УДК 530.145

Барабаш О.В. [1], к.ф.-м.н., асистент.

Динаміка народження частинок з вакууму в однорідних нестаціонарних просторах

В роботі [1] запропоновано метод знаходження числа частинок, що народжуються з вакууму на момент часу τ при нестаціонарному розширенні всесвіт. В даній роботі цей метод проілюстровано на прикладі розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Ключові слова: вакуум, тензор енергії імпульсу, метод діагоналізації.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: obar@univ.kiev.ua

O. V. Barabash[1], PhD

Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces.

In paper [1] was proposed method for deriving an expression for the number of particles created from the vacuum at time τ with unsteady expansion of the Universe. In this paper this method was illustrated on the expansion governed by the law $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Key Words: vacuum, energy-momentum tensor, diagonalization method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: obar@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

В роботі [1] було знайдено вираз для спектрального числа частинок $N_k(t)$, що народжуються з вакууму на момент часу t при нестаціонарному розширенні всесвіту

$$N_k(t) = \frac{\pi}{\omega_0} \mid \omega_0 u_k - i\dot{u}_k \mid^2 . \qquad (1)$$

В даній роботі ми дослідимо як саме відбувається народження частинок на прикладі розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Рівняння на функцію $u_k(t)$ має вигляд

$$\ddot{u}_k(t) = (\omega_1^2 + m^2 a_2^2 e^{2\lambda t}) u(t) = 0 ,$$

де $\omega_1 = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2}$. Розв'язок цього рівняння з правильною асимптотикою при $t \to -\infty$ має вигляд:

$$u(t) = C J_{-i\nu}(z) ,$$

де $z = \frac{m a_2}{\lambda} e^{\lambda t}$, $\nu = \frac{\omega_1}{\lambda}$, C – стала нормування, яка знаходиться з умови

$$u_k(t) \to \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{4\pi\omega_1}}, \qquad t \to -\infty .$$

Це дає

$$C = \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\sqrt{4\pi\omega_1}} \left(\frac{m a_2}{2\lambda} \right)^{i\nu} = \frac{C_1}{\sqrt{4\pi\omega_1}} ,$$

де $\mid C_1 \mid^2 = \frac{\pi\nu}{sh\pi\nu}$.

Обчислимо тепер коефіцієнти $\mid \beta_k \mid^2$. Згідно (1), знаходимо:

$$\mid \beta_k \mid^2 = \mid C_1 \mid^2 \frac{\omega_0}{4\omega_1} \left| J_{-i\nu} - i \frac{\lambda z}{\omega_0} J'_{-i\nu} \right|^2 =$$

$$= \frac{\mid C_1 \mid^2}{4\nu^2 \omega_0 \omega_1} \left| \nu J_{-i\nu}(\omega_0 - \omega_1) + iz\omega_1 J_{-i\nu} \right|^2 =$$

$$= \frac{\mid C_1 \mid^2}{4\nu^2 \omega_0 \omega_1} (\nu^2 (\omega_0 - \omega_1)^2 \mid J_{i\nu} \mid^2 + i\nu z\omega_1(\omega_0 - \omega_1)$$

$$(J_{i\nu} J_{1-i\nu} - J_{1+i\nu} J_{-i\nu}) + z^2 \omega_1 \mid J_{1+i\nu} \mid^2 . \qquad (2)$$

Тут $\omega_0 = \sqrt{k^2 + m^2 a^2(t)}$. Для спрощення цього виразу врахуємо рівняння на вронскіан

$$z(J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu) = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu\,.$$

Використовуючи відоме співвідношення

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z)$$

та здійснюючи заміну $\nu \to i\nu$ попередній вираз зводиться до вигляду

$$iz(J_{i\nu}J_{1-i\nu} - J_{1+i\nu}J_{-i\nu}) = 2\nu\left(|J_{1+i\nu}|^2 - \frac{sh\pi\nu}{\pi\nu}\right).$$

