

УДК 621.378.325

Захарченко І.В.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., с. н. с.,  
Крилов О.В.<sup>1</sup>, аспірант,  
Неділько С.Г.<sup>1</sup>, д. ф.-м. н., зав. НДЛ  
Робур Л.Й.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., доцент.

### Модельний розрахунок спектра повздовжніх мод лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка

*Побудовано модель лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка. Розраховано частотний спектр випромінювання такого лазера для найнижчих повздовжніх мод  $TEM_{00q}$  в околі максимуму коефіцієнта підсилення активного середовища.*

Ключові слова: *твердотільний лазер, інтерферометр Саньяка, модельний розрахунок.*

<sup>1</sup>Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т. Глушкова 4б, e-mail: olexandr.krylov@univ.kiev.ua

I.V. Zakharchenko<sup>1</sup>, PhD, Sen. Sci. Res.,  
O.V. Krylov<sup>1</sup>, PhD stud.,  
S.G. Nedilko<sup>1</sup>, Dr. Sci., Head of R&D Lab.,  
L.I. Robur<sup>1</sup>, PhD, Sen. Lect.

### Simulation of the longitudinal modes spectrum for the laser resonator based on Sagnac interferometer

*A model of laser resonator based on Sagnac interferometer was constructed. Emission frequency spectrum of the lowest longitudinal modes  $TEM_{00q}$  of the laser in the vicinity of the maximum gain of the active medium had been calculated.*

Key Words: *solid state laser, Sagnac interferometer, model calculation.*

<sup>1</sup>Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Hlushkova ave., 4b, e-mail: olexandr.krylov@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Резонатор на базі інтерферометра Саньяка (IS) (кільцевий резонатор) відомий тим, що забезпечує одномодову генерацію та жорстко наведену лінійну поляризацію випромінювання [1 - 3]. Необхідність розрахунку повздовжніх мод лазерного резонатора зумовлена тим, що такий резонатор може забезпечити не лише одномодовий але, водночас, і одночастотний режим генерації випромінювання [1]. В згаданій роботі, в моделі генерації динамічної ґратки в пасивному модуляторі добротності резонатора, проведено якісний аналіз умов забезпечення одночастотного режиму. В цій моделі одночастотність забезпечується значним, на декілька порядків, перевищенням товщини модулятора добротності над періодом наведеної ґратки [1]. Нещодавно нами експериментально показано можливість реалізації одночастотного режиму генерації такого лазера з пасивним модулятором добротності резонатора товщиною лише  $\sim 30 \div 50$  мкм, що і викликало потребу розробки іншого обґрунтування умов одночастотної генерації.

В цій роботі запропоновано модель опису процесів поширення випромінювання в резонаторі на базі інтерферометра Саньяка, що пояснює одночастотний режим генерації лазера без залучення ідеї наведеної динамічної ґратки.

Схему досліджуваного резонатора при парній кількості поворотних дзеркал наведено на рис. 1, а при непарній – на рис. 2.

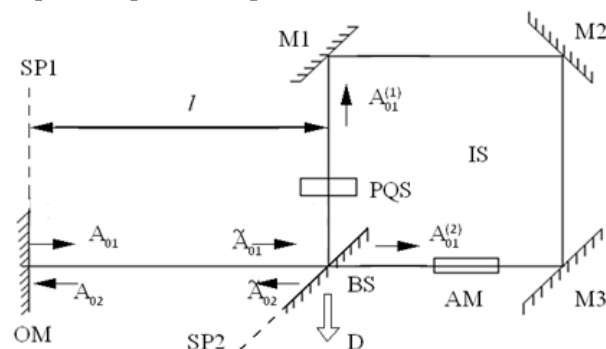


Рис. 1. Оптична схема резонатора на базі інтерферометра Саньяка при парній кількості дзеркал в кільці резонатора.

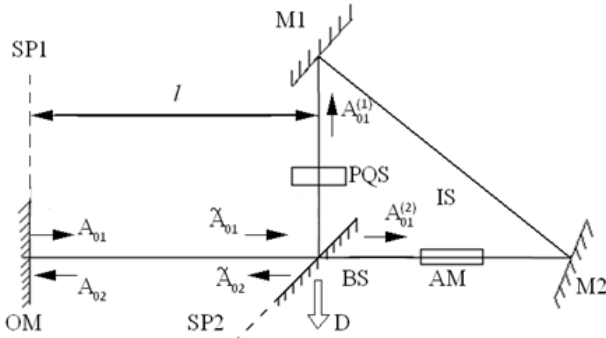


Рис. 2. Оптична схема резонатора на базі інтерферометра Саньяка при непарній кількості дзеркал в кільці резонатора.

