УДК 517.92

БолілийВ.О.[1], к. ф.-м.н.,доц.
Зеленська І.О.[2], аспірант

Система сингулярно збурених диференціальних рівнянь здиференціальною внутрішньою точкою звороту І-го роду

Побудована рівномірна асимптотикарозв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту. Розглядається випадок, коли точка звороту міститься всередині відрізка.

Ключові слова: система сингулярно збурених диференціальних рівнянь, малий параметр, точка звороту,простір без резонансних розв'язків.

[1]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, 1, м. Кіровоград, вул. Шевченка, 1,
e-mail: basilb@mail.ru
[2]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, 1, м. Кіровоград, вул. Шевченка, 1,
e-mail: Kopchuk@gmail.com

V. O. Boliliy[1], Ph:D (Physics & Mathematics)
I. O.Zelenska[2], Postgraduate student

System of singularly differential equations with differential internal turning point of the I-st kind

Uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the turning point is inside of segment.

Key Words: system of singular perturbed differential equations, small parameter,turning pointspace of the nonresonance solutions.

[1]KirovohradVolodymyrVynnychenko State Pedagogical University,25006, Kirovohrad,Shevchenkastr, 1,
e-mail: basilb@mail.ru

[2]KirovohradVolodymyrVynnychenko State Pedagogical University,25006, Kirovohrad,Shevchenkastr, 1,
e-mail: Kopchuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.,академік НАН України М.О. Перестюк

Вступ

Сучасні задачі математичного моделювання все частіше потребують асимптотичного аналізу досліджуваних моделей і одержання так званої «асимптотичної моделі»[8]. Окремим класом таких моделей, є системи з малим параметром при старшій похідній, спектр граничного оператора яких містить кратні і тотожно рівня нулю елементи. Дослідження такого типу задач і побудова асимптотичного розв'язку на заданому відрізку, що включає точку звороту, вносить певні труднощі і проблеми у процес побудови асимптотики[2].

В роботі [4] для неоднорідного рівняння Ліувілля була побудована рівномірна асимптотика розв'язку (РАР), що придатна на всьому відрізку $[-l;l]$. Автор зауважує, що найбільш вдалою істотно особливою функцією для побудови РАР в даному випадку є ІОФ $\nu(t)$. В [5] для класу скалярних рівнянь третього порядку з псевдодиференціальною точкою звороту одержано загальний розв'язок на відрізку $[-l;l]$,детально описані властивості регуляризуючої функції на кожному компакті відрізку.

В даній роботі узагальнимо розроблений метод навипадок внутрішньої точки звороту і побудуємо РАР ССЗДР з диференціальною точкою звороту І-го роду[3].

Постановка задачі

Розглянемо ССЗДР:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon)-A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon)=h(x), \qquad (1)$$

$\varepsilon\to 0$,
$Y(x,\varepsilon)=colon\left(y_1(x,\varepsilon),y_2(x,\varepsilon),y_3(x,\varepsilon)\right)$ - шукана вектор-функція, $h(x)=colon\left(0,0,h\ \ (x)\right)$ - задана вектор-функція,

$$A(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1,$$

- відома матриця, де

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -b(x) & -\tilde{x}a(x) & 0\end{pmatrix},$$

$$A_1(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Векторне рівняння (1) будемо досліджувати за умови, що

$$a(x)=x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x)<0,\quad b(x)<0,\quad x\in C^{\infty}[-l;l]. \tag{2}$$

Виходячи із вище заданих умов, стосовно розташування точки звороту на заданому відрізку, таку точку звороту прийнято називати *внутрішньою точкою звороту*.

За умови $\varepsilon=0$ одержимо вироджену систему:

$$-A(x,0)Y(x,0)=h(x). \tag{3}$$

Характеристичне рівняння, що відповідає ССЗДР (1) має вигляд:

$$|A(x)-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -b(x) & -a(x) & -\lambda\end{vmatrix}= =\lambda\left(-\lambda^2-x\tilde{a}(x)\right)=0. \tag{4}$$

Корені рівняння (4) мають вигляд

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}\ .$$

РегуляризаціяССЗДР

Згідно розробленого методу з метою виявлення і збереження всіх ІОФ введемо нову змінну $t=\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\equiv\mu^{-2}\cdot\varphi(x)$, де регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягає визначенню.

