УДК 519.23

Литвиненко І. О.[1], аспірант,
Лебєдєв Є. О.[2], д.ф.-м.н., проф.

Оптимізація системи обслуговування з багатьма виконавцями та з рекурентним потоком заявок різних типів

В роботі розглядається система обслуговування з багатьма виконавцями до якої надходять заявки, що потребують різного часу виконання. Час обслуговування вважається експоненціально розподіленим з параметром, що залежить від типу заявки. Вхідний потік вважається довільним рекурентним потоком заявок.

В результаті було описано спосіб знаходження стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування та наведено приклад оптимізації параметрів вхідних потоків системи з метою ефективного завантаження наявних виконавців.

Ключові слова: система обслуговування, рекурентний потік, стаціонарні ймовірності.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: igor@ert.org.ua

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: leb@unicyb.kiev.ua

I. O. Lytvynenko[1], PhD student,
E. O. Lebedev[2], Doctor of Sciences, Full Professor.

Optimization of the queuing system with many servers and with recurrent flow of jobs of different types

This paper considers a queuing system with many servers which receives jobs that require different service time. The service time is exponentially distributed with parameter depending on the type of the job. The input flow is assumed to be an arbitrary recurrent process of events.

As a result it was described a way to find the stationary probabilities of the service process. At last it was provided an example of input flows optimization in order to make servers to be loaded effectively.

Key Words: queuing system, recurrent flow, stationary probabilities.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: igor@ert.org.ua

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: leb@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. т. н. Заславський В. А.

Розглянемо систему обслуговування з M виконавцями та одним потоком заявок, який є потоком відновлення, де інтервали часу між заявками мають функцію розподілу $F(x)$. Кожна заявка з ймовірністю p_i $(i = 1, 2)$ потребує для обробки одного виконавця на експоненціально розподілений час з параметром μ_i. Якщо всі M виконавців зайняті, заявка отримує відмову в обслуговуванні та губиться.

Випадок з одним типом заявок розглянуто на роботі [1]. Випадок з різними заявками але з пуассонівським потоком на вході розглянуто в роботі [2]. В даній роботі узагальнюється результат роботи [1] на випадок двох типів заявок, що потребують різний середній час для обслуговування. Опишемо роботу цієї системи випадковим процесом

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t)) \in \left\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le M,\ x_1, x_2 = \overline{0, M}\right\},$$

де $X_i(t)$ – кількість виконавців, зайнятих заявками i-го типу в момент часу $t \ge 0$.

Позначимо τ_n — час надходження n-ї заявки. Тоді $(\tau_{n+1} - \tau_n)$ має функцію розподілу $F(x)$.

Позначимо $\zeta_n = X(\tau_n - 0)$. Тобто $\zeta_n = (\zeta_n^1, \zeta_n^2)$ — це стан системи безпосередньо перед надходженням n-ї заявки.

Розглянемо

$$A^n_{r_1,r_2}(s) = \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}\binom{\zeta_n^1}{r_1}\binom{\zeta_n^2}{r_2}\right\}.$$

Для подальшого аналізу нам потрібні декілька допоміжних тверджень.

Лема 1 ([1])**.** Якщо $\xi(M, p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами M та $p \in (0, 1)$, матимемо

$$\mathrm{E}\left\{\binom{M - \xi(M,p)}{r}\right\} = \mathrm{E}\left\{\binom{\xi(M,1-p)}{r}\right\} = (1-p)^r\binom{M}{r}.$$

Лема 2. Нехай p_{k_1,k_2} – деякий розподіл ймовірностей:

$$p_{k_1,k_2} \geq 0, k_1, k_2 = \overline{0, M}, k_1 + k_2 \leq M, \sum_{k_1=0}^{M} \sum_{k_2=0}^{M-k_1} p_{k_1,k_2} = 1.$$

Якщо

$$b_{r_1,r_2} = \sum_{k_1=r_1}^{M-r_2} \sum_{k_2=r_2}^{M-k_1} \binom{k_1}{r_1} \binom{k_2}{r_2} p_{k_1,k_2}$$

