УДК 539.3

Сулим Г. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Турчин І. М.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Колодій В. О.[1], аспірант

Динамічна плоска задача теорії пружності для радіально-шаруватого циліндра

З використанням методу поліномів Лагерра одержано розв'язок динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра. Розв'язок одержано у вигляді подвійного ряду за поліномами Лагерра та тригонометричними функціями.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, неоднорідне тіло, аналітичний розв'язок.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

H. T. Sulym, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
I. M. Turchyn, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
V. O. Kolodiy, PhD Student

Dynamic plane problem of elasticity for radially layered cylinder

Using the method of Laguerre polynomials the solution of the dynamic problem of elasticity theory for inhomogeneous cylinder is obtained. The solution is presented in the form of a double series of Laguerre polynomials and trigonometric functions.

Key Words: dynamic problem of elasticity, inhomogeneous cylinder, analytical solution.

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Вивчення динамічного поводження неоднорідних тіл, зумовленого локальним силовим навантаженням є актуальним завданням сучасних інженерних досліджень в механіці [3], [5].

Як відомо, пряме використання класичного аналітичного підходу до побудови розв'язків відповідних початково-крайових задач – методу інтегрального перетворення Лапласа у випадку неоднорідних чи кусково-однорідних тіл створює значні труднощі при переході від трансформант до оригіналів. Особливо це стосується двовимірних чи просторових випадків, коли виникає потреба у проведенні одночасного обернення інтегральних перетворень за часовою і просторовою змінними [6]. Навіть у випадку, коли інтегральне перетворення за просторовою змінною здійснюється із дискретним спектром [6], проведення математично обґрунтованого обернення інтегрального перетворення Лапласа викликає значні труднощі. Тому багато авторів вдаються до числових способів обернення або безпосередньо до числових схем розв'язування задач математичної фізики, що може суттєво спотворити не лише кількісні характеристики явища, що досліджується, а й якісну картину нестаціонарного процесу.

Нами пропонується застосовувати до таких задач метод поліномів Лагерра [4]. У зв'язку з цим розглядається композитне тіло, що складається з M циліндричних шарів з різними фізико-механічними властивостями. Внутрішньому циліндру відповідає індекс $i=1$, а зовнішньому $i=M$. Циліндри припасовані один до одного таким чином, що впродовж усього процесу деформування між ними виконуються умови ідеального механічного контакту.

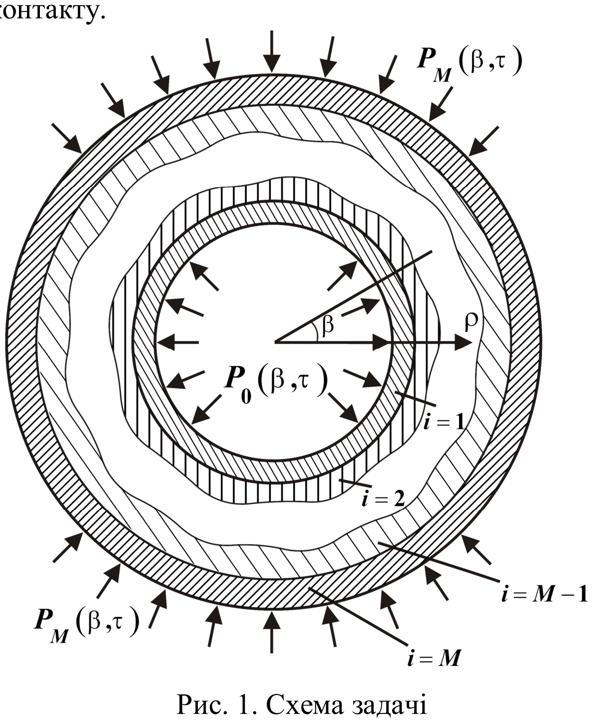

Рис. 1. Схема задачі

Джерелом нестаціонарних процесів вважається самозрівноважене нормальне навантаження внутрішньої та зовнішньої поверхні композитного циліндра, локально розподілене за кутовою змінною (рис. 1). Рівняння динамічної задачі теорії пружності

$$\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta^{(i)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\beta^2}=\tilde{c}_{1,i}^2\frac{\partial^2\theta^{(i)}}{\partial\tau^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\beta^2}=\tilde{c}_{2,i}^2\frac{\partial^2\omega_\gamma^{(i)}}{\partial\tau^2}, \qquad (2)$$