Після введення нової змінної, шукана вектор-функція прийме вигляд $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$, а розширення ССЗДР буде відбуватися за умови

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\mu^{-2}\cdot\phi(x)}\equiv Y(x,t,\varepsilon).$$

Тоді одержимо розширене векторне рівняння:

$$\tilde{L}_{\varepsilon}\,\tilde{y}(x,t,\varepsilon)\equiv\mu\varphi'(x)\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+ +\mu^3\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}-A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=h(x). \tag{1.1}$$

Простір безрезонансних розв’язків. Для того щоб (1.1) була однозначно вирішена, необхідно виділити клас функцій, засобами яких можливо це здійснити. Побудуємо новий простір

$$D_k(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k(t)+ +\mu\begin{pmatrix}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k'(t),$$

дефункції$U_1(t)=Ai(t)$ та $U_2(t)=Bi(t)$ - функції Ейрі-Лангера.

Для побудови розв’язків однорідної системи будемо використовувати другу форму рівняння Ейрі

$$U''(t)-tU(t)=0,$$

яке прийнято називати рівнянням Ейрі-Лангера[1,2,7].

При побудові формальних частинних розв’язків неоднорідної системи використаємо функцію Скорера, тобто ІОФ $\nu(t)$ та її похідну. Розглянемо підпростір $B_j(x)$, елементами якого є $f_j\nu(t)$ та $g_j\nu'(t),\ j=\overline{1;3}$.

$$B(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}f_1(x,\varepsilon)\\ f_2(x,\varepsilon)\\ f_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}\nu(t)+\mu\begin{pmatrix}g_1(x,\varepsilon)\\ g_2(x,\varepsilon)\\ g_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}\nu'(t)\cdot$$

Елемент множини функцій $\Omega(x)=colon\,(\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x))$, які є розв’язками виродженого рівняння, має вигляд $\omega_{01}\cdot\exp^{\left\{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right\}}$.

З цих підпросторів побудуємо новий простір як пряму суму:

$$Y(x)=\bigoplus_{k=1,2;\, j=1}^{3} D_{ij}(x)\bigoplus_{j=1}^{3} B_j(x)\bigoplus_{j=1}^{3}\Omega_j(x). \qquad (1.2)$$

Запишемо довільний елемент цього простору і будемо шукати асимптотику розв'язку розширеного векторного рівняння (1.1) у вигляді

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon)+B(x,t,\varepsilon)+\Omega(x)=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k(t)+\mu\begin{pmatrix}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k'(t)+$$

$$+\begin{pmatrix}f_1(x,\varepsilon)\\ f_2(x,\varepsilon)\\ f_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}v(t)+\mu\begin{pmatrix}g_1(x,\varepsilon)\\ g_2(x,\varepsilon)\\ g_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}v'(t)+\begin{pmatrix}\omega_1(x)\\ \omega_2(x)\\ \omega_3(x)\end{pmatrix}.$$

Тут $\alpha_{ks}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ks}(x,\varepsilon)$, $f_s(x,\varepsilon)$, $g_s(x,\varepsilon)$, $\omega_s(x,\varepsilon)$, s – аналітичні функції відносно малого параметра $\varepsilon>0$ і нескінченно диференційовані за змінною $x\in[-l;l]$, що підлягають визначенню. $v(t)$ - функція Скорера.

Вивчимо дію розширеного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (1.1). Отримаємо рівність

$$\begin{aligned}&\tilde{L}_\varepsilon\left(\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)+\mu\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\right)=\\&=\mu\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_k'(t)-\\&-\beta_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_k(t)-\\&-A(x,\varepsilon)\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)-\\&-\mu A(x,\varepsilon)\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)+\\&+\mu^3\alpha_k'(x)U_k(t)+\mu^4\beta_k'(x)U_k'(t)=0.\end{aligned}$$

