УДК 539.3

Кривий О. Ф.[1], д. ф.-м. н., доц.

Особливості поля напружень біля тунельної тріщини, яка виходить в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів

Задача про тунельну тріщину, яка виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, зведена до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з нерухомою особливістю, для якої доведено існування і встановлені асимптотики розв'язків. Запропоновано і обґрунтовано збіжність ефективного числового-аналітичного методу розв'язання вказаної системи СІР. Отримано залежності КІН в вершині тріщини від кута її розташування для різних комбінацій анізотропних матеріалів.

Ключові слова: неоднорідний анізотропний простір, тріщина, сингулярні рівняння, нерухома особливість.

[1] Одеська національна морська академія,
65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

O. F. Kryvyy[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Singularity of the stress field near the tunnel crack, opening onto splice plane of two different anisotropic half spaces

In this paper, the problem of tunnel crack, opening onto an arbitrary angle to the splice plane of the of two different anisotropic half spaces, reduced to a system of three singular integral equations (SIE) with fixed singularities, for which the existence proof and asymptotic behaviour of solutions. Proposed and justified the convergence of effective numerical-analytical method for the solution the specified system SIE. Dependencies of SIF at the crack tip of the angle fracture spacing for different combinations of anisotropic materials.

Key Words: inhomogeneous anisotropic spaces, crack, singularity equations, fixed singularity.

[1] Odessa National Maritime Academy,
65029, Odessa, Didrikhson str., 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Задачі про внутрішні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались плоскими випадками [1, 2]. В роботах [3-5] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені задачі про міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, який знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [6]). В роботі [7] розглянута задача про внутрішню тунельну тріщину в кусково-однорідному анізотропному просторі. В цій праці досліджена задача про тунельну тріщину, яка виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів.

1. Постановка і зведення задачі до системи СІР

Нехай тунельна тріщини займає смугу $\ell=(0;a)$, яка розташована під кутом $\pi/2-\varphi$ до площини з'єднання різних анізотропних півпросторів (рис. 1). До берегів тріщини прикладенні довільні навантаження $\{\chi_k^{\pm}\}^3=\{p_j^{\pm}\}^3=\mathbf{p}^{\pm}$, де $\chi_k^{\pm}(t)-$ відповідно стрибки та суми напружень на берегах тріщини.

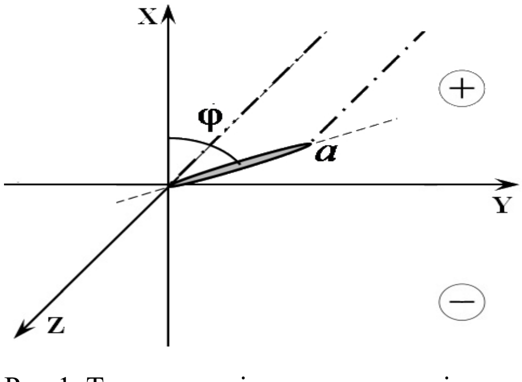

Рис.1. Тунельна тріщина в просторі

Скориставшись інтегральними співвідношеннями [7], відносно невідомих стрибків похідних переміщень $\boldsymbol{\eta}=\{\eta_j\}^3=\{<u'>_\ell,<v'>_\ell,<w'>_\ell\}$ отримаємо систему трьох СІР $(t\in\ell)$:

$$\frac{1}{\pi}\mathbf{M}_S\int_\ell \frac{\boldsymbol{\eta}(\tau)d\tau}{t-\tau}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\mathbf{M}_{nm}\int_\ell \frac{\boldsymbol{\eta}(\tau)d\tau}{e_{nm}t-\tau}=\mathbf{q}\,, \quad (1)$$

$$\mathbf{q}=\mathbf{p}^+-\frac{\mathbf{M}_S^*}{\pi}\int_\ell \frac{\mathbf{p}^- d\tau}{t-\tau}-\operatorname{Im}\sum_{n,m=1}^{3}\frac{\mathbf{M}_{nm}^*}{\pi}\int_\ell \frac{\mathbf{p}^- d\tau}{te_{nm}-\tau}\,,$$

$$e_{nm}=(\bar z_n^+\cos\varphi+\sin\varphi)(z_m^+\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}.$$