На рис. 1 та рис. 2: OM – вихідне дзеркало резонатора (output mirror), BS (beam splitter) – світлоподільне дзеркало; M1, M2, M3 – поворотні дзеркала, PQS (passive quality switcher) – пасивний модулятор добротності резонатора, AM (active medium) – активне середовище лазера. Такий резонатор є складеним. Його можна представити у вигляді частини LR, що включає елементи OM, BS, M1, M2 і M3 у випадку парної (рис.1) та елементи OM, BS, M1 і M2 у випадку непарної кількості дзеркал в кільці інтерферометра Саньяка (рис. 2). Інша частина – це, власне, саме кільце інтерферометра Саньяка, IS, яке впливає як на інтенсивність, так і на фазу хвилі, що виходить з кільця в напрямку вихідного дзеркала OM.

Мала кутова розбіжність лазерного випромінювання у випадку використання оптичних елементів з плоскими поверхнями та майже нормальне падіння хвилі на вихідне дзеркало OM дозволяє використовувати наближення плоских хвиль при розгляді питання розповсюдження випромінювання в таких резонаторах.

Позначимо SP1 – стартову площину, що співпадає з поверхнею вихідного дзеркала OM, а SP2 – стартову площину, що лежить на поверхні світлоподільного дзеркала BS. Нехай  $A_{01}$  – амплітуда хвилі, що стартує з площини SP1, а  $A_{02}$  – амплітуда хвилі після **одного повного обходу** резонатора LR. Тоді справедливо (рис.1)

$$A_{02} = A_{01} \exp(-i2\pi l \tilde{\lambda}) r_{BS} \exp(-i2\pi L^* \tilde{\lambda}) \times \\ \times r_{M1} r_{M2} r_{M3} \tilde{t}_{BS} \exp(-i2\pi l \tilde{\lambda}) + A_{01} \times \\ \times \exp(-i2\pi l \tilde{\lambda}) t_{BS} \exp(-i2\pi L^* \tilde{\lambda}) r_{M1} r_{M2} r_{M3} \times \quad (1) \\ \times \tilde{r}_{BS} \exp(-i2\pi l \tilde{\lambda}) = A_{01} r_{M1} r_{M2} r_{M3} \times \\ \times \exp[-i2\pi(2l + L^*) \tilde{\lambda}] [r_{BS} \tilde{t}_{BS} + t_{BS} \tilde{r}_{BS}].$$

Тут:  $l$  – відстань між елементами OM та BS,  $L^*$  – оптична довжина кільця IS інтерферометра Саньяка,  $r_{BS}$  – амплітудний коефіцієнт відбивання світлоподільного дзеркала для хвилі зі сторони вихідного дзеркала OM,  $t_{BS}$  – амплітудний коефіцієнт пропускання для тієї ж хвилі. Величини  $\tilde{r}_{BS}$  та  $\tilde{t}_{BS}$  – амплітудні коефіцієнти відбивання та пропускання світлоподільного дзеркала для хвилі, що розповсюджується від кільця IS до вихідного дзеркала OM.

$$\text{За означенням } r_{BS} = |r_{BS}| \exp(-i\pi), \quad t_{BS} = |t_{BS}|, \\ \tilde{r}_{BS} = |\tilde{r}_{BS}| \exp(-i\pi), \quad \tilde{t}_{BS} = |\tilde{t}_{BS}|.$$

Якщо світлоподільну пластину BS встановлено під кутом  $\theta = 45^\circ$  до падаючого випромінювання, а **втрати на елементі BS можна знехтувати**, то виконуються наступні співвідношення:

$$|r_{BS}| = |\tilde{r}_{BS}| = |t_{BS}| = |\tilde{t}_{BS}| = \sqrt{2} / 2 \quad (2)$$

Амплітудні коефіцієнти відбивання поворотних дзеркал M1, M2, M3 можна записати наступним чином

$$r_{M1} = |r_{M1}| \exp(-i\pi), \\ r_{M2} = |r_{M2}| \exp(-i\pi), \quad (3) \\ r_{M3} = |r_{M3}| \exp(-i\pi),$$

де  $|r_{M1}| = |r_{M2}| = |r_{M3}| = 1$ , якщо знехтувати як **втрати** випромінювання на цих дзеркалах, так і незначною **неконтрольованою** зміною фази хвилі в околі точки  $-\pi$ .