(r_1, r_2)-й біноміальний момент цього розподілу, тоді

$$p_{k_1,k_2} = \sum_{r_1=k_1}^{M-k_2} \sum_{r_2=k_2}^{M-r_1} (-1)^{r_1-k_1+r_2-k_2} \binom{r_1}{k_1} \binom{r_2}{k_2} b_{r_1,r_2}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільних d_k та $0 \leq r \leq m$ з

$$c_r = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} d_k \tag{1}$$

випливає

$$d_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} c_r. \tag{2}$$

Підставивши вираз для c_r в формулу для d_k, отримаємо

$$d_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \sum_{i=r}^{m} \binom{i}{r} d_i = \sum_{i=k}^{m} d_i \sum_{r=k}^{i} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{i}{r}.$$

Для доведення (1)-(2) достатньо показати, що

$$\sum_{r=k}^{i} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{i}{r} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

Випадок $i = k$ є очевидним. Розглянемо випадок $i > k$.

$$\sum_{r=k}^{i} (-1)^{r-k} \binom{i}{r} \binom{r}{k} = \sum_{r=k}^{i} (-1)^{r-k} \binom{i}{k} \binom{i-k}{r-k} =$$
$$= \binom{i}{k} \sum_{r=0}^{i-k} (-1)^r \binom{i-k}{r} = \binom{i}{k} (1-1)^{i-k} = 0.$$

Отже маємо (1)-(2) доведеним. Тепер до

$$b_{r_1,r_2} = \sum_{k_1=r_1}^{M-r_2} \binom{k_1}{r_1} \sum_{k_2=r_2}^{M-k_1} \binom{k_2}{r_2} p_{k_1,k_2} \tag{3}$$

застосуємо двічі перетворення (1)-(2), з чого й отримаємо твердження леми. ∎

Лема 3 ([3, с. 212])**.** Якщо для деякої послідовності x_n існує $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, тоді

$$\lim_{w\to 1} (1-w) \sum_{i=0}^{\infty} x_i w^i = x.$$

Теорема 1. $A^n_{r_1,r_2}(s)$ задовольняють наступним співвідношенням

$$A^n_{0,0}(s) = \left(\int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x) \right)^n = \phi(s)^n$$

$$A^{n+1}_{r_1,r_2}(s) = \phi(s + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) \Bigg(A^n_{r_1,r_2}(s) +$$
$$+ p_1 A^n_{r_1-1,r_2}(s) + p_2 A^n_{r_1,r_2-1}(s) -$$
$$- \sum_{a_i : a_1+a_2=M} \left(p_1 \binom{a_1}{r_1-1} \binom{a_2}{r_2} + \right.$$
$$\left. + p_2 \binom{a_1}{r_1} \binom{a_2}{r_2-1} \right) A^n_{a_1,a_2}(s) \Bigg).$$

Доведення. Розглянемо

$$\mathrm{E}\left\{ e^{-s\tau_{n+1}} \binom{\zeta^1_{n+1}}{r_1} \binom{\zeta^2_{n+1}}{r_2} | \zeta_n = (a_1, a_2), \tau_{n+1} - \tau_n = x \right\} =$$
$$= e^{-sx} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, a_2) \} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{2} p_k \mathrm{E} \left\{ \binom{\zeta^k_{n+1}}{r_k} \binom{a_{3-k} - \xi(a_{3-k}, 1 - e^{-\mu_{3-k} x})}{r_{3-k}} \right.$$
$$\left. | \zeta_n = (a_1, a_2), \tau_{n+1} - \tau_n = x, n\text{-а заявка має тип } k \right\},$$

де $\xi(k, p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами k та $p \in (0, 1)$.

Перетворимо останній вираз, використовуючи лему 1. Отримаємо

$$\mathrm{E}\left\{ e^{-s\tau_{n+1}} \binom{\zeta^1_{n+1}}{r_1} \binom{\zeta^2_{n+1}}{r_2} | \zeta_n = (a_1, a_2), \tau_{n+1} - \tau_n = x \right\} =$$
$$= e^{-(s+\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) x} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, a_2) \} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{2} p_k \binom{a_{3-k}}{r_{3-k}} d(a_k, r_k),$$

де

$$d(a_k, r_k) = \begin{cases} \binom{a_k + 1}{r_k}, & a_1 + a_2 < M, \\ \binom{a_k}{r_k}, & a_1 + a_2 = M. \end{cases}$$

