УДК 517.929

О. А. Сивак, к.ф.-м.н.

Неперервні розв'язки лінійних функціонально-різницевих рівнянь та їх властивості

В даній роботі досліджується структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь. Запропоновано метод побудови загального неперервного розв'язку таких систем рівнянь.

Ключові слова: функціонально-різницеві рівняння.

Національний технічний університет України "КПІ
03056 Київ, Україна, просп. Перемоги, 37

O. A. Syvak, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

The continuous solutions of linear of functional difference equations and their properties

The structure of the set of continuous solutions of systems of linear functional difference equations has been investigated. The method of construction of general continuous solution such of systems equations has been proposed.

Key Words: functional difference equations

The National Technical University of Ukraine "KPI"
03056 Kyiv, Ukraine, 37, Peremogy aven.

E-mail: olena_sivak@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

1. Постановка задачі. Основи теорії лінійних різницевих і q-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t),$$
$$x(qt) = b(t)x(t),$$

де всі елементи $a_{ij}(t),\ i,j = 1,...n$, матриці $a(t) = (a_{ij}(t))$ є аналітичними функціями в деякому околі точки $t = \infty$, були розроблені в працях Біркгофа і його учнів. Більше цього, в $[1,2]$ було побудовано представлення загального розв'язку таких систем рівнянь і досліджено його структуру. В подальшому ці системи розглядалися багатьма математиками (див.$[3-5]$ і наведену в них літературу) і в даний час багато питань їх теорії достатньо добре вивчені при більш загальних припущеннях відносно матриці $a(t)$. У зв'язку з цим природно виникло ряд питань про одержання аналогічних результатів для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)x(qt), \tag{1}$$

де $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $a(t), b(t)-$деякі дійсні матриці розмірності $n \times n$ і q $-$ деяка дійсна стала. Особливо важливим серед них є питання побудови загального неперервного розв'язку і дослідження його структури. Саме це питання і є основним об'єктом дослідження даної статті.

2. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1) $1 < a_* \le a(t) \le a^* < +\infty$, $0 < q < 1$,

2) $\triangle = \dfrac{b}{a_* - a^{*q}} < 1$,
де $\sup\limits_t |b(t)| = b$.

Тоді рівняння (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що функціонально-різницеве рівняння (1) має розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t),\ i = 0, 1, ..., -$деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2) в (1), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = a(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t),\ i = 0, 1, ...,$ задовольняють послідовність рівнянь

$$x_0(t+1) = a(t)x_0(t), \tag{3_0}$$

$$x_i(t+1) = a(t)x_i(t) + b(t)x_{i-1}(qt),\ i = 1, 2, ..., \tag{3_i}$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком рівняння (1). Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку рівняння (3_0) та умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|x_0(t)| \le Ma^{*t}. \tag{4_0}$$

Оскільки ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\left[\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right]\times$$

$$\times b(t+j)\ x_{i-1}(q(t+j)),\ i=1,2,... \qquad (4_i)$$

є формальними розв'язками відповідних рівнянь (3_i), $i = 1,2,...$, (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (4_i), $i = 1,2,...$, в (3_i), $i = 1,2,...$), то приймаючи до уваги (4_0) і умови 1, 2, покажемо, що ряди (4_i), $i = 1,2,...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,...$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M\triangle^i a^{*qt}, i=1,2,.... \qquad (5)$$

Справді, враховуючи (4_0), (4_1), маємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right| |b(t+j)|\times$$

$$\times|x_0(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)}\ b\ M\ a^{*q(t+j)} \leq$$

$$\leq M\,b\,a^{*qt}\,a_*^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(a_*^{-1}\,a^{*q})^j \leq M\,\frac{b}{a_*-a^{*q}}\,a^{*qt} =$$

$$= M\Delta a^{*qt},$$

тобто оцінка (5) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (5) доведена уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно (4_{i+1}) і (5) маємо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right| |b(t+j)|\times$$

$$\times|x_i(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_*^{-(j+1)}\ b\ M\ \Delta^i\ a^{*q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq M\ \Delta^i\ b\ a_*^{-1}\ a^{*q^2t}\sum_{j=0}^{\infty}(a_*^{-1}\ a^{*q^2})^j \leq$$

$$\leq M\ \Delta^i\ b\ a_*^{-1}\ a^{*qt}\sum_{j=0}^{\infty}(a_*^{-1}a^{*q})^j \leq$$

$$\leq M\ \Delta^i\ \frac{b}{a_*-a^{*q}}\ a^{*qt} = M\ \Delta^{i+1}\ a^{*qt}.$$

Отже, оцінка (5) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Звідси випливає, що ряди (4_i), $i = 1,2,...$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,...$, для яких має місце оцінка (5). В силу (5), ряд (2) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta},$$

і є розв'язком рівняння (1).