Після підстановки цього виразу і спрощення (2) приймає вигляд

$$|\beta_k|^2 = \frac{|C_1|^2}{4\omega_0\omega_1}(\omega_0-\omega_1)((\omega_0+\omega_1)(|J_{i\nu}|^2 +$$

$$+|J_{1+i\nu}|^2) - 2\omega_1\frac{sh\pi\nu}{\pi\nu})\,. \qquad (3)$$

Для знаходження $|J_{1+i\nu}|^2$ та $|J_{i\nu}|^2$ скористаємося формулою

$$J_\nu(z)J_\mu(z) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{\mu+\nu+2m}\Gamma(\mu+\nu+2m+1)}{m!\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\mu+\nu+m+1)}$$

Маємо:

$$|J_{i\nu}(z)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}(2m)!}{(m!)^2\,|\Gamma(m+1+i\nu)|^2} =$$

$$= \frac{sh\pi\nu}{\pi\nu} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+2}(2m+2)!}{((m+1)!)^2\,|\Gamma(m+2+i\nu)|^2}\,.$$

Остаточно, отримуємо

$$|\beta_k|^2 = \frac{\omega_0-\omega_1}{4\omega_0\omega_1}((\omega_0-\omega_1)-(\omega_0+\omega_1)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+2}(2m+2)!}{(m+1)!(m+2)!\prod_{n=1}^{m+1}(n^2+\nu^2)})\,. \qquad (4)$$

Дослідимо отриманий вираз. Величина λ, яка входить в $a(t)$, грає роль адіабатичного параметра: при $\lambda \to 0$, $a(t) \to const$. Тому, представляє інтерес розклад $|\beta_k|^2$ в ряд по λ

$$|\beta_k|^2 = N_k^{(0)} + N_k^{(2)} + N_k^{(4)} + \ldots \qquad (5)$$

де $N_k^{(n)} \propto \lambda^n$. Для перших трьох членів розкладу отримуємо наступні значення

$$N_k^{(0)} = \frac{\omega_0-\omega_1}{4\omega_0\omega_1}((\omega_0-\omega_1)+(\omega_0+\omega_1)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^m(2m)!}{4^m m!(m+1)!}) = 0\,.$$

$$N_k^{(2)} = \lambda^2\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{24\omega_0\omega_1^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{m+2}(2m+3)!}{m!(m+1)!} =$$

$$= \lambda^2\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{16\omega_0^6}\,.$$

$$N_k^{(4)} = -\frac{\lambda^4x^2(1+x^2)^{3/2}}{1440\omega_0^4}\times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m+2}(2m+3)!}{m!(m+1)!}(10m^3+63m^2+119m$$

$$+60) = \lambda^4\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2}{256\omega_0^{12}}(98\omega_0^2\omega_1^2 - 9\omega_0^4 - 105\omega_1^4)$$

(6)

Тут $x^2 = \frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1^2}$. Асимптотичний розклад (5) справедливий при сталому t та $\lambda \to 0$. Як видно, кожний член розкладу прямує до нуля при $t \to \infty$ (тобто $\omega_0 \to \infty$). Проте, це ще не означає, що повна кількість народжених частинок $N_k(t)$ обертається в нуль при $t \to \infty$, а свідчить лише про те, що ця величина є експоненційно малою по параметру λ (і тому відповідні доданки відсутні в розкладі (5)).

Асимптотику $|\beta_k|^2$ при $t \to \infty$ можна знайти, підставляючи в (1) вираз

$$J_{-i\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \pi/4 + i\pi\nu/2),\quad z \to \infty\,.$$

Після обрахунків, отримуємо

$$N_k(\infty) = \frac{e^{-\pi\nu}}{2sh\pi\nu} = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\lambda}-1}\,. \qquad (7)$$

Як і передбачалось, кінцева кількість частинок $N_k(\infty)$ відмінна від нуля і є експоненційно малою за адіабатичним параметром λ.