Компоненти матриць $\mathbf{M}_S, \mathbf{M}_{nm}, \mathbf{M}_S^*, \mathbf{M}_{nm}^*$ та числа z_n^+ залежать від пружних сталих півпросторів і подані в роботі [7]. Додатковими для системи будуть умови замкнутості тріщин:

$$\int_\ell \eta_k(\tau)d\tau=0,\quad k=1,2,3. \quad (2)$$

2. Існування і асимптотики розв'язків системи СІР

Рівняння системи (1) крім сингулярності типу Коші, яка обумовлює кореневу особливість розв'язків при $t\to a$, містять також нерухомі особливості при $t\to 0$. Останнє призводить до необхідності дослідження поведінки розв'язків при $t\to 0$ і доведення їх існування, зокрема, в просторі функцій Банаха [8]: $L_p(\ell,\omega)$ $(\omega=t^{\gamma}(a-t)^{\beta}$, $-1<\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\beta<-1+p,\ \ 1<p<\infty)$. Подамо предсимвол [8] системи (1) так:

$$\mathbf{G}^0(\eta)=\frac{\mathbf{G}(\eta)}{\sin\pi\eta}=\left\{\frac{g_{kj}(\eta)}{\sin\pi\eta}\right\}^3=\{\mathbf{M}_0-\operatorname{ctg}\pi\eta\,\mathbf{M}_S-$$
$$-\frac{i}{2\sin\pi\eta}\sum_{m,n=1}^{3}(\mathbf{M}_{nm}(-e_{nm}^{++})^{-1-\eta}-\bar{\mathbf{M}}_{nm}(-\bar e_{nm}^{++})^{-1-\eta}))\}\,.$$

Теорема 1. Якщо існує число γ, $\operatorname{Re}\gamma\in(-1;0]$, яке є ($\kappa+1$)-кратним коренем рівняння

$$\Delta(\eta)=0, \quad (3)$$

$$\Delta(\eta)=\begin{cases}\det\mathbf{G}(\eta),\ g_{kj}\neq 0\ (k=j),\\ \operatorname{tr}\mathbf{G}(\eta),\ g_{kj}=0\ (k\neq j),\end{cases}$$

де $\operatorname{tr}\mathbf{G}(\eta)$ – слід матриці $\mathbf{G}(\eta)$, то система (1) за додаткових умов (2), а також за умови $|\mathbf{q}|<$ $<\mathrm{q}_* t^{\varepsilon+\gamma}(1-t)^{\varepsilon-1/2}$, $\varepsilon>0$, має єдиний розв'язок у просторі $L_p(\ell,\omega)$, який при $t\to 0$ має асимптотичне розвинення

$$\eta_j(t)\simeq h_j^* t^{\gamma}P_{\kappa j}(\ln t),\ \ \eta_j^*\neq 0,\ \ j=\overline{1,3}, \quad (4)$$

де $P_{\kappa j}(z)$ – многочлени степеня κ.

Доведення. При виконанні умов теореми будемо мати: $\det\mathbf{G}^0(\eta)\neq 0$, $-1<\operatorname{Re}\eta<\operatorname{Re}\gamma$. Отже, згідно [8], система нетерова в просторі $L_p(\ell,\omega)$ а її індекс визначається формулою $\operatorname{Ind}\mathrm{A}=-\operatorname{ind}(\mathrm{A}_\xi)$, $\mathrm{A}_\xi(\tau)=\det\mathrm{G}^0(\eta)$, $\eta=\xi+i\tau$. Неважко встановити, що $\operatorname{ind}(\mathrm{A}_\xi(\tau))=m^0-1$, де $m^0=\operatorname{ind}(\mathrm{A}_\xi^0(\tau))$, $\mathrm{A}_\xi^0(\tau)=\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\mathrm{A}_\xi(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞, функція $\mathrm{A}_\xi^0(\tau)$ при $\xi\in(\operatorname{Re}\gamma,1)$ опише замкнений контур, який розташований симетрично відносно дійсної осі і не охоплює початок координат. Така поведінка має місце для комбінацій відомих матеріалів [6]. Отже, $m^0=0$, а індекс системи (1) дорівнює одиниці і за додаткових умов (2) існує єдиний розв'язок у просторі $L_p(\ell,\omega)$, який має інтегровану особливість при $t\to 0$. Тобто має місце подання