Зрівнявши коефіцієнти біля ІОФ $U_k(t), k=1,2$ та їх похідних, отримаємо наступні векторні рівняння:

$$\begin{aligned}&U_k'(t):\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)-[A_0(x)+\mu^3A_1]\times\\&\times\beta_k(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_k'(x,\varepsilon),\end{aligned} \qquad (1.4)$$

$$\begin{aligned}&U_k(t):\beta_k(x,\varepsilon)\phi(x)\phi'(x)-[A_0(x)+\\&+\mu^3A_1]\alpha_k(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_k'(x,\varepsilon).\end{aligned}$$

Зауважимо, що для того, щоб одержані алгебраїчні системи рівнянь були регулярно збуреними відносно малого параметра $\mu^3>0$, запишемо їх у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь ($k=1,2$)

$$\begin{cases}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=\mu^3\left[\beta_{k2}(x,\varepsilon)-\right.\\ \left.-\beta_{k1}'(x,\varepsilon)\right],\\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\beta_{k3}(x,\varepsilon)=\\ =-\mu^3\beta_{k2}'(x,\varepsilon),\\ \varphi'(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon)+\\ +a(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k3}'(x,\varepsilon),\\ \beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=-\mu^3\left[\alpha_{k1}'(x,\varepsilon)-\right.\\ \left.-\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\right],\\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\alpha_{k3}(x,\varepsilon)=\\ =-\mu^3\alpha_{k2}'(x,\varepsilon),\\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+b(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon)+\\ +a(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{k3}'(x,\varepsilon).\end{cases} \qquad (1.5)$$

Формалізм побудови однорідної розширеної системи

Оскільки система (1.5) регулярно збурена, то її розв'язок шукаємо у вигляді наступних рядів вектор-функцій ($k=1,2$):

$$\begin{aligned}\alpha_k(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\alpha_{kr}(x),\\ \beta_k(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\beta_{kr}(x)\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\alpha_{kr}(x)=colon(\alpha_{1kr}(x),\alpha_{2kr}(x),\alpha_{3kr}(x))$ та $\beta_{kr}(x)=colon(\beta_{1kr}(x),\beta_{2kr}(x),\beta_{3kr}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned}&\Phi(x)Z_{k0}(x)=0,\\&\Phi(x)Z_{kr}(x)=-FZ_{k(r-3)}(x),\quad r\ge 3\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Тут
$Z_{kr}(x)=colon\,(\alpha_{1kr},\alpha_{2kr},\alpha_{3kr},\beta_{1kr},\beta_{2kr},\beta_{3kr})$

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -n & 0 \\ b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}$$

- де $m=\varphi'(x)$, а $n=-\varphi(x)\varphi'(x)$.

Обчисливши визначник $\Phi(x)$, визначимо функцію $\varphi(x)$ як розв'язок задачі

$$\left[\varphi'(x)\right]^2\varphi(x)=-a(x)\equiv -x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0)\neq 0. \tag{2.3}$$

Розв'язком задачі (2.3) буде

$$\text{функція}\ \varphi(x)=\begin{cases} -\left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^x\sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{2/3}, & x\geq 0, \\ \left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^x\sqrt{x\tilde{a}(x)}dx\right)^{2/3}, & x<0. \end{cases}$$

Функція $\varphi(x)$ має такі властивості:

- $\varphi(x)\in C^\infty[-l;l]$, регуляризуюча функція є нескінченно диференційованою на заданому відрізку;
- $\varphi(0)=0$ - початкова умова для функції $\varphi(x)$;
- $\varphi(x)$ монотонно спадає на заданому відрізку;
- $\varphi(x)>0;\ коли\ x\in[-l;0]$ і $\varphi(x)<0;\ коли\ x\in[0;l]$.

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок однорідної системи (1.4) вигляду

$$Z_{0k}(x)=\begin{pmatrix} 0, \\ \dfrac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k30}(x), \\ -\dfrac{a(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k20}(x), \\ 0, \\ \beta_{k20}(x), \\ \beta_{k30}(x) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

де $\beta_{k0i}(x)$, $i=\overline{1;3}$, $k=1,2$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції коли $x\in[-l;l]$.

