

УДК 620.179

Богданов В. Р.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., с. н. с.

### Моделювання накопичення пластичних деформацій на основі числового розв'язування плоскої задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу

За допомогою розробленої методики розв'язування задач плоскої деформації у пружно-пластичній динамічній математичній постановці з урахуванням процесу розвантаження матеріалу було отримано числовий розв'язок для брусків з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропилом-тріщиною посередині (компактний зразок) при триточковому згині з використанням методу скінчених різниць. Проводиться порівняння зон пластичних деформацій для різних металів в області вістря пропила-тріщини.

Ключові слова: компактний зразок, пластична деформація, вістря тріщини, плоска задача.

<sup>1</sup> Національний транспортний університет,  
01010, м. Київ, вул. Суворова, 1  
e-mail: vladislav\_bogdanov@hotmail.com

#### 1. Вступ

Задачі удару по деформівних тілах та їхнього співудару залишаються актуальними і досліджуються у різних постановках. Один із найважливіших напрямків таких досліджень є виявлення особливостей руйнування надрізаних компактних зразків при їхньому руйнуванні на триточковий згин за допомогою ударника. Відповідні експерименти дають можливість визначити вкрай необхідну механіці руйнування характеристику матеріалу – в'язкість його руйнування, пов'язану із коефіцієнтом інтенсивності напружень у вістрі тріщини. Оскільки процес є динамічним і може супроводжуватися значними пластичними деформаціями, то його вивчення є складною та багатоплановою задачею.

Основний масив публікацій пов'язаний із вивченням пружного деформування тіл при ударі на них абсолютно жорсткими тілами. Наприклад, у пружній постановці досліджуються [1, 2] відповідно плоска і осесиметрична задачі удару штампів по пружному шару без урахування піднімання середовища. У [3, 4] досліджено удар жорсткого циліндру. У [5] досліджено дію нестационар-

V. R. Bogdanov<sup>1</sup>, PhD (Phys.-Math.), sen. res.

### The Modeling of An Increment of The Plastic Deformations On The Base of Numerical Solution of A Plane Problem, Taking Into Account The Process of Unloading The Material

Solution technique for the dynamic elastic-plastic plane strain problem with account of unloading of the material is developed. This technique combined with the finite differences method is used to obtain numerical solution for a three point band of material with a transversal profile in the shape of a rectangle with a notch-crack in the middle (compact profile). The comparison of plastic deformation regions at the top of notch-crack for different metals is performed.

Key Words: compact specimen, plastic deformation, growing of crack, top of crack, plane problem.

<sup>1</sup> National Transport University,  
01010, Kyiv, Suvorova Street, 1  
e-mail: vladislav\_bogdanov@hotmail.com

ного навантаження на торцеву поверхню пружної півсмуги. У роботі [6] розглянуто плоску пружну задачу динамічної взаємодії абсолютно твердого ударника з пружним ізотропним однорідним півпростором на надзвуківій стадії взаємодії в умовах жорсткого зчеплення контактуючих багатозв'язних поверхонь. Статичні й динамічні задачі для жорстко-пластичних прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження досліджено у [7].

Досліджені задачі нестационарної [8-10] ударної взаємодії абсолютно жорсткого плоского ударника з надрізаним у серединному перерізі компактним зразком у динамічній пружно-пластичній постановці. Запропоновані моделі дали можливість у своєму розвитку значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів.

На відміну від [8-10] у цьому дослідженні аналізується розвиток пластичних деформацій у різних металах на основі розв'язку задачі плоского деформованого стану у динамічній пружно-пластичній постановці з урахуванням процесу розвантаження матеріалу.

## 2. Математичне формулювання задачі

Розглядається деформування ізотропного брусу  $\{|x| \leq L/2, 0 \leq y \leq B\}$  великої товщини, що має у площині поперечного перерізу форму прямокутника  $\Sigma = L \times B$  довжини  $L$ , ширини  $B$  з пропилом-тріщиною завдовжки  $l$  вздовж відрізка  $\{x=0, 0 \leq y \leq l\}$  посередині (компактний зразок). Брус контактує із двома нерухомими опорами по області  $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a, y=0\}$ . Зверху на брус падає абсолютно твердий ударник, що контактує із брусом вздовж відрізка  $\{|x| \leq A, y=B\}$  на протязі короткого проміжку часу. Його дію замінимо рівномірним розподіленням у зоні контакту нормальним навантаженням  $-P$ , що змінюється з часом як лінійна функція ( $P = p_{01} + p_{02}t$ ). Будемо вважати, що область контакту увесь час залишається незмінною. Оскільки процес деформування є симетричним відносно площини  $x=0$ , далі розглядатиметься тільки права частина поперечного перерізу (рис. 1).