$$\eta_j(t)\simeq t^{\gamma}P_{rj}(\ln t)\eta_j^*,\ t\to 0,\ \ \eta_j^*(0)\neq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Скориставшись асимптотичними властивостями [1] операторів з нерухомими особливостями, які входять в систему (1), отримаємо співвідношення

$$t^{\gamma}\sum_{k=1}^{3}\eta_{k*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa j}^{(m)}(\ln t)+$$
$$+\Omega_j^0(t)=0,\quad j=\overline{1,3}. \quad (5)$$

Для функції Ω_j^0 має місце оцінка: $|\Omega_j^0|<$ $<Ct^{\operatorname{Re}\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Згідно останній оцінці, рівності (5) при $t\to 0$ можливі лише за умови

$$\sum_{l=0}^{\kappa}\ln^l t\cdot\mathbf{N}_{\kappa-l}=0, \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_m=\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\begin{pmatrix}\kappa\\ m-p\end{pmatrix}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p}\,,$$

$$\mathbf{X}_p=\{\eta_{j*}(0)a_{pj}\}_1^3,\qquad \mathbf{Q}_{m-p}=\{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\}^3,$$

де $a_{\kappa j}$ – коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}$. Рівність (6) можлива, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\begin{pmatrix}r\\ m-p\end{pmatrix}\mathbf{Q}_{m-p}\mathbf{X}_{\kappa-p}=0,\ m=\overline{0,\kappa}.$$

Так як вектори $\mathbf{X}_p\neq 0$, $p=\overline{0,3}$ лінійно незалежні, то останні рівності можливі тоді і тільки тоді, коли визначник системи (7), який дорівнює $\Delta^{(\kappa)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже, якщо має місце подання (4), то γ є ($\kappa+1$)-кратним коренем трансцендентного рівняння (3). *Теорему доведено.*

Наслідок 1. Якщо γ простий корінь трансцендентного рівняння (3) з найбільшою дійсною частиною із смуги $\mathrm{Re}\gamma\in(-1;0]$, то розв'язки системи (1) допускають асимптотичне подання

$$\eta_j(t)\simeq t^{\gamma}\eta_j^*,\ t\to 0,\quad \mathrm{Re}\,\gamma\in(-1,0],\ j=\overline{1,3}. \tag{8}$$

Наслідок 2. Трансцендентне рівняння (4) дозволяє виявити наступні за головною доданки до будь-якого порядку в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (1):

$$\eta_j(t)\simeq\sum_{k=0}^{N}\eta_{jk}^*t^{\gamma_k},\ t\to 0,\quad j=\overline{1,3}, \tag{9}$$

$$-1<\mathrm{Re}\gamma_0<\mathrm{Re}\gamma_1<\ldots<\mathrm{Re}\gamma_N,\quad h_{jk}^*\neq 0.$$

Дослідження показали, що для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [4] рівняння (1) має принаймні один корінь у смузі $\mathrm{Re}\gamma\in(-1;0]$. Отже, справедливе твердження.

Наслідок 3. Система (1) за додаткових умов (2) має єдиний розв'язок у просторі $L_p(\ell,\omega(t))$, який допускає асимптотичне подання (9).