сформульовані в термінах ключових функцій, що мають конкретний механічний зміст – об'ємного розширення

$$\theta^{(i)}(\rho,\beta,\tau)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u^{(i)})}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon^{(i)}}{\partial\varphi}$$

та компоненти вектора пружного повороту

$$\omega_\gamma^{(i)}(\rho,\beta,\tau)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v^{(i)})}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon^{(i)}}{\partial\varphi},$$

де $u^{(i)}(\rho,\beta,\tau)$ і $\upsilon^{(i)}(\rho,\beta,\tau)$ – радіальна та кутова компоненти вектора переміщення в i-му циліндрі.

Рівняння (1), (2) розглядаються з нульовими початковими умовами

$$\theta^{(i)}=\partial_\tau\theta^{(i)}=\omega_\gamma^{(i)}=\partial_\tau\omega_\gamma^{(i)}=0, \quad \tau=0, \qquad (3)$$

крайовими умовами для 1-го та M-го циліндрів

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_0,\beta,\tau)=P_0(\beta,\tau), \quad \sigma_{\rho\beta}^{(1)}(\rho_0,\beta,\tau)=0; \qquad (4)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(M)}(1,\beta,\tau)=P_M(\beta,\tau), \ \sigma_{\rho\beta}^{(M)}(1,\beta,\tau)=0 \qquad (5)$$

та умовами спряження циліндричних шарів

$$u^{(i)}=u^{(i+1)}, \ \ \upsilon^{(i)}=\upsilon^{(i+1)}, \quad \rho=\rho_i; \qquad (6)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)}=\sigma_{\rho\rho}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\rho\beta}^{(i)}=\sigma_{\rho\beta}^{(i+1)}, \quad \rho=\rho_i, \qquad (7)$$

де $\rho=r/R_M$, $\tau=c_{1,0}t/R_M$, $\tilde{c}_{1,i}=c_{1,i}/c_{1,0}$, $\tilde{c}_{2,i}=c_{2,i}/c_{1,0}$, $\kappa_i^2=c_{1,i}/c_{2,i}$, $\rho_i=R_i/R_M$; R_M, R_0 – зовнішній та внутрішній радіуси композитного циліндра; R_i – радіус поверхні поділу матеріалів i-го та $(i+1)$-го циліндра; $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ – швидкості поширення хвиль розширення та зсуву у матеріалі i-го циліндра; $c_{1,0}$ – швидкість поширення хвиль розширення в деякому матеріалі (вибирається залежно від завдань числового аналізу); $P_0(\beta,\tau)$ і $P_M(\beta,\tau)$ – задані, відповідно, на внутрішній та зовнішній поверхнях композитного циліндра нормальні зусилля.

Застосування інтегрального перетворення Лагерра [4] за часовою змінною та скінченого інтегрального перетворення Фур'є [6] за кутовою змінною до рівнянь (1), (2) із урахуванням початкових умов (3), фізичних умов симетрії та періодичності призводить до послідовностей звичайних диференціальних рівнянь .

$$\frac{d^2\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho}-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\lambda^2\tilde{c}_{1,i}^2\right)\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}=\lambda^2\tilde{c}_{1,i}^2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)\overline{\theta}_{k,m}^{(i)}, \qquad (8)$$

$$\frac{d^2\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}}{\partial\rho}-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\lambda^2\tilde{c}_{2,i}^2\right)\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}=\lambda^2\tilde{c}_{2,i}^2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)\overline{\omega}_{k,m}^{(i)}, \qquad (9)$$