Якщо час очікування заявки має функцію розподілу $F(x)$ та $\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x)$, тоді

$$\mathrm{E}\left\{ e^{-s\tau_{n+1}} \binom{\zeta^1_{n+1}}{r_1} \binom{\zeta^2_{n+1}}{r_2} | \zeta_n = (a_1, a_2) \right\} =$$
$$= \phi(s + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) \, \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, a_2) \} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{2} p_k \binom{a_{3-k}}{r_{3-k}} d(a_k, r_k).$$

Помножимо рівність на $\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1, a_2)\}$ та просумуємо по $a_1, a_2 \geq 0 : a_1 + a_2 \leq M$. Матимемо

$$A^{n+1}_{r_1,r_2}(s) = \phi(s + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{2} p_k \Bigg(\sum_{a_i : a_1+a_2+1 \leq M} \binom{a_{3-k}}{r_{3-k}} \left(\binom{a_k}{r_k} + \binom{a_k}{r_k - 1} \right) \cdot$$
$$\cdot \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, a_2) \} \mathrm{P}\{ \zeta_n = (a_1, a_2) \} +$$
$$+ \sum_{a_i : a_1+a_2+1 > M} \binom{a_1}{r_1} \binom{a_2}{r_2} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, a_2) \} \cdot$$
$$\cdot \mathrm{P}\{ \zeta_n = (a_1, a_2) \} \Bigg).$$

Враховуючи, що

$$A^n_{r_1,r_2}(s) = \sum_{a_i:a_1+a_2\le M} \binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2}\cdot$$
$$\cdot \mathrm{E}\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,a_2)\}\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,a_2)\}$$

та використавши лему 2, отримаємо твердження теореми. ■

Наслідок 1. Генератрису для $A^n_{r_1,r_2}(s)$

$$\Phi_{r_1,r_2}(s,w) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n_{r_1,r_2}(s)w^n \tag{4}$$

можна визначити наступними співвідношеннями

$$\Phi_{0,0}(s,w) = \frac{w\phi(s)}{1-w\phi(s)}$$

$$\Phi_{r_1,r_2}(s,w) = \frac{w\phi(s+\mu_1r_1+\mu_2r_2)}{1-w\phi(s+\mu_1r_1+\mu_2r_2)}\cdot\Bigg(\binom{i_0^1}{r_1}\binom{i_0^2}{r_2}+$$
$$+p_1\Phi_{r_1-1,r_2}(s)+p_2\Phi_{r_1,r_2-1}(s)-$$
$$-\sum_{a_i:a_1+a_2=M}\left(p_1\binom{a_1}{r_1-1}\binom{a_2}{r_2}+p_2\binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\Phi_{a_1,a_2}(s)\Bigg),$$

де i_0^1 та i_0^2 – кількість зайнятих виконавців в момент часу $t=0$ заявками першого та другого типів відповідно.

Доведення.

$$\Phi_{0,0}(s,w) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n_{0,0}(s)w^n = \sum_{n=1}^{\infty}\phi(s)^n w^n = \frac{w\phi(s)}{1-w\phi(s)}$$

Рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,r_2}(s,w)$ отримується перетворенням відповідного рекурентного співвідношення для $A^n_{r_1,r_2}(s)$, отриманого в теоремі 1. ■

Теорема 2. Біноміальні моменти

$$B_{r_1,r_2} = \sum_{a_i:a_1+a_2\le M}\binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2}P_{a_1,a_2}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,a_2} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,a_2)\}$$

процесу $\zeta_n = (\zeta_n^1,\zeta_n^2)$ задовольняють наступним співвідношенням:

$$B_{0,0} = 1$$

$$B_{r_1,r_2} = \frac{\phi(\mu_1r_1+\mu_2r_2)}{1-\phi(\mu_1r_1+\mu_2r_2)}\cdot$$
$$\cdot\Bigg(p_1B_{r_1-1,r_2}+p_2B_{r_1,r_2-1}-$$
$$-\sum_{a_i:a_1+a_2=M}\left(p_1\binom{a_1}{r_1-1}\binom{a_2}{r_2}+p_2\binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot B_{a_1,a_2}\Bigg).$$