3. Узагальнення методу граничних елементів

Асимптотичне розвинення (9) дає можливість застосувати до розв'язання системи (1) ефективний чисельно-аналітичний метод, який є узагальненням методу граничних елементів і полягає у врахуванні на кінцевих проміжках розбиття області інтегрування наступних за головною доданків в асимптотичних поданнях розв'язків. Тобто, розв'язки системи (1) подано так:

$$\boldsymbol{\eta}(\rho)=\Pi_h^{-1}\boldsymbol{\eta}_N,\quad \boldsymbol{\eta}_N=\{\eta_k^N\}^3, \tag{10}$$

$$\eta_k^N(\rho)=\Pi_h\eta_{lk}=\sum_{j=0}^{N}s_{kj}^N\upsilon_j^k(\rho),\quad h=\max_{1\le j\le N}\left|\mathrm{I}_j\right|,$$

$$\upsilon_j^k=\begin{cases}\rho^{\gamma_j}\sum\limits_{q=0}^{K}\theta(\mathrm{I}_q),\ j=0,\ldots,K,\\ \rho^{\gamma_0}\theta(\mathrm{I}_j),\quad j=K+1,\ldots,N/2,\\ (a-\rho)^{-1/2}\theta(\mathrm{I}_j),\ j=N/2+1,\ldots,N-K-1,\\ (a-\rho)^{j-1/2}\sum\limits_{q=0}^{K}\theta(\mathrm{I}_{N-q}),\ j=N-K,\ldots,N,\end{cases}$$

$$\mathrm{I}_j=(\rho_{j-1},\rho_j),\quad \rho_j=\frac{2aj}{N},\ \theta(\mathrm{I}_j)=\theta(\rho_j)-\theta(\rho_{j-1}),$$

$$j=\overline{1,N},\quad -1<\mathrm{Re}\gamma_0<\mathrm{Re}\gamma_2<\ldots<\mathrm{Re}\gamma_K,$$

$$0\le\rho_0<\rho_1<\ldots<\rho_N\le a.$$

Показники степеневих функцій в поданні (10) є нулі символу систем (1) і знаходяться із трансцендентного рівняння (3). Підставивши (10) в систему (1), і розглянувши вказану систему в точках ρ_j^0, $j=\overline{1,N}$, які є серединами відрізків розбиття I_j, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення s_{lkj}^N:

$$\sum_{j=1}^{N}\mathrm{T}_{qj}^{lk}s_{kj}^{\mathrm{N}}=\mathrm{C}_q^{lk},\qquad k=\overline{1,3},\quad q=\overline{1,N}, \tag{11}$$

$$\mathrm{T}_{qj}^{lk}=\mathrm{S}_{qj}^{lk}+\mathrm{Q}_{qj}^{lk},\qquad \mathrm{S}_{qj}^{k}=\frac{m_{jk}^s}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\upsilon_j^k d\varsigma}{\varsigma-\rho_q^0},$$

$$\mathrm{Q}_{qj}^{lk}=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n,\,m=1}^{3}b_{jk}^{nm}\int_0^a\frac{\upsilon_j^p(\tau)d\tau}{e_{nm}\rho_q^0-\tau},\quad \mathrm{C}_q^k=q_k(\rho_q^0).$$

При такому виборі інтерполянту, згідно [9], K-та похідна різниці $\vartheta_k^h(\rho)=\eta_k-\Pi_h\eta_k$ належить класу функцій Гельдера $H_\mu(\mathrm{I})$ і отже, має місце оцінка [10]:

$$\left|\eta_k-\Pi_h\eta_k\right|=o(h^{K+\mu}),\ \mu\in(0,1), \tag{12}$$

яка обумовлює збіжність за нормою простору $L_p(\ell,\omega)$: $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|\eta_k-\Pi_h^{-1}\eta_k^N\right\|_{L_p(\ell,\,\omega)}=0$. Отже, доведено твердження.

Теорема 2. Розв'язок системи (11) збігається до розв'язку системи (1), швидкість збіжності визначається оцінкою (12).