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$y(t+1) = a(t)y(t) + b(t)y(qt) + f(t), \qquad (6)$$

де $a(t), b(t), f(t) : R \to R$ та дослідимо структуру множини неперервних розв'язків при наступних умовах:

1) $1 < a_* \leq a(t) \leq a^* < +\infty$, $0 < q < 1$;

2) функції $b(t), f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ і такими, що $\sup\limits_t |b(t)| = b, \sup\limits_t |f(t)| = f$;

3) $\dfrac{b}{a_*-1} = \theta < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1-3, то рівняння (6) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \qquad (7)$$

де $y_i(t)$, $i = 0,1,...,-$ деякі неперервні обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (7) в (6), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = a(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + b(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0,1,...$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$y_0(t+1) = a(t)y_0(t) + f(t), \qquad (8_0)$$

$$y_i(t+1) = a(t)y_i(t) + b(t)y_{i-1}(qt),\ i=1,2,..., \qquad (8_i)$$

то ряд (7) є формальним розв'язком рівняння (6).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$y_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j} a^{-1}(t+i)\right) f(t+j) \qquad (9_0)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє рівняння (8_0) і виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq \frac{f}{a_*-1} = f'. \qquad (10_0)$$

Приймаючи до уваги (9_0), (10_0), можна послідовно показати, що ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\left[\prod_{p=0}^{j} a^{-1}(t+p)\right] b(t+j)\times$$
$$\times y_{i-1}(q(t+j)),\ i=1,2,..., \qquad (9_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють відповідні рівняння (8_i), $i = 1,2,...$, і виконуються співвідношення

$$|\overline{y}_i(t)| \le f'\theta^i,\ i=1,2,\dots . \qquad (10_i)$$

Таким чином, оскільки функції $y_i(t)$, $i = 0,1,...$, що визначаються за допомогою співвідношень (9_i), $i = 0,1,...$, задовольняють умови (10_i), $i = 0,1,...$, то ряд (7) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (6) і задовольняє при всіх $t \in R$ умові

$$|y(t)| \le \frac{f'}{1-\theta}\ .$$

Теорему 2 доведено.

Дослідимо питання побудови загального розв'язку рівняння (1) при $t \le 0$ та при виконанні наступних умов:

1) $0 < a_* \le a(t) \le a^* < 1$, $0 < q < 1$,

2) $\widetilde{\triangle} = \dfrac{b}{a^{*q} - a^*} < 1$,

де $\sup\limits_t |b(t)| = b$.

Покажемо, що функціонально-різницеве рівняння (1) має розв'язок у вигляді ряду (2). Підставляючи (2) в (1), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = a(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0,1,...$, задовольняють послідовності рівнянь

$$x_0(t+1) = a(t)x_0(t), \qquad (11_0)$$

$$x_i(t+1) = a(t)x_i(t) + b(t)x_{i-1}(qt),\ i=1,2,..., \qquad (11_i)$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком рівняння (1). Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку рівняння (11_0) та умову 1, можна показати, що існує додатна стала $\widetilde{M}$ така, що при всіх $t \le 0$ виконується оцінка

$$|x_0(t)| \le \widetilde{M} a^{*t}. \qquad (12_0)$$

Оскільки ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)\, b(t-j)\, x_{i-1}(q(t-j)),\ i=1,2,..., \qquad (12_i)$$

де $c_j(t) = \prod\limits_{i=1}^{j-1} a(t-i)$, $c_1(t) = 1$ є формальними розв'язками відповідних рівнянь (11_i), $i = 1,2,...$, (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (12_i), $i = 1,2,...$, в (11_i), $i = 1,2,...$), то приймаючи до уваги (12_0) і умови 1, 2, покажемо, що ряди (12_i), $i = 1,2,...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,...$, для яких при всіх $i \ge 1$, $t \le 0$ виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le \widetilde{M}\widetilde{\triangle}^i a^{*qt}, i=1,2,\dots . \qquad (13)$$

Справді, враховуючи (12_0), (12_1), маємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(t)|\ |b(t-j)|\ |x_0(q(t-j))| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)}\ b\ \widetilde{M}\ a^{*q(t-j)} \le \widetilde{M}\ b\ a^{*qt}\ a^{*-1}\times$$
$$\times \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q)j} \le \widetilde{M}\ \frac{b}{a^{*q}-a^*}\ a^{*qt} = M\widetilde{\Delta} a^{*qt},$$