З урахуванням (2) та (3) співвідношення (1) можна записати у вигляді

$$A_{02} = A_{01} \exp[-i2\pi(2l + L^*) \tilde{\lambda}] |r_N| \times \\ \times [ |r_{BS}| |\tilde{t}_{BS}| + |t_{BS}| |\tilde{r}_{BS}| ] \exp[-i2\pi(N + 1)], \quad (4)$$

при цьому величина  $r_N$  є

$$r_N = |r_N| \exp(-i\pi N), \quad (5)$$

де  $N$  - число поворотних дзеркал в кільці IS без урахування світлоподільної пластини BS. Тоді величина  $(N+1)$  - загальна кількість дзеркал в інтерферометрі IS.

За умови неперервності тангенціальних складових електромагнітного поля при відбиванні хвилі від дзеркал резонатора LR, на стартовій площині SP1 повинна виконуватись рівність

$$A_{02} = -kA_{01}, \quad (6)$$

незалежно від загальної кількості  $(N+1)$  дзеркал в кільці IS інтерферометра Саньяка. Одночасно ця рівність (6) визначає умови виникнення набору стоячих хвиль в резонаторі. Коефіцієнт  $k$  визначається величиною втрат випромінювання за один повний обхід резонатора хвилею  $A_{01}$ .

Якщо число  $(N+1)$  - парне, то співвідношення (4) з урахуванням (2), (3) має вигляд

$$A_{02} = \frac{1}{2} A_{01} \exp[-i2\pi(2l + L^*)\tilde{\lambda}]. \quad (7)$$

Тоді, з урахуванням (6), рівняння для визначення набору стоячих хвиль, що можуть існувати в резонаторі LR, є наступним

$$\exp[-i2\pi(2l + L^*)\tilde{\lambda}] = -1. \quad (8)$$

Загальний розв'язок рівняння (8) визначається співвідношенням

$$\varphi_n \equiv 2\pi(2l + L^*)\tilde{\lambda}_n + \pi = 2\pi n, n = 1, 2, 3... \quad (9)$$

Тут позначено, величина  $\varphi_n$  - фаза хвилі  $A_{02}$  на стартовій площині SP1 відносно хвилі  $A_{01}$ ,  $n$  - індекси стоячих хвиль, які можуть існувати в резонаторі LR з парним числом  $(N+1)$  дзеркал в кільці IS,  $\tilde{\lambda}_n$  - відповідні хвильові числа.

Якщо число дзеркал  $(N+1)$  в кільці резонатора LR1 є непарним, то рівняння (8) буде мати наступний вигляд

$$\exp[-i2\pi(2l + L^*)\tilde{\lambda}] = 1, \quad (10)$$

а загальним розв'язком буде

$$\varphi_n^{(odd)} \equiv 2\pi(2l + L^*)\tilde{\lambda}_n^{(odd)} = 2\pi n, n = 1, 2, 3... \quad (11)$$

де величина  $\varphi_n^{(odd)}$  - фаза хвилі  $A_{02}$  на площині SP1 відносно хвилі  $A_{01}$ , а  $\tilde{\lambda}_n^{(odd)}$  - відповідні величини хвильових чисел.