4. Числові результати та їх аналіз

Для чисельної реалізації метода використані такі матеріали [6]: стеклопластик ортогональноармований (2:1) (матеріал $m1$), стеклопластик СТЕТ (матеріал $m2$), стеклопластик АСТТ(б) (матеріал $m3$), стекло-епоксид (матеріал $m4$) і графіто-епоксид (матеріал $m5$).

На рис. 2 подані залежності відносного КІН від кута φ у вершині тріщини $t=a$, при рівномірному нормальному завантаженні берегів: $\chi_1^+=-2P_1$, $\chi_1^-=0$, $\chi_{2,3}^{\pm}=0$. Лінії 1-5 побудовані відповідно для комбінацій матеріалів $m1-m2$, $m1-$

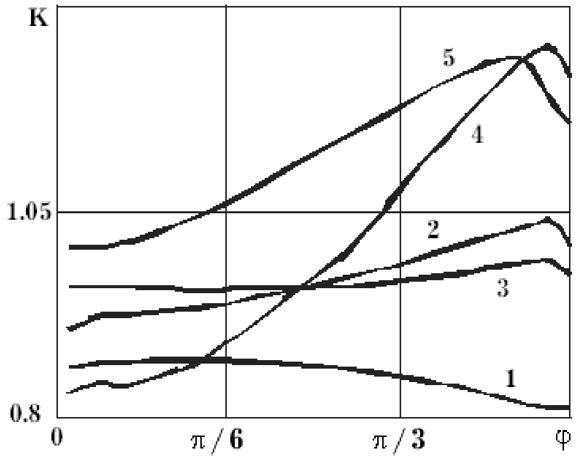

Рис. 2. КІН у внутрішні вершині тріщини

$-m3$, $m1-m4$, $m1-m5$, $m2-m3$. Наведені залежності показують, що поведінка КІН суттєво залежить від співвідношень пружних сталих анізотропних півпросторів і більше змінюється при зміні кута φ, якщо півпростори більше відрізняються значеннями пружних сталих. Помітно також, що КІН для наведених комбінацій матеріалів має екстремум при наближені вершини тріщини до площини $x = 0$.

Чисельні дослідження підтвердили, що на точність обчислень і швидкість збіжності розв'язків суттєво вплинуло врахування наступних доданків в асимптотичному розвиненні розв'язків. Вказане врахування дозволило зменшити кількість подрібнення внутрішніх інтервалів при досягненні високої швидкості збіжності. Чисельні дослідження показали, що для будь-якої комбінації пружних сталих і кута нахилу тріщини φ оптимальними є значення: $N = 40$ і $K = 7$, що підтверджує високу стійкість обчислень, не зважаючи на наявність нерухомих особливостей в ядрах системи.

Список використаних джерел

1. *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics . – 1986. – V. 50, N 4. – P. 475-483.
2. *Kryvyy O. F.* Arbitrarily oriented defects in composite anisotropic plane // Visn. Odessa National University. Ser.: Physics and Mathematical Science. – 2001. – V. 6, N 3. – P. 108-115. (in Ukrainian).
3. *Kryvyy O. F.* The tunnel inclusions in inhomogeneous anisotropic space // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. – 2007. – V. 50, N 2. – P. 55-66. (in Ukrainian).
4. *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – V. 72, N 4. – P. 499-507.
5. *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – V. 44, N 6. – P. 626-634.
6. *Lekhnitskii S. G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. – Moscow: Nauka, 1977. – 415 p. (in Russian).
7. *Kryvyy O. F.* The tunnel inner crack in the inhomogeneous anisotropic space // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya – 2012. – V. 55, N 4. – P. 78-89. (in Ukrainian).
8. *Duduchava R. V.* Convolution equation with discontinuous symbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to problems of mechanics. – Tbilisi: Metsniereba, 1979. – 136 p. (in Russian).
9. *Kravchuk M. P.* Selected mathematical works / Contractor N. Virchenko. – Kiev – New York. – 2002. – 792 p. (in Ukrainian).
10. *Prezdorf Z.* Some classes of singular equations. – M.: Mir, 1979. – 493 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13