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (2.2). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r=3$. Врахувавши одержаний розв'язок (2.4), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x)=\beta_{k20}(x)-\beta'_{k10}(x)\equiv \\ \equiv\beta_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)= \\ =-\beta'_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+b(x)\beta_{k13}(x)+ \\ +a(x)\beta_{k23}(x)=-\beta'_{k30}(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x)=-\alpha'_{k10}(x)+ \\ +\alpha_{k20}(x)\equiv-\alpha_{k20}(x)\equiv \\ \equiv-\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{k30}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x)-\alpha_{k33}(x)= \\ =-\alpha'_{k20}(x)\equiv\dfrac{d}{dx}\left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{k30}(x)\right), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)+b(x)\alpha_{k13}(x)+ \\ +a(x)\alpha_{k23}(x)=-\alpha'_{k30}(x). \end{cases} \tag{2.6}$$

З перших рівнянь систем (2.5) і (2.6) визначимо функції $\alpha_{k13}(x)$ та $\beta_{k13}(x)$. Тоді системи (2.5) і (2.6) набудутьвигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)=-\beta'_{k20}(x), \\ a(x)\alpha_{k23}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)= \\ =-\alpha'_{k30}(x)-b(x)\alpha_{k13}(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{k33}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \\ = -\alpha'_{k20}(x) \equiv -\dfrac{d}{dx}\Big(\big[\varphi'(x)\big]^{-1}\beta_{k30}(x)\Big), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+a(x)\beta_{k23}(x) = \\ = -\beta'_{k30}(x)-b(x)\beta_{k13}(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Для відшукання всіх лінійно незалежних розв'язків системи (1.4) скористаємось довільністю функцій $\beta_{ks0}(x)=\beta^0_{k30}\cdot\beta_{k30}(x)=0,$ де $\beta^0_{ks0}(x)$ - довільні сталі, $\tilde{\beta}_{ks0}(x)$ - частинні, досить гладкі для всіх $x\in[-l,l]$, розв'язки однорідних рівнянь (2.7) і (2.8). При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь вигляду

$$Z_{k3}(x)=\begin{bmatrix} z_{k13}(\varphi'(x),\,\beta_{k20}(x)) \\ z_{k23}(\varphi'(x),\,\beta_{k20}(x),\beta_{k33}(x)) \\ z_{k33}(\varphi(x),\varphi'(x),\,\beta_{k23}(x),\beta_{k30}(x)) \\ z_{k43}(\varphi(x),\varphi'(x),\,\beta_{k20}(x)) \\ \mathrm{z}_{k53=}\,\beta_{k21}(x) \\ \mathrm{z}_{k63}=\beta_{k31}(x) \end{bmatrix},$$

при чому $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, як і в (2.5), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x\in[-l,l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.7) і (2.8) при $r>3$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому розумінні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (2.7) і (2.8) при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ks0}(x)=colon(0,\beta^0_{k2r}(x),\beta^0_{k3r}(x))$.

Висновок 1. Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи рівнянь (2.6) і (2.7), одержимо два лінійно незалежних розв'язки системи (1) вид

$$D_k(x,\mathrm{t},\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\alpha_{kr}(x,\varepsilon)+ \\ +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)\,\mathrm{U}'_k(\mathrm{t})],\quad k=1,2 \quad (2.9)$$

де $\alpha_{kr}(x)=\mathrm{colon}\big(\alpha_{k1r}(x),\alpha_{k2r}(x),\alpha_{k3r}(x)\big)$ і $\beta_{kr}(x)=\mathrm{colon}\big(\beta_{k1r}(x),\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x)\big)$ - відомі вектор-функції.