де

$$\begin{bmatrix}\theta_n^{(i)}(\rho,\beta)\\ \omega_n^{(i)}(\rho,\beta)\end{bmatrix}=\int_0^\infty\begin{bmatrix}\exp(\lambda\tau)\theta^{(i)}(\rho,\beta,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\\ \exp(\lambda\tau)\omega_\gamma^{(i)}(\rho,\beta,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\end{bmatrix}$$

– зображення за Лагерром,

$$\begin{bmatrix}\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)\\ \overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)\end{bmatrix}=\int_0^\pi\begin{bmatrix}\theta_n^{(i)}(\rho,\beta)\cos\beta m\,d\beta\\ \omega_n^{(i)}(\rho,\beta)\sin\beta m\,d\beta\end{bmatrix}$$

– зображення за Фур'є, λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок послідовностей (8), (9), як відомо [7], має вигляд алгебричної згортки

$$\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j,m}^{(i)}G_{j,m}\left(\eta_{1,i}\rho\right)+B_{n-j,m}^{(i)}W_{j,m}\left(\eta_{1,i}\rho\right)\right],$$

$$\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j,m}^{(i)}G_{j,m}\left(\eta_{2,i}\rho\right)+D_{n-j,m}^{(i)}W_{j,m}\left(\eta_{2,i}\rho\right)\right], \qquad (10)$$

де $\eta_{k,i}=\lambda\tilde{c}_{k,i}$, $A_{n-j,m}^{(i)}, B_{n-j,m}^{(i)}, C_{n-j,m}^{(i)}, D_{n-j,m}^{(i)}$ – набір сталих, а $G_{j,m}(x)$ та $W_{j,m}(x)$ – лінійно незалежні послідовності фундаментальних розв'язків рівнянь (8) чи (9), які з використанням методу невизначених коефіцієнтів можна подати у вигляді

$$G_{j,m}(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{\mathrm{I}_{k+m}(x)}{k!},$$

$$W_{j,m}(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\left(-\frac{x}{2}\right)^k\frac{\mathrm{K}_{k+m}(x)}{k!}, \qquad (11)$$

де $\mathrm{I}_\nu(x)$ і $\mathrm{K}_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя, а коефіцієнти $a_{j,k}$ визначаються із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1}=\sum_{m=k}^{j-1}\left(j-m+1\right)a_{m,k}\,, \tag{12}$$

де $a_{j,k}=0$ при $k>j$ і $a_{j,0}$ – довільні.

Для подальших викладок за виглядом ключових функцій віднайдемо трансформанти компонент вектора переміщень $\overline{u}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ із використанням систем диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\overline{\theta}^{(i)}_{n,m}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho\overline{u}^{(i)}_{n,m})}{\partial\rho}+\dfrac{m}{\rho}\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}\,,\\[2mm] \overline{\omega}^{(i)}_{n,m}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m})}{\partial\rho}+\dfrac{m}{\rho}\overline{u}^{(i)}_{n,m}\,.\end{cases} \tag{13}$$

Зокрема, це можна зробити, увівши в розгляд функції $\overline{P}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{Q}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ формулами

$$\overline{u}^{(i)}_{n,m}=\frac{\partial\overline{P}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}+\frac{m}{\rho}\overline{Q}^{(i)}_{n,m};\quad \overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}=-\frac{m}{\rho}\overline{P}^{(i)}_{n,m}-\frac{\partial\overline{Q}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}\,. \tag{14}$$

Безпосередня підстановка подань (14) у системи (13) призводить до двох відокремлених рівнянь

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\overline{P}^{(i)}_{n,m}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}\overline{P}^{(i)}_{n,m}=\overline{\theta}^{(i)}_{n,m}\,,$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\overline{Q}^{(i)}_{n,m}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}\overline{Q}^{(i)}_{n,m}=-\overline{\omega}^{(i)}_{n,m}\,,$$