Графік залежності $N_k(t)$ показаний на Рис.1. Як видно, число народжених частинок спочатку зростає, досягаючи максимуму при $\omega_0(t) \approx \sqrt{3}\omega_1$, а потім спадає до величини $N_k(\infty)$. Така поведінка може показатися дивною. Ситуація прояснється, якщо дослідити

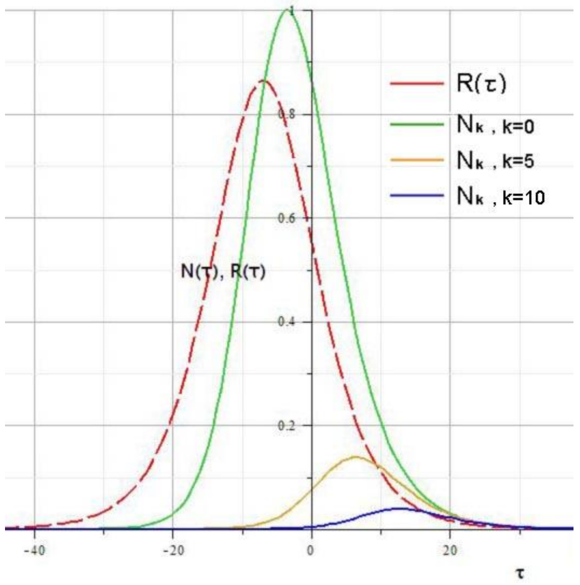

Рис. 1. Графіки залежності $N_k(t)$ та кривизни $R(t)$. Характерний час зміни метрики $1/\lambda = 10$ одиниць.

поведінку метрики простору-часу при $t \to \infty$.

Асимптотично при $t \to \infty$ масштабний фактор $a(t)$ прямує до вигляду $a_2 e^{\lambda t}$. Метрика з таким масштабним фактором є метрикою простору Мінковського, записаною в нестаціонарних координатах. В цьому легко переконатися, обчисливши тензор кривизни $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$. Всі ненульові компоненти цього тензора пропорційні $\frac{1}{a^2}\frac{d}{dt}\frac{\dot{a}}{a}$ і обертаються в нуль при $a(t) \to e^{\lambda t}$.

На якісному рівні ефект народження частинок зазвичай пояснюють як розрив вакуумних петель зовнішнім гравітаційним полем. Для того, щоб віртуальна пара, яка народжується на відстані $l \sim \lambda_c = m^{-1}$ стала реальною зовнішнє поле повинно за характерний час життя пари $t \sim \hbar / m$ виконати над нею роботу $E > 2m$. На відміну від електромагнітного поля, гравітаційне поле однаково впливає як на частинку, так і на античастинку. Тому просторове розділення частинок відбувається за рахунок приливних сил, які описуються рівнянням геодезичної девіації

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} u^\nu u^\lambda \xi^\sigma$$

де ξ^σ – вектор відносного положення частинок, $u^\mu = D\xi^\mu / ds$. Умова народження пари приводить до нерівності [3]

$$|R^\mu{}_{00\nu}| \geq m^2. \qquad (8)$$

Таким чином, народження пар відбувається лише в областях з достатньо великою кривизною. Коли простір-час стає плоским умова (8) порушується і народження припиняється. В той же час, оскільки частинки, що розглядаються, є істинно нейтральними, ніщо не заважає їм анігілювати. Анігіляція може проходити не повністю. Аналогічна ситуація реалізується, наприклад, для закону розширення $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 th\lambda t$, коли присутня як in-, так і out-область [2]. Зокрема, при $\omega_{out} >> \omega_{in}$ та $\omega_{out} >> \lambda$ вираз для $N_k(\infty)$ в цій моделі співпадає з (7).

Формулу (7) можна отримати і іншим чином. У випадку, що розглядається, хорошим вибором для out-мод є адіабатичний вакуум. Для нього

$$u_{out}(t) \sim H_{i\nu}^{(2)}(z) \to \frac{e^{-i\int \omega dt}}{\sqrt{4\pi\omega}}.$$

Число народжених частинок за весь час розширення знаходимо з коефіцієнтів Боголюбова шляхом розкладу in-мод по out-модам:

$$NJ_{-i\nu} = \alpha_k H_{i\nu}^{(2)} + \beta_k (H_{i\nu}^{(2)})^* =$$
$$= J_{-i\nu}(\alpha_k e^{-\pi\nu} + \beta_k) - N_{-i\nu}(\alpha_k e^{-\pi\nu} - \beta_k).$$