Проведемо звуження даного розв'язку при $t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)$ і $k=1;2,$ тоді одержимо розв'язки

$$D_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{kr}(x)\times \\ \times\mathrm{U}_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)\,\mathrm{U}'_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))], \quad (2.10)\mathrm{T}$$

ретій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння (1.1) будуємо у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon)\equiv\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_r(x)\equiv\begin{pmatrix}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{1r}(x), \\ \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{2r}(x), \\ \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{3r}(x),\end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Підставивши (2.11) в розширений оператор $\tilde{L}_\varepsilon=0$, отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x)\omega_0(x)=0\,, \quad (2.12)$$

$$A_r(x)\omega_r(x)=-A_1(x)\omega_{(\mathrm{r}-1)}(x)+ \\ +\omega'_{(\mathrm{r}-1)}(x),\quad \mathrm{r}\geq 1.$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x)\omega_0(x)=0$. Отримаємо $\omega_{03}(x)\equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases}\omega'_{01}(x)-\omega_{02}(x)=0, \\ -x\tilde{a}(x)\omega_{02}(x)+\mathrm{b}(x)\omega_{01}(x)=0.\end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$-x\tilde{a}(x)\omega'_{01}(x)+\mathrm{b}(x)\omega_{01}(x)=0. \quad (2.13)$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.13) має вигляд

$$\omega_{01}(x)=\omega^0_{01}\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \quad (2.14)$$

де ω^0_{01} - довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт $b(x)$. З урахуванням того, що $b(x)<0$, розв'язок (2.14) не є гладкою функцією, але його можна використовувати для побудови третього формального розв'язку. Оскільки $\omega_{02}(x)=\omega'_{01}(x)$, то третій формальний розв'язок однорідної системи (1.1) запишемо у вигляді:

$$\omega_0(x)=\begin{pmatrix}\omega_{01}^0\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\},\\ \omega_{01}^0\cdot\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\},\\ 0\end{pmatrix}.$$

Висновок 2. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (2.12) поступово визначимо всі розв'язки $\omega_r(x)$.

Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи

На наступному кроці вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $B(x,\mathrm{t},\varepsilon)$. Отримаємо

$$\begin{aligned}&\tilde{L}_\varepsilon(f(x,\varepsilon)\nu(t)+\mu\,\mathrm{g}(x,\varepsilon)\nu'(t)+\omega(x,\varepsilon))=\\&=\mu f(x,\varepsilon)\varphi'(x)\nu(t)+\mathrm{g}(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)\nu(t)-\\&-\mathrm{A}(x,\varepsilon)\,\mathrm{f}(x,\varepsilon)\nu(t)-\mu\,\mathrm{A}(x,\varepsilon)\,\mathrm{g}(x,\varepsilon)\nu'(t)+\\&+\mu^3f'(x)\nu(t)+\mu^4g'(x)\nu'(t)+\mu^2\varphi'(x)\,\mathrm{g}(x)\pi^{-1}\\&+\mu^3\omega'(x)-\mathrm{A}(x,\varepsilon)\omega(x)=\mathrm{h}(x).\end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти біля істотно особливої функції $\nu(\mathrm{t})$ та її похідної, як в (1.3), й будемо вимагати, щоб одержані системи рівнянь були регулярно збуреними відносно малого параметра μ. Тоді будемо мати

$$\begin{aligned}&\nu'(\mathrm{t}):f(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\left[A_0(x)+\mu^3A_1\right]g(x,\varepsilon)=\\&=-\mu^3g'(x,\varepsilon),\\&\nu(\mathrm{t}):g(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\left[A_0(x)+\mu^3A_1\right]\times\\&\times f(x,\varepsilon)=-\mu^3f'(x,\varepsilon),\end{aligned}\qquad(3.1)$$

$$\begin{aligned}&\mu^3\omega'(x)-\mathrm{A}(\mathrm{x},\varepsilon)\omega(x)=h(x)-\\&-\mu^2\varphi'(x)\,\mathrm{g}(x)\pi^{-1}.\end{aligned}\qquad(3.2)$$

За аналогією з попереднім пунктом можна показати, що система векторних рівнянь (3.1) регулярно збурена. Тому її розв'язок шукаємо у вигляді рядів вектор-функцій

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^rf_r(x),$$

$$g(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^rg_r(x),$$

$$\omega(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\omega_r(x).\qquad(3.3)$$