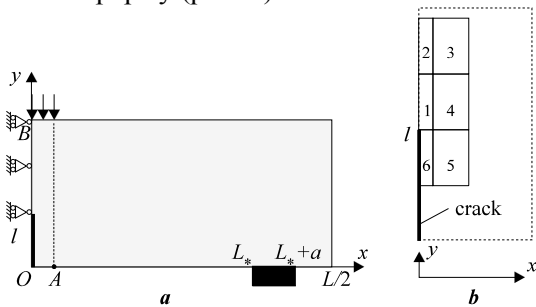


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

Унаслідок високоінтенсивного ударного навантаження вважаємо, що процес деформування є пружнопластичним із зміцненням, причому розрахунки полів напружень, деформацій і їхніх приростів, зокрема, приростів інтенсивності пластичних деформацій, а також параметра Одквіста будемо нижче здійснювати на основі числового розв'язку відповідної динамічної пружнопластичної задачі.

Крайові й початкові умови задачі (у припущенні про незмінність області прикладання реакції опор):

$$\begin{aligned} x=0, 0 < y < l: \quad \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x=0, l < y < B: \quad u_x &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x=L/2, 0 < y < B: \quad \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=0, 0 < x < L_*: \quad \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=0, L_* < x < L_* + a: \quad u_y &= \sigma_{xy} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=0; L_* + a < x < L/2: \quad \sigma_{yy} &= \sigma_{xy} = 0; \\ y=B; 0 < x < A: \quad \sigma_{yy} &= -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y=B; A < x < L/2: \quad \sigma_{yy} &= \sigma_{xy} = 0; \\ t=0: \quad u_x &= 0; \quad u_y = 0; \quad \dot{u}_x &= 0; \quad \dot{u}_y = 0; \quad l = l_0. \quad (1) \end{aligned}$$

Крапка над символом позначає похідну за часом. Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

За фізичну модель прийнята модель, заснована на теорії неізотермічного пластичного течіння для середовища із зміцненням і умовою текучості Губера – Мізеса разом із гіпотезою короткочасної повзучості [11]. Таким чином рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями матимуть вигляд [12]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K \sigma, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda, \quad (2)$$

де  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  – компоненти девіатора тензора напружень;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву;  $K = 3K_1$ ,  $K_1 = (1-2\nu)/(3E)$  – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення  $3\varepsilon$ , середнє напруження  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/3$  у співвідношенні  $\varepsilon = K \sigma$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $E$  – модуль пружності (Юнга);  $d\lambda$  – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження і квадратично залежить від девіатора напружень  $s_{ij}$  [11], причому:

$$\begin{aligned} d\lambda &= \left\{ 0 \quad (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0), \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f=0, df=0) \right\} \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right)^{1/2}, \\ d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left( (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6 \left( (d\varepsilon_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yz}^p)^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (3) \end{aligned}$$

де  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i^p$ ,  $d\varepsilon_i^p$  – інтенсивності напружень, пластичних деформацій та прирости останніх.

Зміцнення матеріалу відбувається за таким температурним співвідношенням [13]:

Таблиця 1

Відношення модулів зсуву і об'ємного стиску

Метал	$G_K = G/K$	Метал	$G_K$
Сталь	0,535714	Алюміній	0,358209
Титан	0,409091	Срібло	0,284672

$$\sigma_s(T) = \sigma_{02}(T_0)(1 + \kappa(T)/\varepsilon_0)^{\eta_*}, \quad \varepsilon_0 = \sigma_{02}(T_0)/E,$$

де  $T$  – температура;  $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$  – параметр Одквіста;  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\eta_*$  – коефіцієнт зміцнення;  $\sigma_s(T)$  – межа текучості після зміцнення матеріалу при температурі  $T$ .

### 3. Схема розв'язування задачі

Схема розв'язування задачі така, як і в [8-10], при цьому для розрахунків використовуються такі ж самі вирази напружень і приростів деформацій. Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (3), застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [8-10, 13].

Для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра будемо вважати наближене значення коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН)  $K_I$  (нижче називатимемо його пружним КІН). Для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною наближено вважають [14]:

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} (1,93 - 3,07r + 14,53r^2 - 25,11r^3 + 25,8r^4),$$

$$r = l/B, \quad (4)$$

в котрій  $F = 2AP$  – контактна сила,  $4B$  – відстань між опорами.

Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, тоді пластичні деформації зупиняють збільшуватися і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальних значень.