Доведення. Використовуючи лему 3, маємо

$$B_{r_1,r_2} = \lim_{n\to\infty}B^n_{r_1,r_2} = \lim_{w\to1}(1-w)\sum_{i=1}^{\infty}B^i_{r_1,r_2}w^i =$$
$$= \lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,r_2}(0,w).$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,r_2}(0,w)$ з наслідку 1, маємо

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,r_2}(0,w) =$$
$$= \frac{\phi(\mu_1r_1+\mu_2r_2)}{1-\phi(\mu_1r_1+\mu_2r_2)}\cdot\Bigg(p_1\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1-1,r_2}(0,w)$$
$$+p_2\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,r_2-1}(0,w)-$$
$$-\sum_{a_i:a_1+a_2=M}\left(p_1\binom{a_1}{r_1-1}\binom{a_2}{r_2}+p_2\binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{a_1,a_2}(0,w)\Bigg),$$

звідки отримуємо рекурентне співвідношення для B_{r_1,r_2}. Розглянемо випадок $B_{0,0}$ окремо.

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{0,0}(0,w) = \lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\phi(0)}{1-w\phi(0)} =$$
$$= \lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)}{1-w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)} = \lim_{w\to1}\frac{(1-w)w}{1-w} = 1.$$

Що і треба було довести. Теорему доведено. ■

Лема 4. Якщо $f(0,0)=0$, то розв'язок рекурентного співвідношення

$$b_{r_1,r_2} = c(r_1,r_2)\left(c_1b_{r_1-1,r_2}+c_2b_{r_1,r_2-1}\right)+f(r_1,r_2)$$

можна подати у вигляді

$$b_{r_1,r_2} = d_{0,0,r_1,r_2}c_1^{r_1}c_2^{r_2}b_{0,0}+$$
$$+\sum_{a_1=0}^{r_1}\sum_{a_2=0}^{r_2}d_{a_1,a_2,r_1,r_2}f(a_1,a_2)c_1^{r_1-a_1}c_2^{r_2-a_2}, \tag{5}$$

де

$$d_{a_1,a_2,a_1,a_2} = 1$$
$$d_{a_1,a_2,a_1,r_2} = c(a_1,r_2)d_{a_1,a_2,a_1,r_2-1}$$
$$d_{a_1,a_2,r_1,a_2} = c(r_1,a_2)d_{a_1,a_2,r_1-1,a_2}$$
$$d_{a_1,a_2,r_1,r_2} = c(r_1,r_2)(d_{a_1,a_2,r_1-1,r_2}+d_{a_1,a_2,r_1,r_2-1})$$

тобто

$$d_{a_1,a_2,r_1,r_2} = \sum_{\substack{\text{по всім шляхам } \pi \\ \text{з } (a_1,a_2) \text{ в } (r_1,r_2)}}\ \prod_{\substack{\text{по всіх клітинках } (b_1,b_2) \\ \text{шляху } \pi \text{ крім } (a_1,a_2)}} c(b_1,b_2)$$

Доведення леми можна отримати підстановкою (5) у рекурентне співвідношення для b_{r_1,r_2}.

Наслідок 2. Біноміальний момент

$$B_{r_1,r_2} = \sum_{a_i:a_1+a_2\le M} \binom{a_1}{r_1}\binom{a_2}{r_2} P_{a_1,a_2}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,a_2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,a_2)\}$$

процесу $\zeta_n = (\zeta_n^1, \zeta_n^2)$ можна подати у вигляді:

$$B_{r_1,r_2} = d_{0,0,r_1,r_2} p_1^{r_1} p_2^{r_2} - \\ - \sum_{b_1=0}^{r_1}\sum_{b_2=0}^{r_2} d_{b_1,b_2,r_1,r_2} p_1^{r_1-b_1} p_2^{r_2-b_2} c(b_1,b_2)\cdot \\ \cdot \sum_{a_1=0}^{M} B_{a_1,M-a_1}\left(p_1\binom{a_1}{b_1-1}\binom{M-a_1}{b_2} + p_2\binom{a_1}{b_1}\binom{M-a_1}{b_2-1}\right)$$

де d_{b_1,b_2,r_1,r_2} визначені як в лемі 4 при

$$c(r_1,r_2) = \frac{\phi(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2)}{1-\phi(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2)}$$