Співвідношення (5) виконується у тому випадку, коли світлоподільна пластинка BS не поглинає випромінювання і не вносить неконтрольований зсув фаз в ті хвилі, що взаємодіють з BS. Але в загальному випадку кільце інтерферометра Саньяка вносить втрати в лазерне випромінювання з наступних причин. По-перше, в кільці інтерферометра розташовується як активне лазерне середовище АМ, так і модулятор добротності резонатора (активний чи пасивний); по-друге, діелектричні покриття поворотних дзеркал кільця IS вносять неконтрольований зсув фаз при відбиванні в околі величини  $-\pi$  в ті хвилі, що поширюються назустріч одна одній в кільці. При інтерференції таких хвиль на світлоподільній пластині BS, частина випромінювання залишає резонатор у напрямку D, як показано на рис. 1. Крім того, на світлоподільному дзеркалі BS існує ще один канал втрат для хвиль  $A_{01}^{(1)}$ , які виходять з кільця IS у напрямку вихідного дзеркала ОМ. Втрати складають величину  $\frac{1}{2}$  для таких хвиль, і виходять з резонатора також в напрямку D. По цій причині з'являється коефіцієнт  $\frac{1}{2}$  у співвідношенні (7). Такі втрати, що відрізняються за фізичними причинами, можуть бути об'єднані одним терміном - внутрішні втрати  $\gamma_0$  кільця резонатора IS. Визначимо величину внутрішніх втрат  $\gamma_0$  кільця IS як [3]

$$\gamma_0 = -\ln T_0, \quad (12)$$

де величина  $T_0$  - енергетичний коефіцієнт пропускання випромінювання на довжині хвилі генерації лазера. У цьому випадку величина  $r_N$  в співвідношеннях (4), (5) визначається наступним чином

$$r_N^2 = T_0 \quad (13)$$

Тоді для інтенсивності випромінювання на площині SP1 з урахуванням (4), (5), (13) та визначення

$$I = A^* A \quad (14)$$

де величина  $A$  - комплексна амплітуда хвилі, а  $A^*$  - величина, комплексно спряжена величині  $A$ , отримаємо співвідношення

$$I_{02} = I_{01} T_0. \quad (15)$$

При цьому зауважимо, що рівність (15) виконується для довільного числа дзеркал в кільці інтерферометра IS.

Розглянемо хвилі в кільці інтерферометра Саньяка IS. Виберемо стартову площину SP2 в площині світлоподільної пластини BS. Позначимо, як показано на рис. 1 та рис. 2,  $\tilde{A}_{01}$  – амплітуда хвилі, що входить в кільце IS зі сторони дзеркала OM; величина  $\tilde{A}_{02}$  – амплітуда хвилі, що виходить з кільця IS в сторону дзеркала OM. Врахуємо, що хвиля  $\tilde{A}_{01}$  ділиться світлоподільною пластинною BS на дві хвилі з рівними амплітудами  $A_{01}^{(1)}$  та  $A_{01}^{(2)}$  відповідно на стартовій площині SP2. Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{02} &= A_{01}^{(1)} r_{BS} r_N \exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] \tilde{r}_{BS} + \\ &+ A_{01}^{(2)} r_{BS} r_N \exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] \tilde{r}_{BS} = \\ &= \tilde{A}_{01} \exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] [r_{BS} \tilde{r}_{BS} + t_{BS} \tilde{r}_{BS}] r_N. \end{aligned} \quad (16)$$

Зауважимо, що  $\tilde{A}_{01} = A_{01}^{(1)} + A_{01}^{(2)}$ . Якщо врахувати співвідношення (5), тоді у випадку **парної** кількості дзеркал в кільці IS справедливо

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{02} &= \tilde{A}_{01} \exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] \times \\ &\times \exp[-i4\pi] [r_N | [r_{BS} |\tilde{r}_{BS}| + |t_{BS} |\tilde{r}_{BS}|] ] \end{aligned} \quad (17)$$

Величина  $|r_N|$ , як і у випадку резонатора LR, визначається рівністю (13).

Фаза  $\varphi_m$  хвилі  $\tilde{A}_{02}$  на стартовій площині SP2 після **одного повного обходу кільця** інтерферометра IS визначається рівнянням  $\exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] = 1$ , звідки випливає

$$\varphi_m \equiv 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m = 2\pi m, m = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

При цьому зауважимо, що **фази** хвиль  $A_{01}^{(1)}$  та  $A_{01}^{(2)}$  на площині SP2 повинні співпадати **завжди**, незалежно від величини  $(N+I)$ , для забезпечення **умови мінімального рівня** порогу генерації.