### 4. Числова реалізація

Чисельні дослідження проводилися для брусків із компактним профілем з сталі 15Х2НМФА, алюмінію, титану і срібла. Для розрахунків використовувався метод скінченних різниць [15] із змінним кроком розбиття. Використання цього методу обґрунтовується в [16], точність розрахунків з похибкою не більше ніж  $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 +$

$(\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$ . На рис. 2 – 5 відображено результати розрахунків компактних зразків довжиною 60 мм, шириною 10 мм, товщиною 50 мм і глибиною пропила у центрі 3 мм, з коефіцієнтом зміцнення матеріалу  $\eta^* = 0,05$ . Відстань між опорними точками дорівнювала 40 мм. Обчислення здійсненні за таких значень параметрів:  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  с,  $A = 2,5$  мм,  $p_{01} = 8$  МПа,  $p_{02} = 10$  МПа,  $M = 22$ ,  $N = 22$ ,  $K = 21$ , температура  $T = 50^\circ\text{C}$ .

У табл. 1 приведено значення відношення модулів зсуву і об'ємного стиску. У працях [3, 4] показано, що підйом середовища при ударі залежить від параметру  $G_K$ . На рис. 2 приведено параметр Одквіста для різних металів.

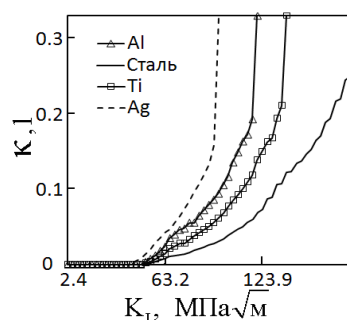


Рис. 2. Параметр Одквіста

Як видно з табл. 1 і рис. 2, чим менше відношення модулів зсуву і об'ємного стиску  $G_K$ , тим більше пластичні деформації.

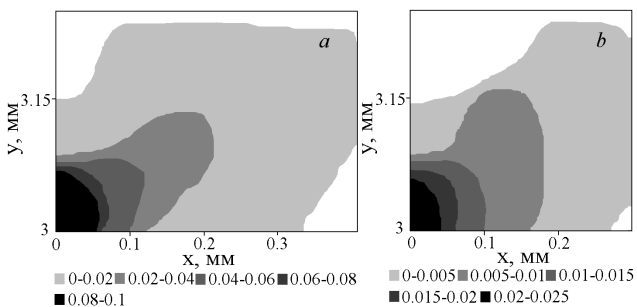


Рис. 3. Пластичні деформації  $\varepsilon_{xx}^p$  у зоні вістря тріщини: а) алюміній б) реакторна сталь

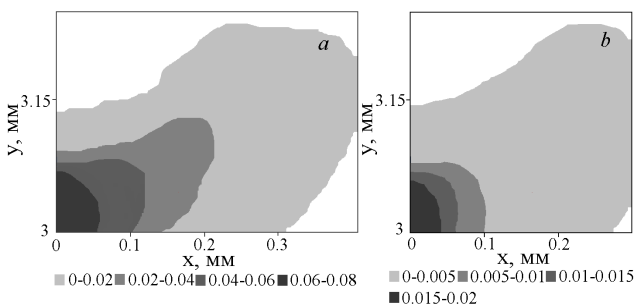


Рис. 4. Пластичні деформації  $\varepsilon_{yy}^p$  у зоні вістря тріщини: а) алюміній б) реакторна сталь

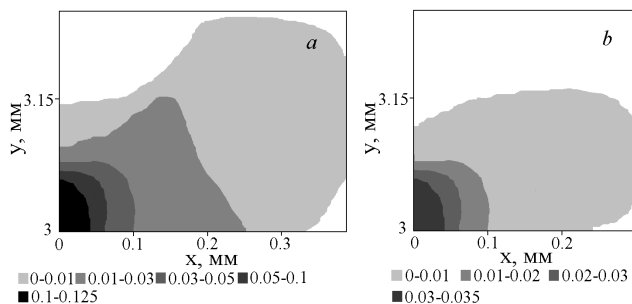


Рис. 5. Пластичні деформації  $\varepsilon_{xy}^p$  у зоні вістря тріщини: а) алюміній б) реакторна сталь

На рис. 3-5 відповідно приведено області пластичних деформацій  $\varepsilon_{xx}^p$ ,  $\varepsilon_{yy}^p$ ,  $\varepsilon_{xy}^p$ , що виникають у зоні вістря тріщини в момент, коли  $K_I = 108,7$  МПа $\sqrt{м}$ , рис. а) стосується випадку зразків з алюмінію, рис. б) – зразків з реакторної сталі. Зона пластичних деформацій розташовується приблизно під кутом 45° справа і зліва від вістря тріщини, максимальні пластичні деформації виникають безпосередньо біля її вістря. У випадку реактор-