Для визначення компонент вектор-функцій $f_r(\mathrm{x})=colon(\mathrm{f}_{1r}(x),\mathrm{f}_{2r}(x),\mathrm{f}_{3r}(x))$ та $g_r(\mathrm{x})=colon(g_{1r}(x),g_{2r}(x),g_{3r}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned}&\Phi(x)\,\mathrm{Z}_0^{част.}(x)=0,\\&\Phi(x)\,\mathrm{Z}_r^{част.}(x)=-\,\mathrm{Z}_{r-3}^{част.}(x),\quad \mathrm{r}\ge 3,\end{aligned}\qquad(3.4)$$

$$\text{де } Z_0^{част.}(\mathrm{x})=\begin{pmatrix}f_{1r}(x)\\f_{2r}(x)\\f_{3r}(x)\\g_{1r}(x)\\g_{2r}(x)\\g_{3r}(x)\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то отримаємо нетривіальний розв'язок однорідної системи (3.4) вигляд

$$Z_0^{част.}(x)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\varphi'(x)}\mathrm{g}_{30}(x)\\ -\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\mathrm{g}_{20}(x)\\ 0\\ \mathrm{g}_{20}(x)\\ \mathrm{g}_{30}(x)\end{pmatrix},\qquad(3.5)$$

$g_{i0},\ i=1;2$ - до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x\in[-l,l]$.

Так як і в (2.7)-(2.8), отримаємо дві системи рівнянь. Тому, щоб не повторюватись, зробимо наступний висновок: на першому кроці праві частини одержаних систем прості, тому за рахунок довільності функцій $g_{2r}^0(x)$ та $g_{3r}^0(x)$ існують розв'язки систем вигляду (3.5). На наступних ітераційних кроках праві частини будуть ускладнюватись, проте ми завжди зможемо добитись існування гладких розв'язків цих систем за рахунок довільності вище вказаних функцій.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь при $r>1$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $g_{2r}^0(x)$ та $g_{3r}^0(x)$, які утворюють довільний вектор $g_r^0(x) = colon(0, g_{2r}^0(x), g_{3r}^0(x))$.

Третій формальний розв'язок для векторного рівняння (1.1) отримаємо з (3.2) у вигляді:

$$\overline{\omega}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_r(x) \equiv \begin{pmatrix} \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{1r}(x) \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{2r}(x) \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{3r}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Для визначення вектор-функцій $\overline{\omega}(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$-A_0(x)\overline{\omega}_r(x) = 0 = h(x),\ r = 0;1,$$
$$-A_0(x)\overline{\omega}_r(\mathrm{x}) = h(x) - \pi^{-1}\varphi'(x)\mathrm{g}_{(\mathrm{r}-2)}(x),\ r = 2,$$
$$\overline{\omega}'_{(\mathrm{r}-3)}(x) - \mathrm{A}_0(x)\overline{\omega}_r(x) = h(x) -$$
$$-\pi^{-1}\varphi'(x)\mathrm{g}_{(\mathrm{r}-2)}(x) - A_1\overline{\omega}_{(\mathrm{r}-3)}(x),\ r \geq 3.$$

Тут $\overline{\omega}_r(x) = colon(\overline{\omega}_{1r}(x), \overline{\omega}_{2r}(x), \overline{\omega}_{3r}(x))$ - невідома вектор-функція.

Висновок 3. Побудовано частинний розв'язок розширеного рівняння (1.1) у вигляді формальних рядів (3.3)

$$\overline{\mathrm{y}}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Big[f_r(x)\nu(t) + $$
$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x)\nu'(t) + \overline{\omega}_r(x) \Big].$$

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\overline{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Bigg[f_r(x)\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) +$$
$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x)\nu'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) \Bigg] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_r(x)$$

є формальним частинним розв'язком ССЗДР(1).

Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Для того, щоб стверджувати про асимптотичний характер побудованого розв'язку (3.9) необхідно дати оцінку залишкових членів цих розв'язків. Оскільки ІОФ входять в цей розв'язок як множники, тому з метою одержання відповідних оцінок розв'язків достатньо оцінити залишкові члени формальних рядів (2.1), (3.3), (3.6).