У випадку **непарної** кількості дзеркал в кільці IS (рис.2) співвідношення (17) перетворюється в наступне за умови  $\exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}_m] = -1$ . Звідки випливає

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{02} &= -\tilde{A}_{01} \exp[-i2\pi L^* \tilde{\lambda}] \times \\ &\times |r_N| [ |r_{BS} |\tilde{r}_{BS}| + |t_{BS} |\tilde{r}_{BS}| ] \end{aligned} \quad (19)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд за умови  $\tilde{A}_{02} = \tilde{A}_{01}$

$$\varphi_m^{(odd)} \equiv 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m^{(H)} + \pi = 2\pi m, m = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

За визначенням  $I = A^* A$ , для інтенсивностей хвиль  $\tilde{A}_{01}$  і  $\tilde{A}_{02}$  з урахуванням (13) та (17) виконується співвідношення

$$\tilde{I}_{02} = \tilde{I}_{01} T_0. \quad (21)$$

Таким чином, резонатор на базі інтерферометра Саньяка, що показано на рис.1, виявляється можливим представити у вигляді двох зв'язаних між собою резонаторів, на основі розглянутого поширення хвиль в такому резонаторі: LR, IS. Розраховані амплітудні та фазові співвідношення наборів стоячих хвиль, що можуть існувати в таких резонаторах. При цьому розглядалися лише найнижчі повздовжні моди вигляду TEM<sub>00q</sub>. Очевидно, що частотний спектр випромінювання  $I(\tilde{\lambda})$ , який виходить з такого резонатора, є добутком величин

$$I(\tilde{\lambda}) = I_{LR} \cdot I_{IS} \cdot K(\tilde{\lambda}), \quad (22)$$

де величини  $I_{LR}$ ,  $I_{IS}$  – інтенсивності випромінювання, що формуються в частинах LR та IS – відповідно;  $K(\tilde{\lambda})$  – частотний коефіцієнт підсилення активного лазерного середовища АМ.

Для розрахунку величин із співвідношення (22) використаємо наступну процедуру. Поставимо у відповідність резонатору LR інтерферометр Фабрі – Перо (FP) і розрахуємо пропускання такого інтерферометра в залежності від частоти випромінювання. При цьому роль дзеркал FP виконує вихідне дзеркало резонатора OM, відстань між дзеркалами інтерферометра відповідає оптичній довжині резонатора, а поглинання випромінювання в FP визначається внутрішніми втратами  $\gamma_0$  резонатора LR. Причиною для такої відповідності є той факт, що кути падіння лазерного випромінювання на кінцеві дзеркала резонатора близькі до нормальних, тому для опису процесу розподілу хвиль в плоскому резонаторі можуть бути використані методи багатохвильової інтерференції [4, 5].

В інтерферометрі IS процеси поширення хвиль описуються в термінах двопробевої інтерференції [4, 5].

Для розрахунку частотного спектру випромінювання повздовжніх мод резонатора LR скористаємося формулами Ейрі для інтерферометра FP [4]. Тоді справедливо (в нормованих величинах)

$$I_{LR} = \frac{T_0(1 - R_{OM})}{1 + R_{OM}^2 T_0^2 - 2T_0 R_{OM} \cos \varphi_n}, \quad (23)$$

де  $\varphi_n$  визначається із (9) і (11),  $R_{OM}$  – енергетичний коефіцієнт відбивання вихідного дзеркала OM. Для інтерферометра IS, як впливає із [4, 5],

$$I_{IS} = T_0 \cos^2 \varphi_m, \quad (24)$$

де фаза хвилі на виході із інтерферометра IS  $\varphi_m = 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m$ , для **парного**, і  $\varphi_m^{(odd)} = 2\pi L^* \tilde{\lambda}_m + \pi$  - для **непарного** значення  $(N+1)$ .

Спектр смуги люмінесценції активного середовища описується формулою Лоренца:

$$K(\tilde{\lambda}) = \frac{(0.5\Delta\tilde{\lambda})^2}{(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0)^2 + (0.5\Delta\tilde{\lambda})^2}, \quad (25)$$

де  $\Delta\tilde{\lambda}$  – півширина контуру лінії люмінесценції;  $\tilde{\lambda}_0$  – положення максимуму лінії люмінесценції. У нашому випадку як AM використовується  $Y_3Al_5O_{12} - Nd^{3+}$ , для якої  $\Delta\tilde{\lambda} = 6.5 \text{ см}^{-1}$ , а величина  $\tilde{\lambda}_0 = 9396.55 \text{ см}^{-1}$  [6]. Очевидно, що контур люмінесценції AM співпадає з контуром коефіцієнта підсилення активного середовища, який позначений величиною  $K(\tilde{\lambda})$ .