тобто оцінка (13) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (13) доведена уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно (12_{i+1}) і (13) маємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(t)|\ |b(t-j)|\ |x_i(q(t-j))| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(j-1)}\ b\ \widetilde{M}\ \widetilde{\Delta}^i\ a^{*q(q(t-j))} \le$$
$$\le \widetilde{M}\ \widetilde{\Delta}^i\ b\ a^{*-1}\ a^{*q^2 t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q^2)j} \le$$
$$\le \widetilde{M}\ \widetilde{\Delta}^i\ b\ a^{*-1}\ a^{*qt} \sum_{j=1}^{\infty} a^{*(1-q)j} \le$$
$$\le \widetilde{M}\ \widetilde{\Delta}^i\ \frac{b}{a^{*q}-a^*}\ a^{*qt} = \widetilde{M}\ \widetilde{\Delta}^{i+1}\ a^{*qt}.$$

Отже, оцінка (13) виконується при всіх $i \ge 1$, $t \le 0$. Звідси випливає, що ряди (12_i), $i = 1,2,...$, рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,...$, для яких має місце оцінка (13). В силу (13), ряд (2) рівномірно збігається при $t \le 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \leq \frac{\widetilde{M}}{1-\Delta},$$

і є розв'язком рівняння (1). Тим самим доведена наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді рівняння (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \leq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.*

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$y(t+1) = a(t)y(t) + b(t)y(qt) + f(t), \qquad (14)$$

де $a(t), b(t), f(t) : R \to R$ та дослідимо структуру множини неперервних розв'язків при наступних умовах:

1) $0 < a_* \leq a(t) \leq a^* < 1$, $0 < q < 1$;

2) функції $b(t), f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ і такими, що $\sup\limits_t |b(t)| = \widetilde{b}, \sup\limits_t |f(t)| = \widetilde{f}$;

3) $\dfrac{\widetilde{b}}{1-a^*} = \widetilde{\theta} < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1-3, то рівняння (14) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \qquad (15)$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ – деякі неперервні обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (15) в (14), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = a(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + b(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності рівнянь

$$y_0(t+1) = a(t)y_0(t) + f(t), \qquad (16_0)$$

$$y_i(t+1) = a(t)y_i(t) + b(t)y_{i-1}(qt), \ i = 1, 2, \ldots, \qquad (16_i)$$

то ряд (15) є формальним розв'язком рівняння (14).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) f(t-j), \qquad (17_0)$$

де $c_j(t) = \prod\limits_{i=1}^{j-1} a(t-i)$, $c_1(t) = 1$ рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє рівняння (16_0) і виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq \frac{\widetilde{f}}{1-a^*} = f'. \qquad (18_0)$$

Приймаючи до уваги (17_0), (18_0), можна послідовно показати, що ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)\, b(t-j)\, y_{i-1}(q(t-j)), \ i = 1, 2, \ldots, \qquad (17_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють відповідні рівняння (16_i), $i = 1, 2, \ldots,$ і виконуються співвідношення

$$|y_i(t)| \leq f' \, \widetilde{\theta}^i, \ i = 1, 2, \ldots\,. \qquad (18_i)$$

Таким чином, оскільки функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ що визначаються за допомогою співвідношень (17_i), $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють умови (18_i), $i = 0, 1, \ldots,$ то ряд (15) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (14) і задовольняє при всіх $t \in R$ умові

$$|y(t)| \leq \frac{f'}{1-\widetilde{\theta}}\,.$$

Теорему 4 доведено.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1911, 12, pp. 243 – 284.

2. Mitropolsky Y. A., Samoilenko A. M., Martinyuk D.I. Systems of Evolution Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients.— Kiev:Naukova Dumka, 1985. — 216 P.

3. Pelyukh G. P. On the theory of systems of linear difference equations with continuous argument // Doklady Akademii Nauk — 2006, vol. 407, No. 5. — pp. 600 – 603.

4. Pelyukh G.P. About the structure of the general of continuous solution of systems of linear difference equations with continuous argument // Reports of the National Academy of Science of Ukraine. — 2007, No. 1. — pp. 29 — 33.

5. Pelyukh G.P., Syvak O.A. About of the structure of the set of continuous solutions of functional difference equations with linearly reformed argument // Nonlinear Oscillations. — 2010, vol. 13, No. 1. — pp. 75 — 95.

Надійшла до редколегії 24.10.2013