розв'язки яких, враховуючи, що $\overline{\theta}^{(i)}_{n,m}$ і $\overline{\omega}^{(i)}_{n,m}$ задовольняють рівняння (8), (9), одержано у вигляді

$$\overline{P}^{(i)}_{n,m}=\frac{1}{\eta^2_{1,i}}\left[\overline{\theta}^{(i)}_{n,m}-2\overline{\theta}^{(i)}_{n-1,m}+\overline{\theta}^{(i)}_{n-2,m}\right]; \tag{15}$$

$$\overline{Q}^{(i)}_{n,m}=-\frac{1}{\eta^2_{2,i}}\left[\overline{\omega}^{(i)}_{n,m}-2\overline{\omega}^{(i)}_{n-1,m}+\overline{\omega}^{(i)}_{n-2,m}\right]. \tag{16}$$

При знаходженні розв'язків (15) і (16) було використано відому з дискретного аналізу формулу

$$\sum_{k=0}^{n}\left(n-k+1\right)\left(f_k-2f_{k-1}+f_{k-2}\right)=f_n\,,\quad f_{-1}=f_{-2}\equiv 0\,.$$

Знаючи вирази для трансформант вектора переміщень $\overline{u}^{(i)}_{n,m}(\rho)$ і $\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}(\rho)$, можна знайти трансформанти компонент тензора напружень

$$\frac{\overline{\sigma}^{(i)}_{\rho\rho,n,m}}{\mu_i}=(\kappa_i^2-2)\overline{\theta}^{(i)}_n+2\frac{\partial\overline{u}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}\,,$$

$$\frac{\overline{\sigma}^{(i)}_{\rho\beta,n,m}}{\mu_i}=\frac{1}{\rho}\left(-m\overline{u}^{(i)}_{n,m}-\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}\right)+\frac{\partial\overline{\upsilon}^{(i)}_{n,m}}{\partial\rho}\,, \tag{17}$$

де μ_i – модуль зсуву. Із використанням подань (17) і (14), задовольняючи трансформованим крайовим умовам і умовам спряження одержано послідовності рекурентних систем алгебричних рівнянь для визначення невідомих $A^{(i)}_{n-j,m}, B^{(i)}_{n-j,m}$, $C^{(i)}_{n-j,m}, D^{(i)}_{n-j,m}$:

$$\begin{pmatrix} b^m_{1,1} & \dots & b^m_{1,4} & 0 & \dots & \dots & 0\\ b^m_{2,1} & \dots & b^m_{2,4} & 0 & \dots & \dots & 0\\ b^m_{3,1} & \dots & b^m_{3,4} & b^m_{3,5} & \dots & b^m_{3,8} & 0 & \dots & 0\\ b^m_{4,1} & \dots & b^m_{4,4} & b^m_{4,5} & \dots & b^m_{4,8} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \dots & & \ddots & & \dots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & b^m_{4M-3,4M-7} & \dots & b^m_{4M-3,4M-4} & b^m_{4M-3,4M-3} & \dots & b^m_{4M-3,4M}\\ 0 & \dots & 0 & b^m_{4M-2,4M-7} & \dots & b^m_{4M-2,4M-4} & b^m_{4M-2,4M-3} & \dots & b^m_{4M-2,4M}\\ 0 & & \dots & \dots & & 0 & b^m_{4M-1,4M-3} & \dots & b^m_{4M-1,4M}\\ 0 & & \dots & \dots & & 0 & b^m_{4M,4M-3} & \dots & b^m_{4M,4M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{(1)}_{n,m}\\ B^{(1)}_{n,m}\\ C^{(1)}_{n,m}\\ D^{(1)}_{n,m}\\ \vdots\\ A^{(M)}_{n,m}\\ B^{(M)}_{n,m}\\ C^{(M)}_{n,m}\\ D^{(M)}_{n,m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H^{(1)}_{n,m}\\ H^{(2)}_{n,m}\\ H^{(3)}_{n,m}\\ H^{(4)}_{n,m}\\ \vdots\\ H^{(4M-3)}_{n,m}\\ H^{(4M-2)}_{n,m}\\ H^{(4M-1)}_{n,m}\\ H^{(4M)}_{n,m}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

В системах (18) коефіцієнти матриці не залежать від n, а права частина із ростом n поповнюється одержаними при попередніх значеннях n розв'язками.