#### Список використаних джерел

1. Kubenko V. D. Non Stationary Indentation of the Flat Hard Body in the Surface of Elastic Layer // *Dopovidi Nac. Akad. Nauk.* – 2007. – N 4. – P. 58-65. (in Ukrainian).
2. Kubenko V. D. An Axisymmetric Problem of Non Stationary Indentation of the Flat Hard Body in the Surface of Elastic Layer // *Dopovidi Nac. Akad. Nauk.* – 2008. – N 1. – P. 58-67. (in Ukrainian).
3. Kubenko V. D., Popov S. N. A Plane Problem of The Impact of Hard Flat Body Against Surface of Elastic Halfspace // *Pricl. Mechanika.* – 1988. – V. 24. – N 7. – P. 69-77. (in Russian).
4. Popov S. N. A Vertical Impact of Round Hard Cylinder by Lateral Surface with An Elastic Halfspace // *Pricl. Mechanika.* – 1989. – V. 25. – N 12. – P. 41-47. (in Russian).
5. Kubenko V.D., Gavrilenko V.V., Tarlakovskii D.V. Motion of the Non Stationary Strain on the Surface of Elastic Layer // *Dopovidi Nac. Akad. Nauk.* – 2008. – N 1. – P. 59-65. (in Ukrainian).
6. Medvedskii A. L., Tarlakovskii D. V. Non Stationary Contact of Not Deformed Imperfect Striker with An Elastic Halfplane at the Supersonic Sector of Penetration // *Vestnik MAI.* – 2011. – V. 18. – N6. – P. 125-132. (in Russian).
7. Nemirovskii Yu.V., Romanova T. P. Dynamical Strength of the Plane Plastic Bodies. – Novosibirsk: Akademicheskoe izdatel'stvo «Geo», 2009. – 311 p. (in Russian).
8. Bogdanov V. R., Sulym G. T. About plane problem of deformation state of material under dyna-

ної сталі (більш твердого матеріалу) значення пластичних деформацій приблизно в чотири рази менше ніж для алюмінію при цьому ширина пластичної області у випадку а) на 25% більше ніж у випадку б), а висота майже однакова. Пластичні деформації  $\varepsilon_{yy}^p$  найменші за величиною, пластичні деформації  $\varepsilon_{xx}^p$  і  $\varepsilon_{xy}^p$  мають однаковий порядок.

#### Висновок

На основі розв'язування задачі плоского деформованого стану для матеріалу з поперечним перерізом у формі прямокутника з пропилом-тріщиною посередині у динамічній пружно-пластичній постановці із урахуванням процесу розвантаження показано, що чим менше відношення модулів зсуву і об'ємного стиску, тим більше пластичні деформації.

9. *Bohdanov V. R., Sulym H. T.* Evaluation of crack resistance based on the numerical modelling of the plane strained state // *Material Sciences.* – 2011. – V. 46, N 6. – P. 723-734.
10. *Bogdanov V. R., Sulym G. T.* The cleavage crack simulation based on the numerical modeling of the plane deformation state // *Scientific collection «Problems of Calculation Mechanics and Constructions Strength», Dnepropetrovsk.* – 2011. – N 15. – P. 33-44. (in Russian).
11. *Sbornik, Theory of Plasticity.* – Moscow: Inostrannaja Literatura, 1948. – 460 p. (in Russian).
12. *Arkulis G. Je., Dorogobid V. G.* Theory of Plasticity. – Moscow: Metallurgija, 1987. – 352 p. (in Russian).
13. *Mahnenko V. I.* A Calculation Methods of Investigation of Kinetic of Welded Stresses and Deformations. – Kiev: Naukova dumka, 1976. – 320 p. (in Russian).
14. *Savruk M. P.* Mechanics of Destruction and strength of the Materials, Stress Intensity Factors of Bodies with Cracks. – Kiev: Naukova dumka, 1988. – V. 2. – 620 p. (in Russian).
15. *Hamming R. W.* Numerical methods for scientists and engineers, 2d ed. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 721 p.
16. *Zjukina E. L.* Conservative Schemas of Differences on The Not Uniformed Grid for Two Dimension Wave Equation // *Trudy matematicheskogo centra im. N. I. Lobachevskogo.* – Kazan', 2004. – V. 26. – P. 151-160. (in Russian).

Надійшла до редколегії 15.10.12