Формальні розв'язки розширеної задачі представимо у вигляді тотожностей:

$$\alpha_{kq}(x,\varepsilon) \equiv \tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\alpha(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon),$$
$$\beta_{kq}(x,\varepsilon) \equiv \tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\beta(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon),$$
$$\tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \alpha_{kr}(x,\varepsilon),$$
$$\tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \beta_{kr}(x,\varepsilon)$$

де - часткові q - суми рядів, а $\varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\alpha(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\beta(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon)$ - залишкові члени рядів.

Підставимо ці ряди у векторні рівняння (1.4). Зауважимо, що коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon)$ і $\tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon)$ є розв'язками систем (2.6) та (2.7), тобто з цих функцій при $r = \overline{0; q-3}$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta_{ikr}^0(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta_{kr}^0(x) = \mathrm{colon}(\beta_{1kr}^0(x), \beta_{2kr}^0(x))$.

Оскільки одержані системи є регулярно збуреними відносно $\varepsilon > 0$ у просторі (1.3), то розв'язки цих рівнянь можна будувати у вигляді степеневих рядів по малому параметру $\varepsilon > 0$. Отже, можемо застосувати класичну теорію для оцінки залишкових членів цих систем [2]. Спочатку зробимо це для формальних рядів (2.1)

$$\left\| \xi_{\alpha k(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)},$$
$$\left\| \xi_{\beta k(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)}\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad q > 0, \quad (4.1)$$

де стала K_{q+1} не залежить від $x \in [-l; l]$ і малого параметра $\varepsilon > 0$.

Аналогічно для формальних рядів (3.3) і (3.8) одержимо наступні оцінки. Зауважимо, що розв'язок розширеного рівняння будується з використанням функції $Bi(t)$, це означає, що отримані оцінки носять асимптотичний характер. Враховуючи властивості істотно особливих функцій $\nu(\mathrm{t})$ на відрізку $x \in [-l; l]$

$$\left\| \xi_{f(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)},$$
$$\left\| \xi_{g(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)}\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad (4.1)$$
$$\left\| \xi_{\omega(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)} > 0.$$

Врахувавши одержані оцінки (4.1) і (4.2), асимптотику загального розв'язку системи (1) можемо записати у вигляді ряду:

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\alpha_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]U_k\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\beta_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dU_k\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}{d\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}\right\}+$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}f_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]v\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}g_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dv\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}{d\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right).$$

Одержане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай для задачі (1) виконуються умови:

1. $a(x), b(x), h(x)\in C^{\infty}\left[-l,l\right]$;
2. $a(x)\equiv x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x)<0, b(x)<0,$ $x\in\left[-l,l\right].$

Тоді на відрізку $\left[-l,l\right]$ в просторі без резонансних розв'язків (1.2), можна побудувати загальний розв'язок ССЗДР (1) у вигляді асимптотичного ряду (1.3), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на заданому відрізку.

Список використаних джерел

1.*Abramovic M.*, *Stigan P.*The directory on special functions with formulas, graphics and mathematical tables. – M.: Nauka. 1979. – 832 p. (in Russian).
2.*Bobochko V.M.,Perestuk N.A.* Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points. – Kyiv: Naukova dumka.2002. – 310 p.(in Ukrainian).
3.*Bobochko V.N.* Differential turning point in singular perturbed theory. II//Izvestiyavuzov. Mathematika. – 2002-№. P. 3-14.(in Russian).
4.*Bobochko V.M.* Internal turning point in the singular perturbed theory.// Ukrainian Mathematical Journal. – 1996. V. 48 - № 7.P.876-890.(in Ukrainian).
5. *Boliliy V.O.* Internal turning point in the differential equation of the third order.// Mathematical methods and Physics and mathematics fields. – 2000. V. 43 - № 3. - P. 44-50.(in Ukrainian).
6.*Dorodnicin A.A.* Asymptotic distributions of eigenvalues for some second order differential equations. // UspekhiMatematicheskikhNauk. – 1952. V.27 - №6. - P. 3-96.(in Russian).
7. *Olver F.*Asymptotics and special functions.// Transactions of The American Mathematical Society. – 1977. V. 226. – P. 227—241.(inRussian).
8. *Fridrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics.// Bull.Amer.Math.Soc. – 1955. V. 61 – P.485-504. (inEnglish).

Надійшладоредколегії