Блочно-теплицева структура матриці $\left(b^m_{k,l}\right)$ систем (16) дає змогу із використанням процедури Гаусса звести їх до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^m & b_{1,2}^m & b_{1,3}^m & b_{1,4}^m & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2}^m & \tilde{b}_{2,3}^m & \tilde{b}_{2,4}^m & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{3,3}^m & \tilde{b}_{3,5}^m & \dots & \tilde{b}_{3,8}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4,4}^m & \dots & \tilde{b}_{4,8}^m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \ddots & & & \dots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4M-3,4M-3}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M-2}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-3,4M}^m \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{4M-2,4M-2}^m & \tilde{b}_{4M-2,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-2,4M}^m \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{4M-1,4M-1}^m & \tilde{b}_{4M-1,4M}^m \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{4M,4M}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n,m}^{(1)} \\ B_{n,m}^{(1)} \\ C_{n,m}^{(1)} \\ D_{n,m}^{(1)} \\ \vdots \\ A_{n,m}^{(M)} \\ B_{n,m}^{(M)} \\ C_{n,m}^{(M)} \\ D_{n,m}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{n,m}^{(1)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(2)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(3)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4)} \\ \vdots \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-3)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-2)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M-1)} \\ \tilde{H}_{n,m}^{(4M)} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де величини $\tilde{b}_{i,j}^m$ та $\tilde{H}_{n,i}^m$ пов'язані із відповідними $b_{i,j}^m$ та $H_{n,i}^m$ через рекурентні співвідношення. Трикутна структура систем (19) дає змогу одержати її точний рекурентний розв'язок для довільного числа складових циліндра M .

Знайшовши послідовно із систем (19) всі $A_{n-j,m}^{(i)}, B_{n-j,m}^{(i)}, C_{n-j,m}^{(i)}, D_{n-j,m}^{(i)}$, одержимо трансформанти $\overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho)$ і $\overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho)$, із використанням яких оригінали відповідних величин відновлюються за формулами

$$\theta^{(i)}(\rho, \beta, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\theta}_{n,m}^{(i)}(\rho) \cos m\beta ,$$

$$\omega_{\gamma}^{(i)}(\rho, \beta, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\omega}_{n,m}^{(i)}(\rho) \sin m\beta . \quad (20)$$

Аналогічно до (20), із використанням співвідношень (14) – (17) відновлюються оригінали компонент вектора переміщень та тензора напружень.

Список використаних джерел

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. U.S. Govt. Print. Off., 1964. – 850 p.
2. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids // Appl. math. and mech. V.16. – Amsterdam, London: North-Holland publ. co., New York : Amer. Elsievier Publ. Co., 1973. – 425 p.
3. *Babayev A. E.* Nonstationary waves in solid media with the reflective surfaces. – Kiev: Naukova Dumka, 1990. – 176 p. (in Russian).
4. *Halazyuk* V. A. The method of Chebyshev – Laguerre polynomials in the mixed problem for a linear differential equation of second order with constant coefficients // Doklady Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A – 1981. – № 1. – P. 3-7.
5. *Sagomonyan A. Ya.* Stress Waves in Continuous Media. – Moscow: Moscow University, 1985. – 347 p. (in Russian).
6. *Slepyan L. I., Yakovlev Yu. S.* Integral Transforms in Unsteady Problems in Mechanics. – Leningrad: Sudostroenie, 1980. – 343 p. (in Russian).
7. *Timár I., Sulym H., Turchyn I., Shchukin V.* The Laguerre polynomials method in the dynamic problem of elasticity for a multilayered half-space // GÉP. – 2005. – No 6. – P. 5-9.

Надійшла до редколегії 15.03.13