Останній доданок має бути рівним нулю, що дає $\alpha_k = e^{\pi\nu}\beta_k$. Враховуючи властивість коефіцієнтів Боголюбова:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$$

отримуємо вираз (7):

$$N_k(\infty) = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\nu} - 1}.$$

З Рис.1 видно, що максимуми кривих $N_k(t)$ не співпадають, а зміщуються в бік зростання часу при зростанні k (а значить і енергії частинок). Ясно, що при достатньо великих k умова (8) буде порушена. Проте, оскільки послідовної мікроскопічної теорії народження частинок не існує, результат (8) є лише якісним і не претендує на повноту опису. Зокрема, якщо замість кривизни R (як чинника, що сприяє народженню частинок) взяти безрозмірну величину $\widetilde{R}(t,k) \propto a^2 R / \omega_k^3$, то максимуми кривих $N_k(t)$ будуть співпадати з максимумом $\widetilde{R}(t,k)$ при всіх значеннях k.

ВКБ-наближення

Для розширення за законом $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$ гарним наближенням виявляється ВКБ-наближення, яке є точним в будь-якому порядку по адіабатичному параметру λ.

Рівняння на польову функцію $u_k(t)$ має формальний ВКБ-розв'язок

$$u_k(t) = \frac{N}{\sqrt{W_k}} \exp\left(-i\int W(\tau) d\tau\right), \qquad (9)$$

де функція $W(t)$ визначається з нелінійного рівняння:

$$W^2(t) = \omega_k^2(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{3}{2}\frac{\dot{W}^2}{W^2}\right). \qquad (10)$$

N – стала нормування. Рівняння (10) можна розв'язувати методом послідовних наближень:

$$W(t) = W^{(0)}(t) + W^{(2)}(t) + W^{(4)}(t) + \ldots$$

де

$$W^{(0)}(t) = \omega_k(t),$$

$$W^{(2)}(t) = -\frac{1}{4\omega}\left(\frac{\ddot{\omega}}{\omega} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2}\right),$$

і т.д., а позначення $W^{(n)}$ означає доданок порядку λ^n.

Зшивка ВКБ розв'язку (9) з плоскими хвилями $u_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{4\pi\omega}}$, дає:

$$|\beta_k|^2 = \frac{\omega_0}{4W}\left[\left(1 - \frac{W}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4\omega_0^2}\frac{\dot{W}^2}{W^2}\right]. \qquad (11)$$

З точністю до величин четвертого порядку малості (11) має вигляд ($\omega \equiv \omega_0$)

$$|\beta_k|^2 = \frac{1}{64\omega^4}(4\dot{\omega}^2 + 10\frac{\ddot{\omega}\dot{\omega}^2}{\omega^3} - \\ - \frac{45}{4}\frac{\dot{\omega}^4}{\omega^4} + \frac{\ddot{\omega}^2}{\omega^2} - 2\frac{\dddot{\omega}\dot{\omega}}{\omega^2}),$$

Підставляючи сюди явне значення $\omega_0(t)$ отримуємо розклад (5) з $N_k^{(n)}$, що співпадають з (6).

Висновки

Метод діагоналізації гамільтоніану має добре відомі складності з фізичним обгрунтуванням тих методів і понять, за допомогою яких отримується вираз для числа частинок, народжених на момент t. В той же час, метод зшивки, який базується на використанні ТЕІ квантованого поля, є фізично прозорим і координатно незалежним. Отримані за допомогою цього методу результати для різних законів зміни $a(t)$ мають якісно зрозумілу поведінку, що проілюстровано в роботі на прикладі розширення за законами $a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 e^{2\lambda t}$.

Список використаних джерел

1. *Barabash O.V.* Dynamics of creation of particles from the vacuum in homogeneous nonstationary spaces // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky\"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – N 1. – P. 234-238. (in Ukrainian).
2. *Birrel N.D., Davies P.C.* Quantum field in curved spsce. – Cambridge university press, 1982. – 356 p.
3. *Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M.* Quantum effects in strong external fields. – Moscow: Mir, 1980. – 296 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.04.13