського (3) і величина $\nu>0$ такі, що матриця $S_1[h,g_1,g_2\beta,\varsigma,\nu]$ додатно визначена. Тоді система регулювання (1) абсолютно стійка в метриці C^1 для довільного відхилення аргументу $\tau>0$.

Перевірка умов стійкості (варіант 1). Згідно критерію Сільвестра [12,13], необхідною й достатньою умовою додатної визначеності симетричної матриці $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ є додатність її головних мінорів, тобто

$$\Delta_1^1=s_{11}^1>0, \tag{5}$$

$$\Delta_2^1=s_{11}^1s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2>0, \tag{6}$$

$$\Delta_3^1=\begin{vmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 \end{vmatrix}= \tag{7}$$

$$=s_{11}^1s_{22}^1s_{33}^1-\left(s_{13}^1\right)^2s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2s_{33}^1>0$$

$$\Delta_4^1=\begin{vmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & 0 & s_{24}^1 \\ s_{13}^1 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{vmatrix}=$$

$$=s_{11}^1\left[s_{22}^1s_{33}^1s_{44}^1-\left(s_{24}^1\right)^2s_{33}^1-\left(s_{34}^1\right)^2\right]-$$

$$-s_{12}^1\left[s_{12}^1s_{33}^1s_{44}^1+s_{13}^1s_{34}^1s_{24}^1-\left(s_{34}^1\right)^2s_{12}^1\right]+$$

$$+s_{13}^1\left[s_{22}^1s_{34}^1s_{14}^1+\left(s_{24}^1\right)^2-s_{13}^1s_{22}^1s_{44}^1-s_{12}^1s_{24}^1s_{34}^1\right]-$$

$$-s_{14}^1\left[s_{22}^1s_{33}^1s_{14}^1-s_{13}^1s_{22}^1s_{34}^1-s_{12}^1s_{33}^1s_{24}^1\right]>0 \tag{8}$$

Після дослідження нерівностей (5) - (8) в області $h>0$, $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$, $\nu>0$ простору зміни параметрів функціоналу Ляпунова-Красовського(3), робиться висновок про абсолютну стійкість розв'язку рівняння (1).

Перевірка умов стійкості (варіант 2). Можливий інший підхід, що базується на дослідженні матриць меншої розмірності. Наведемо деякі допоміжні відомості.

Твердження 1. [12]. Нехай ермітова матриця S представлена в вигляді

$$S=\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix},$$

причому матриці A і C квадратні. Для додатної визначеності матриці S необхідно і достатньо, щоб були додатно визначеними матриці A і $C-B^*A^{-1}B$.

Твердження 2. [13]. Якщо матриця A невироджена, тоді оберненою до матриці

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

буде

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}BR^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BR^{-1} \\ -R^{-1}CA^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix},$$

$$R=D-CA^{-1}B.$$

За допомогою наведених тверджень сформулюємо наступні умови абсолютної стійкості.

Теорема 2. Для того, щоб система регулювання (1) була абсолютно стійкою, достатньо, щоб сталі $h>0$ $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\varsigma>0$ функціоналу Ляпунова-Красовського (3) й величина $\nu>0$ були такими, щоб виконувалися умови (5), (6) і матриця

$$\tilde{S}_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}-$$
$$-\frac{1}{s_{11}^1 s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2}\times$$
$$\times\begin{bmatrix} \left(s_{13}^1\right)^2-s_{22}^1 & \left(s_{14}^1 s_{12}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{13}^1 \\ \left(s_{14}^1 s_{12}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{13}^1 & \left(s_{14}^1 s_{22}^1-s_{24}^1 s_{12}^1\right)s_{14}^1+\left(-s_{14}^1 s_{12}^1+s_{24}^1 s_{11}^1\right)s_{24}^1 \end{bmatrix}$$

була додатно визначеною.

Доведення. Представимо матрицю $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ в вигляді

$$S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 \\ \left(S_{12}^1\right)^T & S_{22}^1 \end{bmatrix},$$
$$S_{11}^1=\begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 \end{bmatrix}, S_{12}^1=\begin{bmatrix} s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ 0 & s_{24}^1 \end{bmatrix},$$
$$S_{22}^1=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}.$$

Тоді, згідно твердження 1, для додатної визначеності матриці $S_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]$ необхідно і достатньо, щоб були додатно визначені матриці S_{11}^1 і $S_{22}^1-\left(S_{12}^1\right)^T\left(S_{11}^1\right)^{-1}S_{12}^1$, тобто виконувалися нерівності (5), (6), і була додатно визначена матриця

$$\tilde{S}_1[h,g_1,g_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}-$$
$$-\frac{1}{s_{11}^1 s_{22}^1-\left(s_{12}^1\right)^2}\begin{bmatrix} s_{13}^1 & 0 \\ s_{14}^1 & s_{24}^1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} s_{22}^1 & -s_{12}^1 \\ -s_{12}^1 & s_{11}^1 \end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix} s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ 0 & s_{24}^1 \end{bmatrix}.$$

Розкриваючи добуток матриць, отримаємо твердження теореми.