Отримані співвідношення дозволяють розрахувати частотний спектр найнижчих повздовжніх мод  $TEM_{00q}$  лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка. При цьому фазові співвідношення для хвиль в кільці IS з **парною** та **непарною** кількістю дзеркал в кільці – є різними.

На рис. 3 та рис. 4 показано спектри пропускання  $T_{IFP}$  мультиплекса інтерферометрів, що моделює резонатор на базі інтерферометра Саньяка з довільним числом дзеркал в кільці IS в околі максимуму  $\tilde{\lambda}_0$  коефіцієнта підсилення  $K(\tilde{\lambda}_0)$  активного лазерного середовища AM. В

цих спектрах проявляється суттєве розрідження спектра повздовжніх резонаторних мод. При зміні кількості дзеркал в кільці резонатора з **парної** на **непарну** відбувається зміщення спектра, як цілого, на величину  $\sim 0,02 \text{ см}^{-1}$  при  $l = 7,3 \text{ см}$  (рис. 4а) та  $0,1 \text{ см}^{-1}$  при  $l = 13 \text{ см}$  (рис. 4б).

Варіацією енергії накачування активного середовища можна виділити одну повздовжню моду, інтенсивність якої є максимальною. Як видно, інтенсивність цієї моди помітно перевищує за значенням інтенсивність сусідніх мод. Саме тому є можливість за рахунок деякого перевищення інверсії над її пороговим рівнем отримати генерацію лише на одній повздовжній резонаторній моді.

На рис. 3. показано спектр пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній кількості дзеркал в IS при величині  $l = 7,3$

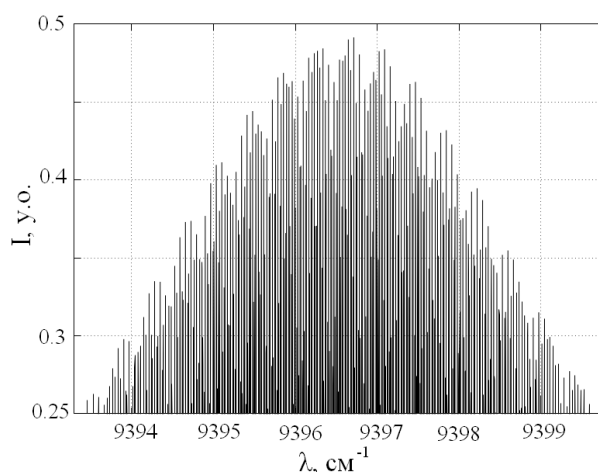


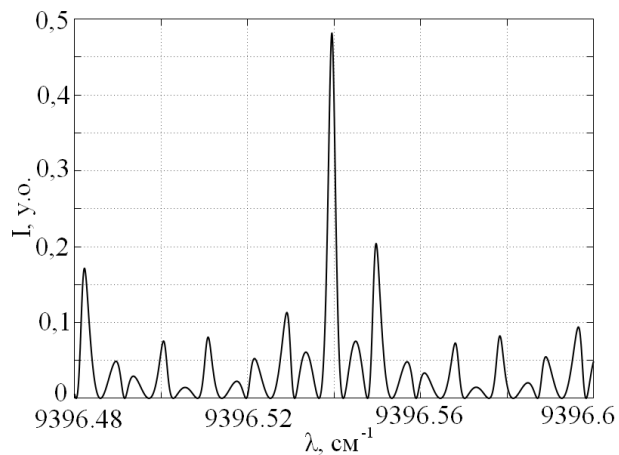
Рис. 3. Спектр пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній кількості дзеркал в IS при величині  $l = 7,3$  при різних масштабах.