та $B_{r_1,M-r_1}$ визначені системою (якщо її розв'язок існує)

$$B_{r_1,M-r_1} + \sum_{a_1=0}^{M} B_{a_1,M-a_1} \sum_{b_1=0}^{r_1}\sum_{b_2=0}^{M-r_1} d_{b_1,b_2,r_1,M-r_1}\cdot \\ \cdot p_1^{r_1-b_1} p_2^{M-r_1-b_2} c(b_1,b_2)\cdot \\ \cdot\left(p_1\binom{a_1}{b_1-1}\binom{M-a_1}{b_2} + p_2\binom{a_1}{b_1}\binom{M-a_1}{b_2-1}\right) = \\ = d_{0,0,r_1,M-r_1} p_1^{r_1} p_2^{M-r_1}.$$

Доведення. Застосовуємо лему 4 до результату теореми 2. ■

Лема 5. Якщо P_{r_1,r_2} стаціонарні ймовірності для процесу ζ_n. Тоді стаціонарні ймовірності $\overline{P}_{r_1,r_2}$ процесу $X(\tau_n)$, $n = 0,1,\ldots$ дорівнюють

$$\overline{P}_{r_1,r_2} = \begin{cases} P_{r_1-1,r_2}p_1 + P_{r_1,r_2-1}p_2, & r_1+r_2 < M, \\ P_{r_1-1,r_2}p_1 + P_{r_1,r_2-1}p_2 + P_{r_1,r_2}, & r_1+r_2 = M. \end{cases} \quad (6)$$

Розглянемо задачу оптимізації параметрів p_1 та p_2 вхідного потоку

$$\begin{cases} c_1\mathrm{E}\{X^1\} + c_2\mathrm{E}\{X^2\} \to max, \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

де розподіл вектора (X^1, X^2) співпадає з (6).

Виразивши $p_2 = 1 - p_1$, матимемо

$$\mathrm{E}\{X^i\} = \sum_{a:a_1+a_2\le M} \overline{P}_{a_1,a_2}(p_1)a_i$$

$$c_1\mathrm{E}\{X^1\} + c_2\mathrm{E}\{X^2\} = \\ = \sum_{a:a_1+a_2\le M} \overline{P}_{a_1,a_2}(p_1)(c_1a_1 + c_2a_2).$$

Дану функцію можна максимізувати чисельно. Розглянемо, для прикладу, випадок $\mu_1 = .5$, $\mu_2 = .6$, $c_1 = 54$, $c_2 = 60$, якщо час між надходженнями заявок розподілений згідно гамма розподілу з параметрами 2 та 1/3.

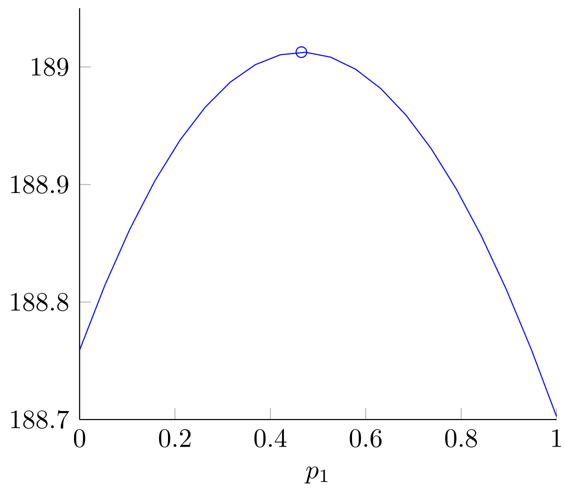

Рис. 1. Функція $c_1\mathrm{E}\{X^1\} + c_2\mathrm{E}\{X^2\}$ в залежності від p_1.

Таким чином оптимальними значеннями керуючих ймовірностей для обраних параметрів будуть $p_1 = 0.4651$ та $p_2 = 0.5349$.

Список використаних джерел

[1] Takács Lajos. Introduction to the Theory of Queues. — Oxford University Press, 1962. — P. 268.

[2] Lebedev Eugene, Ponomarchuk Oleg. On queuing systems with failures and several types of input flows // Top. — 1999. — Vol. 7, no. 2. — P. 323–332.

[3] Klimov G. P. Stochastic service system. — Nauka, 1966. — P. 243. — (in Russian).

Надійшла до редколегії 22.09.13