2. Стабілізація

Припустимо, що розв'язок рівняння (1) не є абсолютно стійким або не знайдено відповідні параметри $h>0$, $g_1>0$, $g_2>0$, $\beta>0$, $\nu>0$. Розглянемо тоді задачу стабілізації, тобто знаходження параметрів c_1, c_2 керування $u(t)$, при яких рівняння

$$\frac{d}{dt}[x(t)-dx(t-\tau)]=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+bf(\sigma(t))+u(t)$$
$$u(t)=c_1x(t)+c_2x(t-\tau) \qquad (9)$$

з оберненим зв'язком вже буде мати абсолютно стійкий розв'язок.. Перепишемо (9) в вигляді

$$\frac{d}{dt}[x(t)-dx(t-\tau)]=(a_1+c_1)x(t)+$$
$$+(a_2+c_2)x(t-\tau)+bf(\sigma(t)),$$
$$\sigma(t)=cx(t). \qquad (10)$$

В цьому випадку матриця, яка визначає повну похідну функціонала (3) вздовж розв'язків, буде мати вигляд

$$S_2[h,g_1,g_2,c_1,c_2,\beta,\varsigma,\nu]=\begin{bmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 & s_{24}^2 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^2 & s_{24}^2 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$$s_{11}^2=s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2,$$
$$s_{12}^2=s_{12}^1-\left(hc_2+a_1c_2+a_2c_1+c_1c_2\right)g_2,$$
$$s_{13}^2=s_{13}^1-(c_1+c_2)d, \quad s_{14}^2=s_{14}^1-\left(bg_2+\frac{1}{2}\beta c\right)c_1,$$
$$s_{22}^2=s_{22}^1-\left(2a_2c_2+c_2^2\right)g_2,$$
$$s_{24}^2=s_{24}^1-a_2\left(g_2b+\frac{1}{2}\beta c\right). \qquad (12)$$

Знаходження умов стабілізації (варіант 1). Як витікає з критерія Сільвестра [12,13], необхідною і достатньою умовою додатної визначеності матриці $S_2[h,g_1,g_2,c_1,c_2,\beta,\varsigma,\nu]$ є додатність її головних мінорів, тобто

$$\Delta_1^2=s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2>0, \qquad (13)$$
$$\Delta_2^2=\begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 \end{vmatrix}=\left[s_{11}^1-2hc_1-\left(2ac_1+c_1^2\right)g_2\right]\times$$
$$\times\left[s_{22}^1-\left(2a_2c_2+c_2^2\right)\right]-$$
$$-\left[s_{12}^1-\left(hc_2+a_1c_2+a_2c_1+c_1c_2\right)\right]>0, \qquad (14)$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^2 \end{vmatrix} = \left[s_{11}^1 - 2hc_1 - \left(2ac_1 + c_1^2\right)g_2\right]$$

$$\times\left[s_{22}^1 - \left(2a_2c_2 + c_2^2\right)\right]s_{33}^1 -$$

$$-\left[s_{13}^1 - \left(c_1 + c_2\right)d\right]^2\left[s_{22}^1 - \left(2a_2c_2 + c_2^2\right)g_2\right] -$$

$$-\left[s_{12}^1 - \left(hc_2 + a_1c_2 + a_2c_1 + c_1c_2\right)\right]^2 s_{33}^1, \qquad (15)$$

$$\Delta_4^2 = \begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{12}^2 & s_{22}^2 & 0 & s_{24}^2 \\ s_{13}^2 & 0 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{14}^2 & s_{24}^2 & s_{34}^1 & s_{44}^1 \end{vmatrix} =$$

$$= s_{11}^2\left[s_{22}^2s_{33}^2s_{44}^2 - \left(s_{24}^2\right)^2 s_{33}^2 - \left(s_{34}^2\right)^2\right] -$$

$$-s_{12}^2\left[s_{12}^2s_{33}^2s_{44}^2 + s_{13}^2s_{34}^2s_{24}^2 - \left(s_{34}^2\right)^2 s_{12}^2\right] +$$

$$+s_{13}^2\left[s_{22}^2s_{34}^2s_{14}^2 + \left(s_{24}^2\right)^2 - s_{13}^2s_{22}^2s_{44}^2 - s_{12}^2s_{24}^2s_{34}^2\right] -$$

$$-s_{14}^2\left[s_{22}^2s_{33}^2s_{14}^2 - s_{13}^2s_{22}^2s_{34}^2 - s_{12}^2s_{33}^2s_{24}^2\right] > 0. \qquad (16)$$