## Висновки

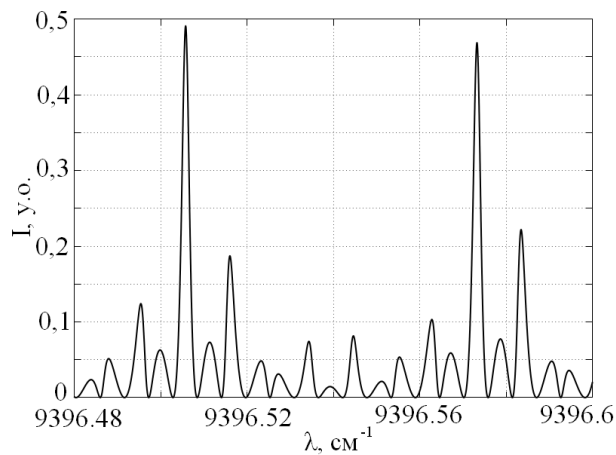
Побудовано модель мультиплексу інтерферометрів, яка визначає селективні можливості лазерного резонатора на базі інтерферометра Саньяка.

З'ясовано можливість суттєвого розрідження спектра найнижчих повздовжніх резонаторних мод без застосування додаткових оптичних елементів.

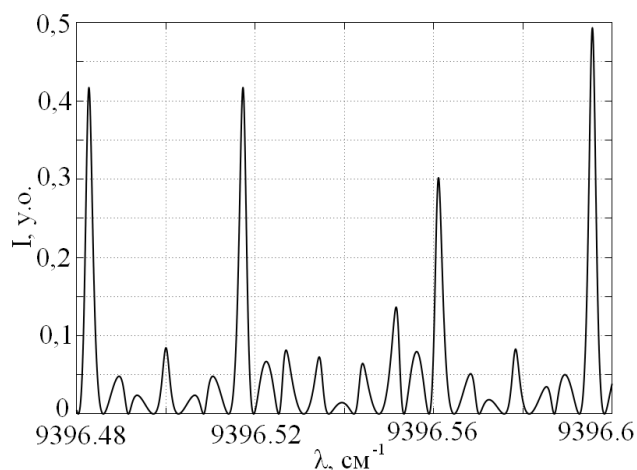
Розроблена теоретична модель пояснює можливість реалізації одночастотного режиму генерації лазера з резонатором на базі інтерферометра Саньяка.



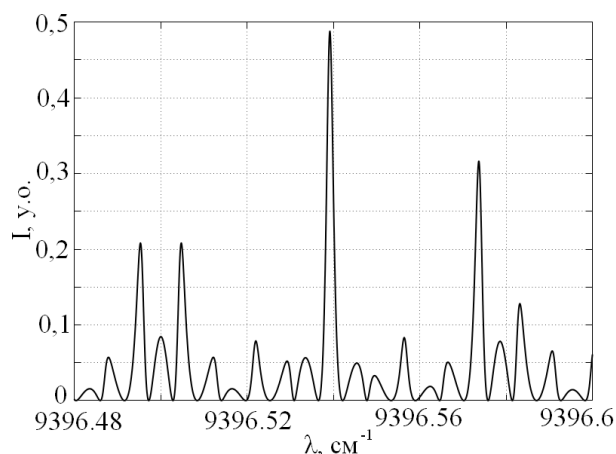
1a



2a



1б



2б

Рис. 4. Спектри пропускання мультиплекса інтерферометрів при парній (а) та непарній (б) кількості дзеркал в ІС при величині  $l = 7,3$  (1) та 13 см (2).

#### Список використаних джерел

1. Grabovsky V. V., Prokhorenko V. I., Jatskiv D. Y. Features of single-frequency generation of laser with resonator based on Sagnac interferometer // Quantum electronic, 22, №4, 1995. – p.361 – 364. (in Russian)
2. Zakharchenko I. V., Krylov O. V., Nedilko S. G., Robur L. J. Optimization of parameters of lasers with resonator based on Sagnac interferometer // Visn., Ser. Fiz. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011, №12, p. 15 – 19. (in Ukrainian)
3. Koshelenko V. P., Krylov O. V., Zakharchenko I. V., Nedilko S. G. Experimental determination of internal losses of solid state pulse laser // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2010., №3; p.261 -264. (in Ukrainian)
4. Born M., Wolf E. Principles of optics. // New York, Pergamon press - 1968. – 856p. (in English)
5. Borbat A. M., Gorban I. S., Okhrimenko B. A. ... Optical measurements // Kyiv, Tekhnika - 1967. – 419p. (in Russian)
6. Zverev G. M., Holyaev J. D., Shalaev E. A. and other. YAG lasers with neodymium // Moskow: Radio i svyaz - 1985–144 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 24.03.2013