В нерівності (16) залежності s_{ij}^2 визначаються в (12).

І задача стабілізації полягає в знаходженні параметрів c_1, c_2, при яких рівняння (10) буде мати абсолютно стійкий розв'язок. Ця область визначається нерівностями (13) - (16) в просторі зміни параметрів $(c_1.c_2)$ керування $u(t)$.

Знаходження умов стабілізації (варіант 2). Якщо скористатися результатами теореми 2, тоді умови стабілізації можна сформулювати наступним чином.

Теорема 3. Для того, щоб процес прямого регулювання (1) був стабілізованим до стану абсолютної стійкості, достатньо, щоб знайшлися сталі c_1 c_2, $g_2 > 0$, при яких виконуються нерівності (13), (14) і матриця

$$\tilde{S}_2[h, g_1, g_2, \beta, \varsigma, v] = \begin{bmatrix} s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ s_{34}^2 & s_{44}^2 \end{bmatrix} - \qquad (17)$$

$$-\frac{1}{s_{11}^2s_{22}^2 - \left(s_{12}^2\right)^2}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \left(s_{13}^2\right)^2 - s_{22}^2 & \left(s_{14}^2s_{12}^2 - s_{24}^2s_{12}^2\right)s_{13}^2 \\ \left(s_{14}^2s_{12}^2 - s_{24}^2s_{12}^2\right)s_{13}^2 & \left(s_{14}^2s_{22}^2 - s_{24}^2s_{12}^2\right)s_{14}^2 + \left(-s_{14}^2s_{12}^2 + s_{24}^2s_{11}^2\right)s_{24}^2 \end{bmatrix}$$

є додатно визначеною.

Список використаних джерел

1. *Lur'e A.* Some Problems in the Theory of Automatic Control. H.M. Stationary Office, London, 1957.
2. *Aizerman M., Gantmacher F.* Absolute Stability of Regulator Systems. Holden-Day, San Francisco, 1964.
3. *Pyatnitsky E.S.* New Investigations Absolute Stability of Automatic Control Systems // J. Automat. and Telemech. Iss. 6, 1968. – P.5-36. (in Russian).
4. *Barkin A.I.* Qualitative Estimates of Nonlinear Control Systems. Nauka, Moscow. 1982. (in Russian).
5. *Yakubovich A., Leonov G., Gelig A.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific. Singapore, 2004.
6. *Kuntsevich V.M.* Control under Uncertainties. Guaranteed Results in Control and Identification Tasks. Naukova Dumka, Kiev, 2006. (in Russian).
7. *Korenevskiy D.G.* Dynamical Systems Stability under Random Perturbation of Parameters. Algebraic Criteria. Naukova Dumka, Kiev, 1989. (in Russian).
8. *Khusainov D.Ya., Shatyrko A.V.* Lyapunov Functions Method in Investigation of Function-Differential Systems. KNU Publ., Kiev, 1997. (in Russian).
9. *Shatyrko A.V Khusainov D.Ya* Absolute Interval Stability of Neutral Type Differential Systems. Proc of In-t Math. NASCU // Dynamical and Stability Problems of Multidimensional Sytems, Kyiv, 2009.- Vol.6, Iss.3. P.232-247. (in Ukraine).
10. *Shatyrko A.V., Khusainov D.Ya* Stability of Nonlinear Control Systems with Aftereffect. Inform.-Analit. Agency Publ., Kyiv, 2012. (in Ukraine).
11. *Shatyrko A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Stabilization of Lur'e-type nonlinear control systems by Lyapunov-Krasovski functionals // Advances in Difference Equations. – doi:10.1186/1687-2012-229.
12. *Hornn R..,Johnson C.* Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. 1985.
13. *Gantmacher F.* Theory of Matrices. Nauka, Moscow. 1968. (in Russian).

Надійшла до редколегії 28.02.2013